



Université de Constantine 3
Faculté de Génie des Procédés
Département de Génie Chimique

CONVECTION MIXTE DANS UNE CAVITE A PAROIS LATERALES MOBILES ET
DONT UNE PARTIE DE LA PAROI INFERIEURE EST SOUMISE A UN FLUX DE
CHALEUR FIXE

THESE

Présentée pour l'Obtention du
Diplôme de Doctorat en 3^{ème} Cycle (LMD)
en Génie Chimique

Par
Sacia KACHI

Année Universitaire
2020-2021



Université de Constantine 3
Faculté de Génie des Procédés
Département de Génie Chimique

N° de Série :

N° d'Ordre :

CONVECTION MIXTE DANS UNE CAVITE A PAROIS LATERALES MOBILES ET
DONT UNE PARTIE DE LA PAROI INFERIEURE EST SOUMISE A UN FLUX DE
CHALEUR FIXE

THESE

Présentée pour l'Obtention du
Diplôme de Doctorat en 3^{ème} Cycle (LMD)
en Génie Chimique

Par

Sacia KACHI

Devant le Jury Composé de :

Mustapha CHIKHI	Président	Professeur	Université Salah Boubnider Constantine 3
Saadoune BOUDEBOUS	Directeur de thèse	Professeur	Université Larbi Ben M'hidi Oum el Bouaghi
Samah ZERMANE	Encadreur administratif	MCA	Université Salah Boubnider Constantine 3
Hassina BEZAZE	Examineur	MCA	Université Salah Boubnider Constantine 3
Ouacil SAOULI	Examineur	MCA ENPC	Université Salah Boubnider Constantine 3
Zoubir NEMOUCHI	Examineur	Professeur	Université des frères Mentouri Constantine 1
Omar KHOLAI	Examineur	Professeur	Université des frères Mentouri Constantine 1

Année Universitaire

2020-2021

REMERCIEMENTS

Avant tout, je remercie *DIEU* le tout puissant de m'avoir donné la force et le courage afin que je puisse accomplir ce travail.

Ces quelques lignes seront insuffisantes pour exprimer toute la gratitude que j'ai envers Monsieur Saadoune BOUDEBOUS, Professeur à la Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées, à l'Université Larbi Ben M'hidi, Oum El Bouaghi, mon directeur de thèse, pour son encadrement, ses précieux conseils tant sur le plan scientifique que sur le plan humain ainsi que pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de ces années de ma recherche. Il a toujours su être disponible malgré son emploi du temps chargé afin de discuter avec moi, et pour cela, il a souvent pris de son temps personnel. Je le remercie sincèrement pour la confiance qu'il m'a accordée et sa motivation. Ses connaissances et son expérience qu'il m'a transmises ont été utiles et nécessaires, et constitueront une bonne base pour la poursuite de mes recherches. Je lui suis également gré de m'avoir encouragé à saisir les opportunités d'assister à plusieurs rencontres et congrès internationaux.

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à Madame Samah ZERMANE, Maître de Conférences à la Faculté de Génie des Procédés, à l'Université Salah Boubnider, Constantine 3, pour sa gentillesse et sa patience, qui m'a fait

l'honneur d'examiner ce travail et d'assurer la tâche de rapporteur. Je la remercie sincèrement pour son soutien inconditionnel et sa contribution effective à la réalisation et la finalisation de cette thèse.

J'adresse mes remerciements les plus profonds aux membres de jury pour la lecture et la critique de ce manuscrit. Leur présence m'a permis de soutenir ma thèse.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Mustapha CHIKHI , professeur à la Faculté de Génie des Procédés, à l'Université Salah Boubnider, Constantine 3, de trouver ici l'expression de mon profond respect pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Un remerciement chaleureux est adressé à Madame Hassina BEZAZE, Maître de Conférences à la Faculté de Génie des Procédés, à l'Université Salah Boubnider, Constantine 3, pour avoir accepté d'expertiser et d'améliorer ce travail.

Mes remerciements les plus respectueux s'adressent à Monsieur Zoubir NEMOUCHI, Professeur au département de Génie Mécanique, à la Faculté des Sciences de la Technologie, à l'Université des frères Mentouri de Constantine 1, et Monsieur Omar KHOLAI, professeur au département de Génie du Transport, à la Faculté des

Sciences de la Technologie, à l'Université des frères Mentouri de Constantine 1, que malgré leurs très nombreuses occupations, ont accepté d'examiner mon travail de thèse et de participer à mon jury de soutenance.

Je remercie encore très vivement le professeur Omar KHOLAI, pour m'avoir accueilli et accepté de consulter mon exposé, je le remercie fortement pour son aide et ses conseils précieux et illimités et sa générosité.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Ouacil SAOULI, Maître de Conférences à l'école nationale polytechnique, à l'Université Salah Boubnider, Constantine 3, pour avoir accepté d'expertiser, et d'évaluer mon travail de thèse, de participer également à mon jury de soutenance.

Mes remerciements vont également aux enseignants: Tawfik Mouat, Dalil Boumala, Mouhamed Barkani, Youssef Moudjari, Khaïr Addine Bouchareb, Laïd Ozare, les doctorants: Bilal, Mahfoud de la Faculté de Génie des Procédés, pour l'aide efficace qu'ils m'ont apportée à chaque fois que je les ai sollicités.

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut... ✍

Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude, l'amour,

le respect, la reconnaissance... ✍

Aussi, c'est tout simplement que... ✍



Je dédie cette thèse

A ALLAH LE TOUT PUISSANT

Oh ! Mon seigneur, Tu m'as fait trébucher pour me permettre de mieux apprécier ta grandeur.

" Gloire à Toi ! Nous n'avons du savoir que ce que Tu nous as appris. Certes c'est Toi L'Omniscient, Le Sage ". [Sourate 1 versé : 32].

A la mémoire de ma sœur " Salima " (27-12-2017)

A la mémoire de mon frère " Kamel " (05-12-2020)

A la mémoire de mon oncle " Ahmed " (11-01-2021)

A MA FAMILLE

A ma grand-mère paternel : Hajja Fatna

Pour ton amour, tes prières et tes encouragements qui m'ont été d'un grand soutien au cours de ce long parcours. Sans toi, je ne suis rien, mais grâce à toi je deviens un docteur.

J'implore Dieu qu'il te procure santé et qu'il m'aide à te compenser tous les malheurs passés...✍

A mes très chères parents : Abd Al Aziz et Khadidja

Je ne pourrais d'aucune manière exprimer ma profonde affection et mon immense gratitude pour tous les sacrifices consentis, votre aide et votre générosité extrêmes ont été pour moi une source de courage, de confiance et de patience. Tes prières ont été pour moi un grand soutien tout au long de mes études.

J'implore Dieu pour qu'il vous garde en bonne santé et qu'il nous permette de profiter de votre présence à nos côtés...✍

A Mes Très Chers Frères : Fouad, Hamadi, Acheraf, Mouataz et Wassim

Je vous dédie ce travail en témoignage de mon amour et mon attachement. Puisse nos fraternels liens se pérenniser et consolider encore.

Puisse DIEU le tout puissant vous donner santé, bonheur et longue vie afin que je puisse un jour vous rendre ne serait ce qu'un peu de ce que vous avez fait pour moi...✍

A Mon Très cher Oncle : Djamel

Tu qui m'a toujours soutenu et encouragé. Voilà le jour que tu as attendu plus impatiemment que moi et sera l'occasion de partager une joie avec ta complicité habituelle.

Il n'y a aucun mot qui suffit pour te dire merci, je t'aime énormément et je suis vraiment très fière d'être ta nièce...✍

*Je remercie spécialement mon oncle **Hamida** (Baddi) pour sa contribution à la réalisation de ce travail.*

Qu'il me soit permis aujourd'hui de vous assurer ma profonde et ma grande reconnaissance.

A Mes adorables sœurs : Aida, Nesrine, Kaouthar et Moufida

J'ai le grand plaisir de dédier à vous ce modeste travail. J'implore DIEU qu'il vous apporte bonheur, amour et que vos rêves se réalisent.

Puisse Dieu nous préserver du mal, nous combler de santé, de bonheur et nous procurer une longue vie pour le service de Dieu....✍

A ma substitution sœur Meriem et sa famille : son époux et ses fils, Ziad et Walid

Vous vous êtes toujours préoccupée de moi en m'octroyant un soutien moral inestimable et apaisé. Vous m'avez constamment annoncé de bonnes nouvelles.

Merci pour tout !

A Mes Petites Perles Malak et Chaima

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut...

Tous les mots ne sauraient exprimer l'amour...

Bref, vous êtes la joie de ma vie. J'espère que ma thèse sera pour vous source de fierté et qu'elle sera un exemple à suivre.

Vous joies de vivre et vos sourires ont été pour moi le meilleur encouragement que je puisse avoir.

Que Dieu vos garde et vos protègez....✍

A MES COLLEQUES ET MES AMIES

Ces toutes années de ma recherche passées au sein de la Faculté de Génie des Procédés, j'ai passé la plus part de mes temps au niveau de la bibliothèque de cette faculté, ces années ont été pour moi l'occasion de rencontrer des personnes aussi exceptionnelles les unes que les autres. Mes pensées les plus amicales vont bien entendu vers mes amies :

« Merci Hakima pour ton amitié, pour toutes les fois où tu m'as remonté le moral, et aussi pour toutes tes aides, merci pour ta douceur et ta gentillesse. Pour moi tu n'es pas seulement une amie mais aussi une sœur ! ».

« Merci Asma, je te remercie sincèrement pour toutes tes aides en mesure, tous tes conseils judicieux, ton humour. Merci pour ta gentillesse, ta patience et ta disponibilité permanente, ainsi que le temps que tu m'as consacré ».

« Merci Fatima, pour l'ambiance très agréable que tu as apportée dans la bibliothèque durant ces années. Merci à toi pour ton inestimable gentillesse et bonne humeur. Merci d'être toujours à l'écoute, attentionnée. C'est vraiment avec grand plaisir que j'ai te rencontré ».

« Merci Amina et Hadda pour toutes nos discussions très intéressantes, vos humours. Merci de vos soutiens et de vos amitiés depuis ces trois années. Je vous souhaite de tout mon cœur beaucoup de bonheur dans votre vie ».

Les mots me manquent pour exprimer ma dédicace et ma reconnaissance à vous, pour votre sympathie et les bons moments que nous avons partagés, votre disponibilité, votre investissement pour réussir ce travail et votre humour très à propos dans les moments difficiles de doutes. Je suis vraiment heureuse de vos connaître et je sais que notre amitié continuera au-delà de cette thèse.

Je voudrais dédier et remercier particulièrement Mademoiselle Sandra, technicienne des salles informatiques à la Faculté de Génie des Procédés, à l'Université de Salah Boubnider, Constantine 3.

« Sandra, je te remercie sincèrement pour toutes tes aides, tous tes conseils judicieux, ton humour, ta gentillesse, ta disponibilité à résoudre mes problème apporter au micro-ordinateur ainsi que le temps que tu m'as consacré ».

Je dédie et remercie de façon générale tous les autres membres administratifs, pour leur sympathie et leurs aides, spécialement à Hanane, je te remercie pour ta gentillesse, ta compétence et ton humour, ainsi que pour la très bonne ambiance que j'ai toujours trouvée avec toi.

Je voudrais exprimer particulièrement toute mon amitié à mes amies des cités universitaires : Ali Mendjeli 1 et Ain el Bey 3, chaque'une de son nom, pour tous vos encouragements et tous le temps qu'on a passé ensemble ... C'est comme si j'avais une autre famille ici, en Constantine. L'éloignement a été vraiment moins dur, je ne vous oublie jamais : Sara, Fatima, Safa, Souhir, Sara, Soundouss, Sarra, Athar...ect.

Cette dédicace serait incomplète si je n'en adressais pas à mes collègues et mes amies d'enfance : Sabrina, Wafa, Asma, Hassiba, Sarah, Dalel et Assia, il n'y a pas de mot assez fort pour exprimer ma gratitude à vous. Je vous souhaite le meilleur pour votre carrière et votre vie personnelle.

Je vous dédie ce travail qui grâce à vous a pu voir le jour.

Je vous dédie à mon tour cette thèse qui concrétise votre rêve le plus cher et qui n'est que le fruit de tes conseils et de tes encouragements.

Je suis sûr que vous êtes fières de moi aujourd'hui.

TABLE DES MATIERES

	Pages
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES TABLEAUX	xix
LISTE DES ABREVIATIONS.....	xx
RESUME EN FRANÇAIS	xxii
RESUME EN ANGLAIS	xxiii
RESUME EN ARABE	xxiv
INTRODUCTION GENERALE	1

CHAPITRE I

GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1. GENERALITES	5
1.1 Phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard.....	5
1.2 Forces mises en jeu dans le phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard..	7
1.3 Différents régimes de convection.....	8
2. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	9
2.1 Généralités.....	9
2.2 Convection naturelle.....	10
2.2.1 Cas de la convection naturelle instable.....	10
2.2.2 Cas de la convection naturelle stable.....	18
2.3 Convection mixte.....	34
2.3.1 Convection mixte avec bifurcation.....	34
2.3.2 Convection mixte sans bifurcation.....	37
3. CONCLUSION	41

CHAPITRE II

FORMULATION MATHEMATIQUE

1. INTRODUCTION	42
-----------------------	----

2. MODELE MATHEMATIQUE	42
2.1 Equations de base	43
2.1.1 Conservation de la masse.....	43
2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement.....	43
2.1.3 Conservation de l'énergie.....	43
2.2 Hypothèses simplificatrices	44
2.2.1 Hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq	44
2.2.2 Les autres hypothèses	45
3. DESCRIPTION DU PROBLEME CONSIDERE	45
4. EQUATIONS DU PROBLEME	46
4.1 Equations vectorielles dimensionnelles	46
4.1.1 Conservation de la masse	46
4.1.2 Conservation de la quantité de mouvement	47
4.1.3 Conservation de l'énergie	47
4.2 Equations dans le repère cartésien	47
4.2.1 Equation de continuité	47
4.2.2 Equation de la quantité de mouvement	47
➤ Equation de quantité de mouvement suivant x	47
➤ Equation de quantité de mouvement suivant y	47
4.2.3 Equation de l'énergie	47
5. CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES	48
5.1 Conditions initiales	48
5.2 Conditions aux limites	48
➤ Sur la paroi supérieure	48
➤ Aux niveaux des parois droite et gauche	48
➤ Au niveau de la partie source de chaleur sur la paroi inférieure	48
➤ Aux niveaux des parties adiabatiques de la paroi inférieure	48
6. ADIMENSIONNALISATION DES EQUATIONS	69
6.1 Equation de continuité	69

6.2 Equations de quantité de mouvement	49
6.2.1 Suivant la direction X	49
6.2.2 Suivant la direction Y	49
6.3 Equation de l'énergie	50
7. PARAMETRES DE CONTROLE DU POBLEME	51
7.1 Nombre de Grashof	51
7.2 Nombre de Reynolds	51
7.3 Nombre de Prandtl	52
7.4 Nombre de Richardson	52
8. FORMULATION FONCTION DE COURANT-VORTICITE	53
8.1 Equation de la vorticité Ω	53
8.2 Equation de l'énergie	53
8.3 Fonction du courant	53
9. FORME ADIMENSIONNELLE DES CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES	54
9.1 Conditions initiales	54
9.2 Conditions aux limites	55
➤ Sur la paroi supérieure	55
➤ Aux niveaux des parois droite et gauche	55
➤ Au niveau de la partie source de chaleur sur la paroi inférieure	55
➤ Aux niveaux des parties adiabatiques de la paroi inférieure	55
10. CALCUL DU COEFFICIENT DE TRANSFERT DE CHALEUR (NOMBRE DE NUSSELT)	56
11. CONCLUSION	57

CHAPITRE III

MODELISATION NUMERIQUE

1. INTRODUCTION	58
2. CHOIX DE LA METHODE DE DISCRETISATION	58

3. MAILLAGE	58
4. DISCRETISATION DES DIFFERENTES DERIVEES	59
4.1 Discrétisation temporelle ($\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}$)	59
4.2 Discrétisation du Terme convectif ($U \frac{\partial \varphi}{\partial X}$)	60
4.2.1 La différence centrale (central difference) $[\frac{\partial \varphi}{\partial X}]_{centrale}$	62
4.2.2 La différence arrière (backward difference) $[\frac{\partial \varphi}{\partial X}]_{arriere}$	63
4.2.3 La différence avant (forward difference) $[\frac{\partial \varphi}{\partial X}]_{avant}$	63
4.3 Discrétisation du terme diffusif ($\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}$)	65
4.4 Discrétisation du terme source ($\frac{\partial \theta}{\partial X}$)	66
4.5 Discrétisation des conditions aux limites	67
4.5.1 Température	67
4.5.2 Vorticité	67
➤ Paroi fixe inférieure	67
➤ Paroi fixe supérieure	68
➤ Paroi mobile gauche	68
➤ Paroi mobile droite	68
5. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS	69
5.1 Champs de vitesses	69
6. ALGORITHME DE CALCUL	70
7. CRITERE DE CONVERGENCE	71
8. CONCLUSION	71

CHAPITRE IV

RESULTATS ET DISCUSSION

1. INTRODUCTION	72
2. CHOIX DU MAILLAGE	72
3. VALIDATION DU CODE DE CALCUL	74
4. RESULTATS	77
4.1 Régime dominé par la convection forcée $0.1 \leq Ri \leq 15.6$	78

4.1.1	Champs thermiques	79
4.1.2	Nombre de Nusselt	81
4.1.3	Champs dynamiques	82
4.1.4	Champ du vecteur de vitesse	84
4.2	Régime dominé par la convection mixte $15.7 \leq Ri \leq 41.4$	87
4.2.1	Champs thermiques	87
4.2.2	Nombre de Nusselt	90
4.2.3	Champs dynamiques	92
4.2.4	Champ du vecteur de vitesse	93
4.3	Régime dominé par la convection naturelle $Ri \geq 41.5$	96
4.3.1	Champs thermiques	96
4.3.2	Nombre de Nusselt	99
4.3.3	Champs dynamiques	100
4.3.4	Champ du vecteur de vitesse	101
5.	DETAILS DE L'EVOLUTION DES DIFFERENTS ECOULEMENTS.....	104
6.	CONCLUSION	107
CONCLUSION GENERALE		109
1.	PROBLEME CONSIDERE.....	109
2.	BUT DU TRAVAIL.....	109
3.	INTERET DE L'ETUDE.....	109
4.	METHODE DE RESOLUTION.....	110
5.	PRINCIPAUX RESULTATS.....	110
6.	PERSPECTIVES ET RECOMMANDATIONS.....	111
BIBLIOGRAPHIE		112
LISTE DES ANNEXES		
ANNEXE A : COMMENT ON OBTIENT L'EQUATION DE LA VORTICITE.....		125
ANNEXE B : DISCRETISATION DU TERME CONVECTIF $(U \frac{\partial \varphi}{\partial X}; V \frac{\partial \varphi}{\partial Y})$		127
ANNEXE C : DISCRETISATION DU TERME DIFFUSIF $(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2})$		136

ANNEXE D : DISCRETISATION DU TERME SOURCE $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big _i$	143
ANNEXE E : LISTE DES TRAVAUX SCIENTIFIQUES	//

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
Figure 1.1 schéma du processus du phénomène de la convection de Rayleigh–Bénard.....	5
Figure 1.2 Instantanés du champ de température dans les simulations de convection 2D Rayleigh–Bénard. (Haut) : régime diffusif. (Milieu) : régime convectif. (Bas) : régime convectif turbulent.....	6
Figure 1.3 Schéma de principe de la convection de Rayleigh–Bénard. Les flèches blanches donnent les poussées d’Archimède différentielles, moteur du mouvement et les flèches noires les diffusions de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction, entraves au mouvement [4].....	7
Figure 1.4 Schéma de la cavité et conditions aux limites, Robillard et al. [24]	11
Figure 1.5 Géométrie de la cavité rectangulaire, Erenburg et al. [29]	12
Figure 1.6 Schémas des différentes configurations géométriques considérées, Gelfgat et Bar-Yoseph [30]	13-14-15
Figure 1.7 Modèle physique de la cavité et système de coordonnées, Pallares et al. [37]	16
Figure 1.8 Géométrie de la cavité (maillage), Angeli et al. [45]	17
Figure 1.9 Géométrie de la cavité, Angeli et Pagano [48]	17
Figure 1.10 Schéma de l’enceinte carrée, Aydin et Yang [56]	19
Figure 1.11 Schéma de la cavité, (1) : parois à la température froide, (2) : parois en plexi glace, (3) : Source chaude, Calcagni et al. [57]	20
Figure 1.12 Schéma de la cavité et position des thermocouples, Calcagni et al. [58]	21
Figure 1.13 Modèle expérimental et localisation des thermocouples, Corvaro et Paroncini [59]	22
Figure 1.14 Schéma de la cavité, Corvaro et Paroncini [60]	22

Figure 1.15 Schématisation du problème physique et conditions aux limites, Zouiri et al. [61].....	23
Figure 1.16 Schéma de la cavité, (a) Mamun Molla et al. [62] et (b) Noor-A- Alam Siddiki [63].....	24
Figure 1.17 Schéma de la cavité, Naffouti et Djebali [64].....	24
Figure 1.18 Schéma de la cavité rectangulaire inclinée, Saha et al. [65].....	25
Figure 1.19 Schéma de la cavité, Nguyen et al. [66].....	26
Figure 1.20 Description géométrique du problème, (a) source localisée au milieu, (b) source circonscrite à gauche, Bouhelal et al [67].....	26
Figure 1.21 Modèle physique et conditions aux limites dans la cavité carrée, Raisi [69].....	27
Figure 1.22 Schéma de la cavité carrée, Basak et al. [71].....	28
Figure 1.23 Schéma de la cavité carrée, Basak et Chamkha. [72].....	29
Figure 1.24 Géométrie de la cavité, Aswatha et al. [73].....	30
Figure 1.25 Géométrie de la cavité, Gibanov et Sheremet [74].....	30
Figure 1.26 Géométrie des cavités 2D et 3D, Bondareva et Sheremet [75].....	31
Figure 1.27 Géométrie du domaine physique, Loenko et al. [76].....	32
Figure 1.28 Géométrie de la cavité triangulaire 3D, Aich [77].....	32
Figure 1.29 Présentation schématique du modèle physique, Bouras et al. [79].....	33
Figure 1.30 Géométrie de la cavité carrée considérée et les conditions aux limites, Ovando Chacón (G.E.) et Ovando Chacón (S.L.) [80].....	34
Figure 1.31 Modèle physique, Dahdi et al. [81].....	35
Figure 1.32 Schéma du domaine de calcul avec les différentes conditions aux limites de vitesse et de température, Biswas et Manna [82].....	36
Figure 1.33 Schéma de la cavité (a) cas 2D et (b) cas 3D, Eutamene et al. [83].....	37
Figure 1.34 Schéma du système physique, (a) Aydin et Yang [56] et (b) Aydin et Yang [84].....	38
Figure 1.35 Configuration du modèle physique, Guo et Sharif [85].....	38
Figure 1.36 Configuration du modèle physique étudiée, Ali Khaleel Kareem Al- Khafaji [86].....	39 - 40
Figure 2.1 Géométrie de la cavité carrée du problème considéré	46
Figure 2.2 Conditions aux limites adimensionnelles de problème considéré	56
Figure 3.1 Schémas du maillage non uniforme de la cavité.....	59

Figure 3.2 Maillage décentré amont suivant X	61
Figure 3.3 Maillage décentré aval suivant X	61
Figure 4.1 Convergence du profil de température le long de $Y= 0.5$	73
Figure 4.2 Convergence du profil de vitesse le long du $Y = 0.5$	73
Figure 4.3 Convergence du profil de fonction de courant le long du $Y = 0.5$	74
Figure 4.4 Comparaison des contours de la fonction de courant pour $Ri = 10$ et $\varepsilon = 4/5$	75
Figure 4.5 Comparaison des isothermes pour $Ri = 10$ et $\varepsilon = 4/5$	75
Figure 4.6 Comparaison du profile de vitesse V le long du $Y= 0.5$ pour $Ri = 0.1, 1$ et 10	76
Figure 4.7 Comparaison du nombre de Nusselt moyen (Num) avec les résultats d' Aydin et Yang [40] en fonction de Ri	76
Figure 4.8 Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.	78
Figure 4.9 Champ thermique dans le cas du régime dominé par la convection forcée pour différentes valeurs du nombre de Richardson.....	79 - 80
Figure 4.10 Profils de température à $Y= 0.5$ pour différents nombres de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection forcée.....	81
Figure 4.11 Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du régime dominé par la convection forcée (deux cellules symétrique) pour différents nombre de Richardson.....	82
Figure 4.12 Champ dynamique dans le cas du régime dominé par la convection forcée.....	83 - 84
Figure 4.13 Champ du vecteur de vitesse dans le cas du régime dominé par la convection forcée pour différents nombre de Richardson.....	85 - 86
Figure 4.14 Profils de la vitesse verticale dans le cas du régime dominé par la convection forcée pour différents nombres de Richardson.....	86
Figure 4.15 Champ thermique dans le cas du régime dominé par la convection forcée (deux cellules non-symétriques) pour différentes valeurs du nombre de Richardson.....	87 - 88
Figure 4.16 Profils de température à $Y = 0.5$ pour différents nombres de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection forcée	

(deux cellules non-symétriques).....	89
Figure 4.17 Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du régime dominé par la convection forcée (deux cellules non-symétriques) pour différents nombre de Richardson.....	90
Figure 4.18 Evolution du nombre de Nusselt moyen pour $Ri = 15.6$ et $Ri = 15.7$	91
Figure 4.19 Champ dynamique dans le cas du deuxième type d'écoulement.....	92 - 93
Figure 4.20 Champ du vecteur de vitesse dans le cas du deuxième type d'écoulement.	94 - 95
Figure 4.21 Profils de la vitesse verticale dans le cas du régime dominé par la convection mixte.....	95
Figure 4.22 Champ thermique dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différentes valeurs du nombre de Richardson.....	96 - 97
Figure 4.23 Profils de température à $Y = 0.5$ pour différents nombres de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection naturelle...	98
Figure 4.24 Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différents nombre de Richardson.....	99
Figure 4.25 Champ dynamique dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différentes valeurs du nombre de Richardson.....	100-101
Figure 4.26 Champ du vecteur de vitesse dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différents nombre de Richardson.....	102-103
Figure 4.27 Profils de la vitesse verticale dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différents nombres de Richardson.....	103
Figure 4.28 Evolution du nombre de Nusselt moyen pour $Ri = 41.4$ et $Ri = 41.5$	104

LISTE DES TABLEAUX

Tableau	Page
Tableau 2.1 Identification des équations par rapport à l'équation générale de transport.....	50-51
Tableau 2.2 Signification des différents nombres adimensionnels.....	52-53
Tableau 2.3 Coefficients de diffusion et du terme source de l'équation de vortacité adimensionnelle.....	54
Tableau 4.1 Effet du maillage sur la fonction de courant et de la température maximales ainsi que sur le nombre de Nusselt moyen. ($Ri = 0.1$, $Pr = 0.71$ et $Re = 100$).....	72
Tableau 4.2 Instantanés de l'écoulement pour $Ri = 15.6$	105
Tableau 4.3 Instantanés de l'écoulement pour $Ri = 41.4$	106
Tableau 4.4 Instantanés de l'écoulement pour $Ri = 41.5$	106-107
Tableau 4.5 Les différents types d'écoulement selon les différents intervalles du nombre de Richardson.....	107

LISTE DES ABREVIATIONS

Symboles latins

g : accélération de la pesanteur.	$m \cdot s^{-2}$
C_p : chaleur spécifique à pression constante.	$J \cdot Kg^{-1} \cdot K^{-1}$
h : coefficient de transfert thermique.	$W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
l : longueur dimensionnelle de la source de chaleur	m
L : longueur dimensionnelle de la cavité.	m
$\vec{\eta}$: direction normal.	
i, j : coordonnées logiques des nœuds.	
q'' : densité du flux de chaleur.	$W \cdot m^{-2}$
t : temps.	s
T : température.	K
T_f : température froide des parois latérales.	K
ΔT : différence de température.	K
T_0 : température ambiante.	K
p : pression.	Pa
p_0 : Pression de référence.	Pa
u : composante de vitesse horizontale.	$m \cdot s^{-1}$
U : composante adimensionnelle de vitesse horizontale.	
v : composante de vitesse verticale.	$m \cdot s^{-1}$
V : composante adimensionnelle de vitesse verticale.	
V_0 : vitesse des parois latérales.	$m \cdot s^{-1}$
x, y : coordonnées d'espace dimensionnelles.	m
X, Y : coordonnées d'espace adimensionnelles.	

Symboles grecs

ε : longueur adimensionnelle de la source de chaleur (l/L).	
α : diffusivité thermique.	$m^2 \cdot s^{-1}$
β : coefficient d'expansion thermique à pression constante.	K^{-1}
θ : température adimensionnelle.	
ν : viscosité cinématique.	$m^2 \cdot s^{-1}$
μ : viscosité dynamique.	$Kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$

k :	conductivité thermique de l'air.	$W. m^{-1}. K^{-1}$
ψ :	fonction de courant dimensionnelle.	$m^3.s^{-1}$
Ψ :	fonction de courant adimensionnelle, ($\psi/V_0.L$ par mètre de profondeur).	
ω :	vorticité dimensionnelle.	$m^2.s^{-1}$
Ω :	vorticité adimensionnelle, ($\omega/V_0.L$).	
τ :	temps adimensionnel.	
ρ :	masse volumique (densité).	$Kg. m^{-3}$
ρ_0 :	masse volumique à la température ambiante, T_0 .	$Kg. m^{-3}$

Nombre sans dimensions

Nu :	nombre de Nusselt, adimensionnel.
\overline{Nu} :	nombre de Nusselt moyen, adimensionnel.
Pr :	nombre de Prandtl, adimensionnel.
Gr :	nombre de Grashof, adimensionnel.
Re :	nombre de Reynolds, adimensionnel.
Ri :	nombre de Richardson, (Gr/Re^2), adimensionnel.

Les indices

0 :	valeur de référence.
f :	froide.

RESUME

Dans la présente étude, nous nous intéressons à la simulation numérique de la convection mixte laminaire d'écoulement d'air, dans une cavité carrée. Une source de chaleur à flux constant de longueur relative " l " est placée au centre de la paroi inférieure de cette cavité. Les parois latérales sont maintenues à une température froide constante " T_f " et se déplacent vers le haut avec une vitesse fixe " V_0 ", tandis que, toutes les autres parties de la cavité sont considérées comme adiabatiques. Un modèle mathématique basé sur la formulation fonction de courant-vorticité (Ψ - Ω) est utilisé. Les équations régissant ce phénomène sont discrétisées par la méthode des différences finies en considérant un maillage non uniforme. La géométrie et les conditions aux limites de vitesse et de température sont symétriques par rapport à l'axe vertical passant par le centre de la cavité. Le nombre de Richardson (Ri), qui représente l'importance relative de la convection naturelle et forcée, est choisi comme paramètre de bifurcation.

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de champs thermiques et dynamiques, avec l'évolution temporelle des nombres de Nusselt moyens. L'analyse de ces résultats a permis de détecter l'existence de deux changements radicaux sur la structure d'écoulement pour les deux valeurs critiques du nombre de Richardson 15.6 et 41.5 (phénomène de bifurcation), alors que, l'analyse des résultats obtenus met en évidence l'existence de trois structures d'écoulements complètement différentes en fonction de la valeur du nombre de Richardson. Dans une première phase, l'écoulement est constitué de deux cellules parfaitement symétriques. Une bifurcation vers un régime d'écoulement asymétrique caractérisé par l'apparition brusque de deux cellules principales mais dissymétriques est mise en évidence pour la deuxième phase, alors que, la dernière phase est caractérisée par la naissance de quatre cellules symétriques. Le passage de la 2^{ème} phase vers la 3^{ème} phase, provoque une diminution soudaine et importante du nombre de Nusselt moyen.

Mots-clés : Convection mixte, méthode des différences finies, nombre de Richardson, phénomène de bifurcation.

ABSTRACT

In the present study, we are interested in the numerical simulation of laminar mixed convection of air flow, in a square cavity. A constant flux heat source with relative length " l " is placed in the center of the lower wall from this cavity. The sidewalls are maintained at a constant cold temperature " T_c " and move upwards with a fixed velocity " V_0 ", whereas, all the other parts of the cavity are considered adiabatic. A mathematical model based on stream function-vorticity formulation (Ψ - Ω) is used. The governing equations of this phenomenon are discretized by the finite difference method considering a non-uniform mesh. The geometry and boundary conditions for velocity and temperature are symmetrical with respect to the vertical axis passing through the center of the cavity. The Richardson number (Ri), which represents the relative importance of the natural and forced convection, is chosen as the bifurcation parameter.

The obtained results are presented in the form of thermal and dynamic fields, with the temporal evolution of the average Nusselt numbers. The analysis of these results made it possible to detect the existence of two radical changes in the flow structure for the two critical values of the Richardson number 15.6 and 41.5 (bifurcation phenomenon), whereas, the analysis of these results shows the existence of three flow structures completely different depending on the value of the Richardson number. In a first phase, the flow consists of two symmetric main cells. A bifurcation towards an asymmetric flow regime characterized by the sudden appearance of two main but dissymmetrical cells is demonstrated for the second phase, while, the last phase is characterized by the birth of four symmetrical cells. The transition from the 2nd phase to the 3rd phase causes an abrupt and a significant decrease in the average Nusselt number.

Keywords: Mixed convection, finite difference method, Richardson number, bifurcation phenomenon.

الملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة المحاكاة العددية لظاهرة الحمل الحراري الصفائحي المزدوج لتدفق الهواء داخل تجويف مربع الشكل, يحتوي على مصدر لتدفق حراري ثابت في قاعدته السفلى أين يتموضع على الطول النسبي "ل".

الجاران الجانبيان خاضعان لدرجة حرارة منخفضة (باردة) ثابتة " د", بحيث يتحركان نحو الأعلى بسرعة ثابتة "س₀" في حين أن جميع الأجزاء الأخرى في التجويف تعتبر معزولة حرارياً.

يتم تقدير المعادلات التي تحكم هذه الظاهرة من خلال استعمال طريقة الفروق المنتهية عن طريق النظر في شبكة غير منتهية.

الشروط الابتدائية و الحدودية للسرعة و درجة الحرارة متناظرة فيما يتعلق بالمحور العمودي المار عبر مركز التجويف. نستخدم العدد ريتشاردسون الذي يمثل المحصلة النسبية للحمل الحراري الطبيعي والميكانيكي: كمعلم للتشعب. يتم تقدير النتائج المتحصل عليها على شكل حقول حرارية و ديناميكية إلى جانب متوسط عدد نيسالت.

مكنتنا الدراسة التحليلية لهذه النتائج من اكتشاف وجود تغييرين جذريين في بنية التدفق, و ذلك ابتداء من القيمتين الحرجتين لعدد ريتشاردسون المتمثلتين في 15.6 و 41.5 ; من خلال تحليل النتائج المتحصل عليها نستنتج وجود ثلاثة بنيات مختلفة تماماً للتدفق بالاعتماد على قيمة العدد ريتشاردسون.

في المرحلة الأولى نلاحظ وجود خليتين رئيسيتين متماثلتين متناظرتين بينما المرحلة الثانية يتكون تدفق غير متماثل يتميز بمظهر مفاجئ لخليتين رئيسيتين غير متناظرتين في حين أن المرحلة الأخيرة تتميز بنشوء أربع خلايا متناظرة.

الانتقال من المرحلة الثانية إلى المرحلة الثالثة يؤدي لانخفاض مفاجئ و هام في متوسط عدد نيسالت.

الكلمات المفتاحية : الحمل الحراري المزدوج- طريقة الفروق المنتهية- عدد ريتشاردسون- ظاهرة التشعب.

INTRODUCTION GENERALE

1. GENERALITES

Le régime de fonctionnement d'une installation chimique quelconque dépend de la combinaison d'un très grand nombre de paramètres. Si le processus de la transformation chimique est primordial il reste néanmoins que les mécanismes de transport de la matière, de la chaleur et de la quantité de mouvement le sont aussi. Ces phénomènes de transfert de la quantité de mouvement, de la chaleur, de la matière, groupés sous l'appellation de « *phénomène de transport* » constituent actuellement une partie intégrante du Génie des Procédés.

En effet l'étude et le design des équipements des installations d'un processus complet de l'industrie chimique ne sauraient se faire, dans des conditions appropriées et conformes aux normes techniques, sans la maîtrise de telles disciplines à cause de leur présence, leur interaction et leur couplage dans ce processus. Dans n'importe quelle système la convection et la diffusion de la chaleur, de la matière et des espèces chimique sont fortement liées au champ hydrodynamique de l'écoulement qui à son tour subit l'influence des changements de ces grandeurs physiques.

Le transfert thermique constitue une partie essentielle de la physique générale qui concerne les aspects les plus familiers de l'énergie : *la transmission de la chaleur*. L'existence d'une différence de température entre deux systèmes ou au cœur même d'un système génère un transfert automatique d'énergie, sous forme thermique (chaleur) qui se propage de la partie la plus chaude vers la partie la plus froide jusqu'à un établissement d'équilibre thermique qui se manifeste par une homogénéité de la température dans les systèmes considérés. Ce transfert de la chaleur peut se faire suivant trois mécanismes différents : la conduction qui implique un contact direct entre la partie chaude et la partie froide (échange intermoléculaire), la convection générée par une modification de la masse volumique du fluide induisant ainsi un mouvement du fluide et le rayonnement qui engendre une transmission de la chaleur par ondes électromagnétiques. Ces trois modes peuvent intervenir simultanément dans le transfert thermique mais dans la plus part des cas seule la *convection* est considérée.

INTRODUCTION GENERALE

La particularité du transfert de la chaleur par convection réside dans le fait que l'existence, dans un fluide au repos ou en écoulement, de gradients de température et/ou de concentration donnent naissance à des forces de flottabilité ou d'Archimède (buoyancy forces en anglais) et qui à leur tour engendrent un écoulement spontané quand le fluide est au repos (convection naturelle) ou augmenter/diminuer son intensité lorsqu'il est déjà en mouvement (convection mixte). Ces forces de flottabilité modifient ainsi les champs des vitesses et influencent d'une manière directe le taux de transfert de chaleur à la faveur du couplage entre les différentes équations de conservation régissant le problème.

Les écoulements des fluides en régime de convection mixte dans des cavités avec des parois mobiles et différentes conditions thermiques aux limites sont de plus en plus rencontrés dans de nombreux secteurs industriels. Parmi ces applications nous pouvons citer, à titre d'exemple, la ventilation des composants électroniques présents dans presque tous les équipements. Du fait de leurs miniaturisations croissantes et de l'augmentation de leurs puissances la dissipation de la chaleur induite, dans les enceintes qui les abritent, devient de plus en plus hypothétique. Actuellement le système de refroidissement le plus efficace consiste en l'injection d'un courant d'air (modélisé par une paroi mobile à température froide constante) en régime de convection naturelle ou forcée.

La résolution d'un écoulement en régime de convection mixte dans des espaces confinés revient à caractériser la structure de l'écoulement en déterminant les champs de vitesses et de températures ainsi que le taux de transfert de chaleur et tenant compte des divers paramètres qui contrôlent le phénomène considéré. Les études expérimentales ont fait d'énormes progrès à ce sujet grâce notamment aux développements du matériel de mesure comme par exemple la L.D.A. (Laser Doppler Anemometry) ou la P.I.V. (Particle Image Velocimetry) qui permettent de déterminer avec une grande précision les champs de vitesses instantanées d'un écoulement. Malheureusement ces études expérimentales reviennent très chères et très longues à réaliser. Aussi depuis quelques décennies les études numériques des écoulements convectifs ont supplantées les études expérimentales et une nouvelle discipline la C.F.D. (Computational Fluid Dynamics en anglais) que l'on peut traduire par la « mécanique des fluides numérique » est apparue et a pris un essor considérable grâce, d'une part, à la disponibilité d'ordinateurs de plus en plus performants et d'autre part à un développement sans précédent des méthodes numériques.

Les phénomènes de transport dans les écoulements des fluides sont modélisés par des équations différentielles à dérivées partielles (E.D.P.) traduisant la conservation de toute entité physique (masse, quantité de mouvement, matière, énergie...). La discrétisation de ces équations par différentes méthodes numériques et leur résolution permettent de déterminer la structure générale de l'écoulement ainsi que les différents paramètres nécessaires au dimensionnement des unités industrielles. Cette dernière résolution peut se faire soit par programmation directe ou bien en utilisant des logiciels commerciaux.

2. PHENOMENE DE BIFURCATION

Une grande variété de phénomènes physiques parmi lesquels les écoulements de fluides, avec ou sans transfert de chaleur et de masse, sont régis par des systèmes d'équations différentielles non linéaires établis à partir des principes généraux de conservation de la physique. Ces systèmes d'équations non-linéaires contiennent de nombreux paramètres qui sont susceptibles d'être la cause de nombreuses manifestations radicales du comportement de l'écoulement du fluide donnant naissance à des « *bifurcations* ». De nombreuses études numériques et expérimentales concernant le changement de la nature même de l'écoulement dans différentes configurations géométriques en régime de convection naturelle, forcée ou mixte ont été rapportées dans la littérature. Toutes ont mis en évidence le caractère instable, complexe et désordonné de ce phénomène de par sa nature même ; en effet une légère perturbation peut entraîner des modifications significatives de l'écoulement.

3. BUT DE L'ETUDE

En considération de l'argumentation citée ci-dessus nous nous sommes intéressés, dans la présente étude, à la simulation numérique de l'écoulement d'air en convection mixte laminaire, dans une cavité carrée, dont une partie du fond est soumise à un flux de chaleur constant. Les parois latérales de cette cavité se déplacent avec une vitesse fixée vers le haut et sont soumises à une température froide. Les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques. Pour cela nous avons adopté le plan de la thèse suivant :

4. PLAN DE LA THESE

Dans le premier chapitre nous présentons une revue bibliographique détaillée qui résume les différents travaux rapportés dans la littérature relative au sujet considéré dans cette étude. Ceci permettra d'identifier les différents phénomènes et paramètres mis en jeu afin de mettre en évidence les mécanismes de transferts connus à ce jour en convection forcée et mixte.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'établissement de la formulation mathématique traduisant la modélisation du phénomène physique de la convection mixte dans des espaces confinés. Ce modèle mathématique se base sur l'approche « fonction du courant-vorticité » ($\psi - \omega$) afin d'éliminer le gradient de pression des équations de la conservation de la quantité de mouvement. Les différentes hypothèses et les conditions aux limites relatives aux différentes variables seront explicitées et justifiées.

Le troisième chapitre concernera la formulation numérique du modèle mathématique. Les équations régissant ce phénomène ont été discrétisées par la méthode des différences finies en considérant un maillage non uniforme et différentes méthodes de résolution des systèmes d'équations discrétisées obtenues ont été utilisées. Un code de calcul « maison » en langage FORTRAN a été établi et validé.

Le quatrième et dernier chapitre sera consacré à la description des résultats obtenus. L'analyse de ces résultats et leur confrontation devraient permettre d'identifier l'influence des différents paramètres sur la formation et le développement des structures instationnaires mis en jeu dans ce type d'écoulement.

Enfin, ce mémoire se terminera par une conclusion des travaux menés, une synthèse des principaux résultats obtenus, et fera aussi l'objet d'une proposition de perspectives concernant les recherches à mener pour poursuivre ces travaux de thèse.

GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1. GENERALITES

Le phénomène du transfert de chaleur par convection débute avec les expériences d'**Henri Bénard** [1, 2] réalisées en 1900, suivies peu après par la théorie de **Lord Rayleigh** [3] en 1916. Ce phénomène est actuellement désigné par la « convection de Rayleigh-Bénard » et conditionne, entre autre, la circulation atmosphérique, océanique ainsi que le mouvement des plaques tectoniques. Il se retrouve également dans de nombreux procédés industriels tels que : le chauffage et la climatisation, le refroidissement des composants électriques et électroniques, etc. Nous rappelons, dans ce qui suit, quelques notions fondamentales que nous avons jugées nécessaires à la compréhension de ce phénomène.

1.1 Phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard

Le phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard est illustré par la figure (1.1) qui montre une mince couche, de hauteur d , d'un fluide quelconque placée entre deux plaques soumises à une différence de températures ΔT . Le comportement du fluide situé entre ces deux plaques présente des différences significatives suivant la valeur de cette différence de températures ΔT .

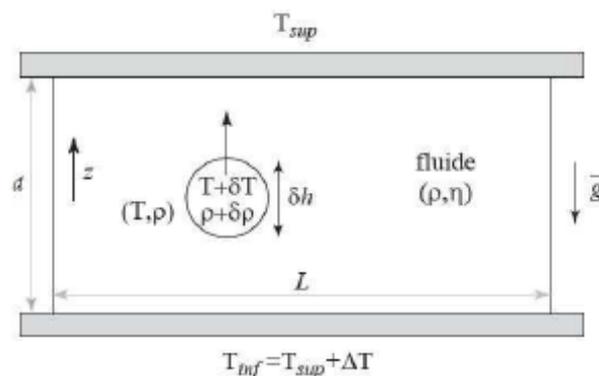


Figure 1.1 : schéma du processus du phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard [1].

Les différents comportements du fluide disposé dans cette configuration géométrique ont été rapportés et résumés par **Doering [4]**. Ils sont illustrés dans la figure (1.2) et peuvent être classés comme suit :

- Si la différence de température ΔT est faible, une stratification de la température se manifeste sur toute l'épaisseur de la couche de fluide. Un régime stable purement diffusif s'établit entre la paroi inférieure et la paroi supérieure.
- Si cette différence de température ΔT atteint une valeur critique un nouveau régime apparaît caractérisé par une génération du mouvement du fluide à travers cette couche. Au régime purement diffusif précédent s'ajoute un régime convectif. Les particules chaudes du fluide en mouvement transmettent leur chaleur aux particules froides environnantes.
- Si la différence de température ΔT augmente encore alors un régime convectif turbulent s'établit. Ce régime est caractérisé par de minces couches limites thermiques et une dynamique chaotique de panaches qui s'entremêlent et persistent au cœur de l'espace situé entre les deux plaques.

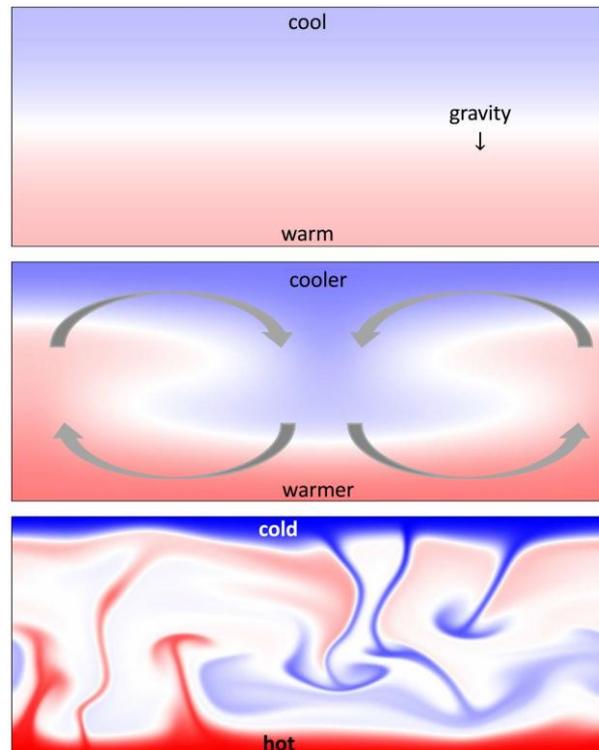


Figure 1.2 : Instantanés du champ de température dans les simulations de convection 2D Rayleigh-Bénard. (Haut) régime diffusif. (Milieu) régime convectif. (Bas) régime convectif turbulent [4].

1.2 Forces mises en jeu dans le phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard

Les forces régissant le phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard décrit précédemment sont matérialisées dans la figure (1.3) [4]. Une particule quelconque est soumise aux forces suivantes :

- Poids de la particule.
- La poussée d'Archimède générée par une différence de la masse volumique due à un gradient de température. Celle-ci est dirigée dans le sens contraire de l'accélération terrestre \vec{g} quand la chaleur provient de la paroi inférieure et elle est dirigée dans le même sens que l'accélération terrestre \vec{g} quand la chaleur provient de la paroi supérieure.
- La traînée générée par les forces visqueuses (forces de frottement) dues aux gradients de vitesses et à la dissipation de la chaleur.

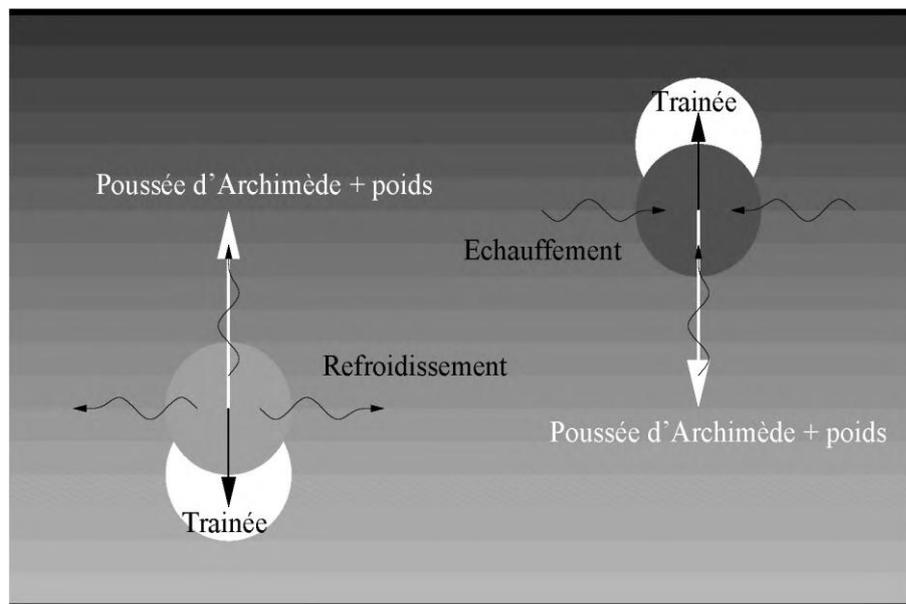


Figure 1.3 : Schéma de principe de la convection de Rayleigh-Bénard. Les flèches blanches donnent les poussées d'Archimède différentielles, moteur du mouvement et les flèches noires les diffusions de quantité de mouvement par viscosité et de chaleur par conduction, entraves au mouvement [4].

Remarque : les différents comportements du fluide décrits précédemment peuvent être caractérisé par un nombre sans dimensions appelé « Nombre de Rayleigh » et défini par la relation suivante :

$$Ra = \frac{\text{Poussée d'Archimède}}{\text{Force visqueuse} \times \text{diffusion thermique}} = \frac{g\beta\Delta T d^3}{\nu\alpha}$$

Dans laquelle β est le coefficient de dilatation thermique, ν est le coefficient de la diffusion de la quantité de mouvement et α celui de la diffusion de la chaleur. En d'autres termes le nombre de Rayleigh est le rapport des forces gravitationnelles qui accélèrent le mouvement et des forces de frottement dues à la viscosité (ν) ainsi que la dissipation de la chaleur (α) qui retardent le mouvement.

Ce nombre joue le même rôle que le nombre de Reynolds en mécanique des fluides. Pour une valeur de l'ordre de 1700, le transfert s'opère uniquement par conduction ; jusqu'à une valeur de l'ordre de 10^7 le régime d'écoulement est convectif et laminaire au-delà de cette valeur l'écoulement devient turbulent. Il faut préciser que ces valeurs ne constituent que des ordres de grandeurs déterminés d'une manière empirique par l'expérimentation et dépendent également de la configuration géométrique.

1.3 Différents régimes de convection

Nous avons déjà défini la convection naturelle ainsi que le système de forces qui la génère. Si on ajoute une force extérieure à ce système on parle alors de la « **convection forcée** ». Dans ce cas la poussée d'Archimède est négligeable devant les autres forces et le champ dynamique est découplé du champ thermique. Dans le cas intermédiaire où la poussée d'Archimède n'est plus négligeable on parle alors de la « **convection mixte** ». Le nombre adimensionnel qui détermine la dominance de ces deux types de convections, l'une par rapport à l'autre, est le nombre de Richardson (Ri) qui exprime le rapport entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique et qui est donné par l'expression suivante :

$$Ri = \frac{Ra}{PrRe^2}$$

Dans cette expression ; Ra : est le nombre de Rayleigh, Pr : est le nombre de Prandtl et Re : est le nombre de Reynolds.

Par ailleurs les valeurs du nombre de Richardson permettant de différencier la convection forcée, la convection mixte et la convection naturelle ne sont pas pour le moment bien précisées, cependant on peut énoncer que si $Ri \gg 1$, la convection naturelle domine alors que si $Ri \ll 1$, c'est la convection forcée qui prévaut.

Après avoir défini certains concepts liés au phénomène des écoulements convectifs nous allons présenter une étude bibliographique afin de mettre en évidence les travaux qui justifient le choix du sujet proposé dans cette thèse.

2. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

2.1 Généralités

La plupart des comportements des systèmes physiques dépendent d'un certain nombre de paramètres. La réponse du système à une petite variation de l'un des paramètres est généralement régulière ; cependant, dans certains cas, il existe des valeurs spéciales pour lesquelles le système adopte soudainement un comportement qualitativement différent. Une augmentation lente et continue du paramètre présente une variété de comportements du système, tous différents les uns des autres, devenant de plus en plus complexes et désordonnés. Un tel changement de comportement est appelé "bifurcation".

Une grande variété d'écoulements de fluides avec ou sans transfert de chaleur et de masse, rencontrés dans les applications industrielles et dans différents secteurs de l'ingénierie, sont régis par des systèmes d'équations différentielles partielles non linéaires dérivées des principes généraux de conservation de la physique. Ces systèmes d'équations non linéaires contiennent de nombreux paramètres qui sont susceptibles d'être à l'origine de nombreux phénomènes de bifurcation. Une revue générale et bien documentée portant sur l'analyse numérique des bifurcations dans les problèmes d'écoulements des fluides a été récemment rapportée par **Dijkstra et al. [5]**.

La première variété d'écoulements de fluides, sujette à ce phénomène de bifurcation, concerne les écoulements purement hydrodynamiques (c.-à-d. sans transfert de chaleur ou de masse) qui se produisent dans les conduits de section variable avec des conditions aux limites strictement symétriques par rapport à l'axe principal de l'écoulement. Les géométries concernées comprennent l'élargissement brusque du conduit [6, 9], le rétrécissement brusque [10], les convergents-divergents [11, 12] et les diffuseurs [13]. Les résultats obtenus pour différents rapports d'élargissement/rétrécissement du canal, d'angle des diffuseurs et du nombre de Reynolds de l'écoulement confirment clairement que la bifurcation peut être présente aux valeurs critiques de ces paramètres distincts.

La seconde variété d'écoulements de fluides, également sujette à ce phénomène de bifurcation, concerne les écoulements avec transfert de chaleur. L'étude des écoulements convectifs dans des espaces confinés a suscité, ces dernières décennies, un intérêt considérable qui se traduit par la production d'une bibliographie abondante. De nombreux travaux ont été largement rapportés dans la littérature que nous ne pouvons tous citer ici. Par conséquent, nous nous sommes concentrés sur les travaux se rapportant à des configurations géométriques comportant des parois mobiles ou non, et soumises à une source de chaleur sous forme d'une température ou bien d'un flux de chaleur imposé (constant ou variable)). La plupart des écoulements convectifs dans de telles configurations ont révélé que le comportement dynamique et thermique dépend fortement à la fois de la géométrie de l'enceinte, des conditions aux limites et de la variation de plusieurs paramètres dont les nombres de Reynolds, Prandtl et Rayleigh (ou Grashof). Il est bien connu que cette forte dépendance peut présenter, dans certains cas, une grande diversité de comportement dynamique et thermique complexe comme l'instabilité, la rupture de symétrie, la bifurcation et le chaos. Une revue détaillée de la littérature existante, en relation avec le sujet de la présente étude, peut être subdivisée en deux catégories principales, la convection naturelle et la convection mixte. Nous allons, dans ce qui suit, présenter les principaux travaux concernant ces deux types d'écoulements convectifs.

2.2 Convection naturelle

Deux cas d'écoulements en régime de convection naturelle peuvent se distinguer par des comportements très spécifiques, le premier cas est complexe et présente une multitude de solutions avec une rupture de symétrie, des bifurcations, etc. alors que le second cas ne présente aucun de ces phénomènes.

2.2.1 Cas de la convection naturelle instable

Depuis les premiers travaux réalisés par **Henri Bénard** [1, 2], **Lord Rayleigh** [3]. La convection de Rayleigh-Bénard a fait l'objet de nombreux ouvrages. Le premier compte rendu relatif à l'aspect théorique de ce problème a été rédigé par **Pellew et Southwell** [14] en 1940 et a servi jusqu'en 1960 comme une excellente référence pour les différentes recherches sur ce sujet. En 1961 **Chandrasekhar** [15] rédige son œuvre majeure intitulée : "Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability" qui consiste en une introduction bien documentée sur le problème de la convection de Rayleigh-Bénard

ainsi que sur la théorie des instabilités qui lui sont liées. Dans les années 1960 et 1970. La théorie sur l'apparition du mouvement convectif dans des cavités de différentes formes a été étudié expérimentalement, théoriquement ou numériquement par plusieurs chercheurs parmi lesquels nous pouvons citer : **Davis [16]**, **Catton [17, 18, 19]**, **Ostrach [20-21]**, **Heitz et Westwater [22]**, et enfin par **Gebhart [23]**. Ces auteurs ont déterminé le nombre de Rayleigh critique pour lequel l'écoulement devient instable en fonction du rapport d'aspect des configurations géométriques considérées.

Les travaux entrepris par l'équipe de **Vasseur [24-28]** constituent une contribution majeure à la détermination des états multiples stables et instables dans des cavités rectangulaires bidimensionnelles dont la paroi inférieure est chauffée partiellement de manière isotherme, la paroi supérieure est refroidie à température constante et toutes les autres parois sont adiabatiques (voir la figure (1.4) par exemple). Les paramètres considérés sont le rapport d'aspect de la cavité, la longueur sans dimension de la source de chaleur par rapport à l'axe verticale de symétrie de la cavité, et le nombre de Rayleigh basé sur la largeur de la cavité. Les travaux [24] et [28] traitent un milieu poreux, les travaux [26] et [27] traitent un fluide binaire et enfin l'étude [25] considère un fluide pur.

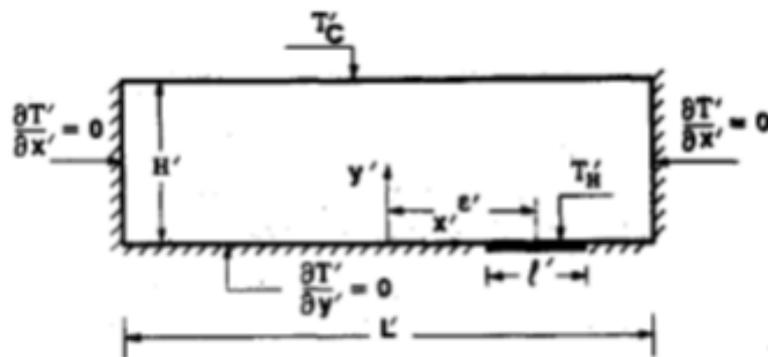


Figure 1.4 : Schéma de la cavité et conditions aux limites.

Robillard et al. [24].

Une autre équipe de recherche dirigée par de **Gelfgat [29-32]** a considéré le même problème cité précédemment et dont nous résumons, ci-dessous, leurs principales études :

Erenburg et al. [29], ont étudié numériquement la multiplicité, la stabilité et les bifurcations de la convection naturelle à faible nombre de Prandtl dans une cavité rectangulaire bidimensionnelle avec des parois verticales chauffées partiellement et symétriquement. L'étude est réalisée pour un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr = 0.021$). Le problème représente un modèle simple d'une configuration dans laquelle la hauteur de l'élément chauffant est inférieure à la hauteur totale de la cavité (Figure (1.5)). Les différentes simulations numériques sont effectuées par la méthode spectrale globale de Galerkin. Les bifurcations de Hopf et la rupture de la symétrie de l'écoulement sont étudiées pour un rapport d'aspect de la cavité (hauteur/longueur) variant de 1 à 6. Ils ont constaté que, lorsque le nombre de Grashof augmente, l'écoulement subit une série de bifurcations.

Les diagrammes de stabilité et de bifurcation, les schémas des écoulements stables et oscillatoires et les schémas des perturbations les plus significatives sont rapportés. Des branches d'état stables séparées se trouvent à certaines valeurs des paramètres gouvernants. Ils ont montré que les phénomènes observés se produisent également à des nombres de Prandtl plus grands, ce qui est illustré pour $Pr = 10$. Des instabilités tridimensionnelles similaires se produisant dans un cylindre avec un échauffement partiel de la paroi latérale sont également discutées.

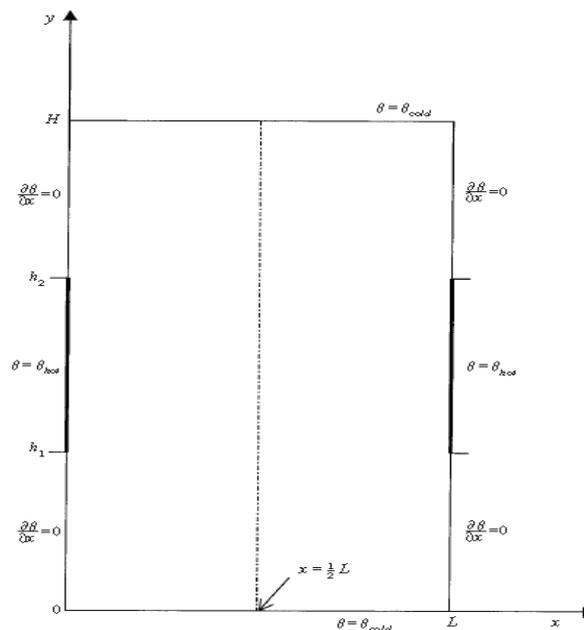
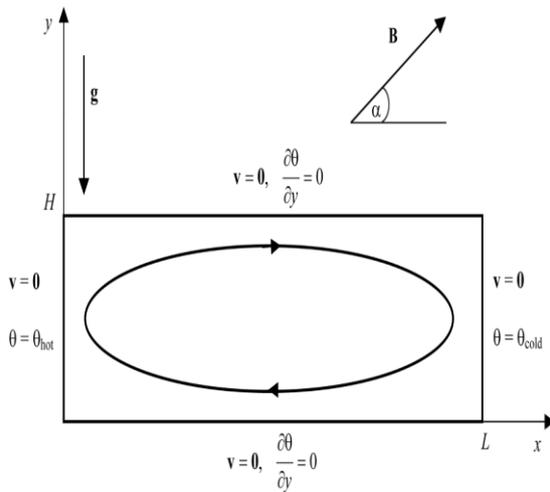
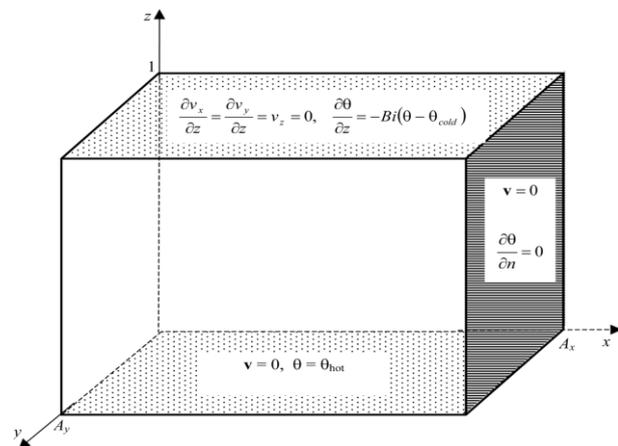


Figure 1.5 : Géométrie de la cavité rectangulaire
Erenburg et al. [29].

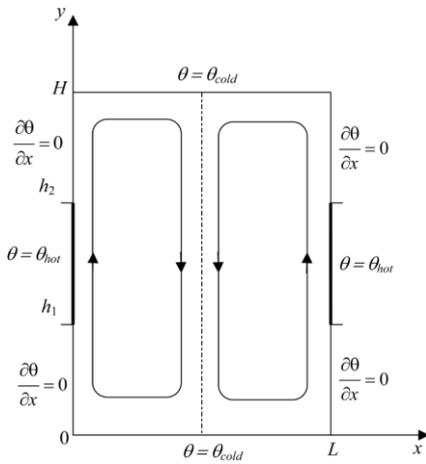
Gelfgat et **Bar-Yoseph** [30] présentent un article de synthèse qui porte principalement sur la multiplicité et l'instabilité des écoulements confinés, dans différentes configurations géométriques, d'un fluide newtonien incompressible (Figure (1.6)). La méthode spectrale globale de Galerkin a été utilisée pour l'approximation spatiale des champs de vitesse et de température. Des exemples de plusieurs états d'écoulements avec leurs diagrammes de stabilité sont donnés. Ces auteurs ont montré clairement que malgré la simplicité de la géométrie du domaine et l'hypothèse selon laquelle l'écoulement reste laminaire, des schémas d'écoulement multiples et compliqués se révèlent dans tous les cas considérés. La multiplicité de ces états d'écoulement est généralement liée à la concurrence des différents mécanismes d'entraînement de l'écoulement ainsi qu'aux conditions aux limites. Ils ont aussi montré qu'au-delà de la valeur critique d'un paramètre adimensionnelle caractéristique de l'écoulement (inférieure au seuil d'un état stochastique ou turbulent) de multiples états d'écoulement asymptotiquement stables peuvent être mis en évidence.



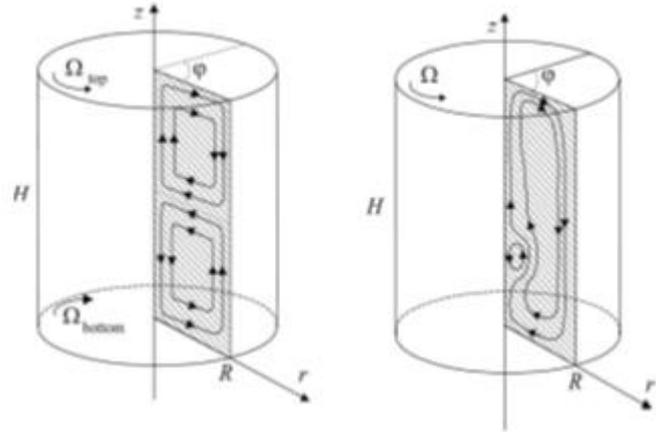
Convection naturelle dans une cavité rectangulaire.



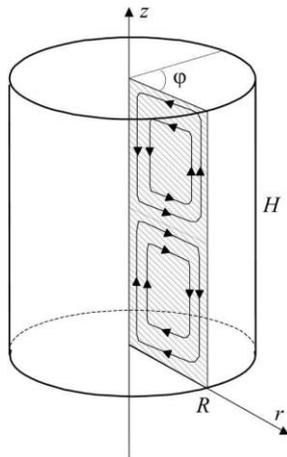
Convection de type Rayleigh-Bénard en 3D.



Convection naturelle dans une cavité 2D partiellement chauffée par les parois latérales.

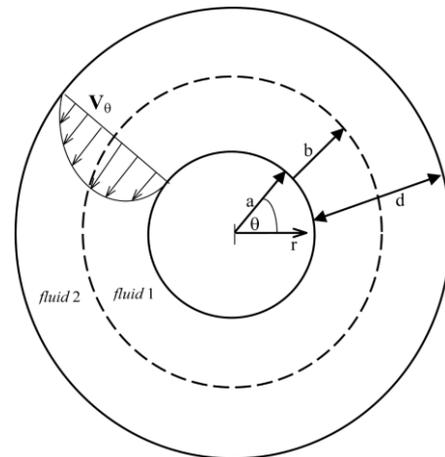


Écoulement dans un cylindre en rotation.

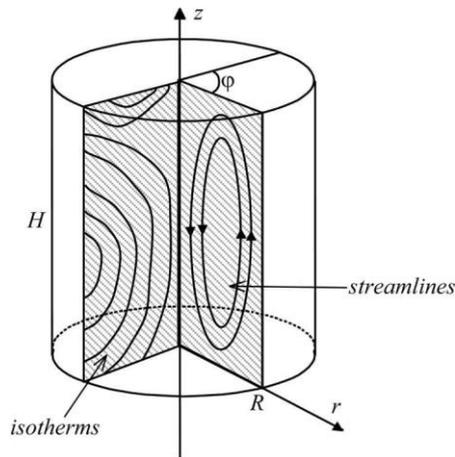


Écoulement confiné dans un cylindre en rotation et soumis à un champ magnétique.

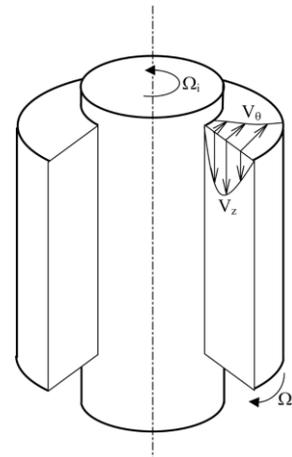
$$\mathbf{B} = B_0(\mathbf{e}_r \sin \omega t + \mathbf{e}_\theta \cos \omega t)$$



Écoulement de Dean dans un anneau.



Convection naturelle dans un cylindre.



Ecoulement de Taylor-Couette.

Figure 1.6 : Schémas des différentes configurations géométriques considérées
Gelfgat et Bar-Yoseph [30].

Gelfgat [31-32] examine l'effet du maillage ainsi que la méthode de résolution des systèmes d'équations discrétisées par la méthode de volumes finis concernant la stabilité et l'instabilité des écoulements convectifs bidimensionnels [31] et tridimensionnels [32]. Dans ces deux cas, il a été démontré que les résultats acceptables, relatifs à la stabilité des écoulements pour les problèmes considérés, ne peuvent être obtenus que sur un maillage ayant plus de 100 nœuds dans la direction la plus courte. En plus cet auteur a constaté que lorsque des maillages très fins sont utilisés les méthodes directes de résolution des systèmes des équations discrétisées sont plus efficaces que les méthodes itératives. Certes la convergence des solutions est plus lente dans le cas des méthodes directes mais elle est compensée par le problème de divergence des solutions dans le cas des méthodes itératives.

Il nous semble utile de signaler que le fruit de ces travaux cités précédemment a débouché sur la publication, très récente (2019), d'un livre rédigé par **Gelfgat [33]** qui traite de l'état de l'art et des derniers développements de pointe dans les techniques numériques pour la modélisation des instabilités des fluides et des structures de bifurcation qui leurs sont associées. Cet ouvrage fournit également une revue complète des problèmes complexes récemment résolus dans ce domaine.

Le phénomène de la convection de type Rayleigh-Bénard tridimensionnelle, (voir Figure (1.7) par exemple), en régime laminaire et turbulent a été considéré par l'équipe de **Pallares et al. [34-39]**. Ces auteurs ont présenté une description détaillée de la topologie de l'écoulement. La multiplicité des solutions et des différentes structures de l'écoulement sont mises en évidence en fonction du nombre de Rayleigh.

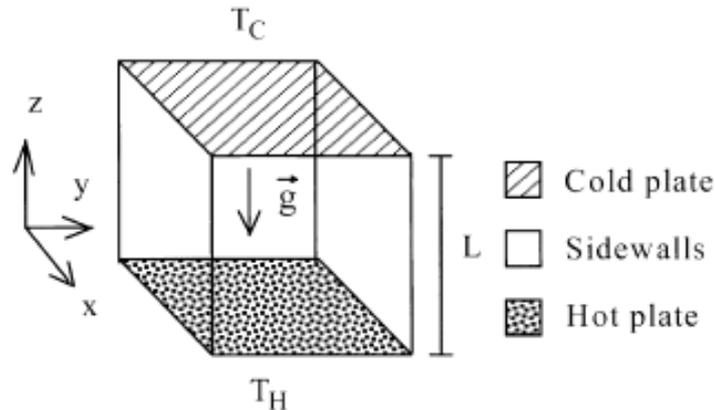


Figure 1.7 : Modèle physique de la cavité et système de coordonnées
Pallares et al. [37].

La littérature scientifique montre que cette même configuration continue, jusqu'à présent, à faire l'objet d'un large éventail d'études théoriques, expérimentales et numériques très intensives, comme en témoigne le nombre d'excellents articles de synthèse rapportés par : **Bairi et al. [40]**, **Kadhim Hussein et al. [41]**, **Öztop et al. [42]**, **Soman et al. [43]**, et **Arun et al. [44]**.

Une classe des écoulements hydro-thermiques dans des cavités munies d'obstacles de différentes formes et situés en leurs centres mérite d'être signalé car ces écoulements peuvent présenter les mêmes caractéristiques que ceux cités précédemment. La majorité de ces études ont été réalisées par l'équipe d'**Angeli [45-50]**. Les schémas de la configuration géométrique adoptée dans tous ces travaux est donnée par les figures (1.8) et (1.9). Les principaux résultats sont matérialisés sous forme de lignes de courant et d'isothermes et les différentes bifurcations des écoulements sont déterminées en fonction du nombre de Rayleigh et du rapport d'aspect de la cavité.

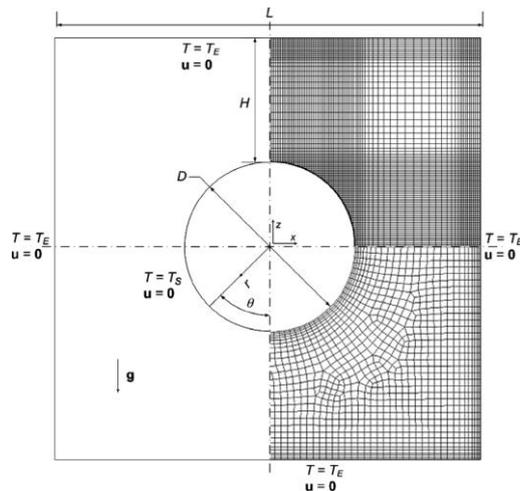


Figure 1.8 : Géométrie de la cavité (maillage)

Angeli et al. [45].

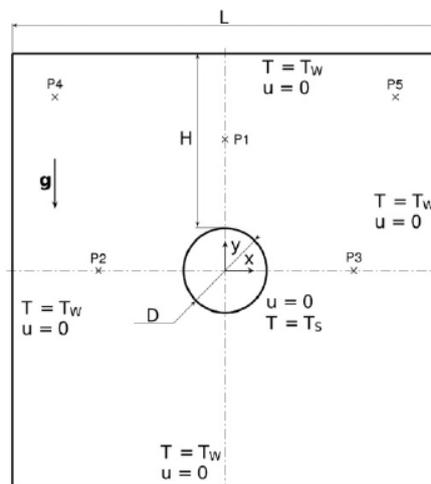


Figure 1.9 : Géométrie de la cavité

Angeli et Pagano [48].

Il convient également de signaler un article de synthèse publié très récemment (2020) par **Abdulkadhim et al. [51]**, qui résume les publications récentes des dix dernières années sur ce sujet spécifique pour un corps situé dans des formes complexes comme les enceintes rhombiques, ondulées, trapézoïdales, elliptiques et parallélépipédiques. De nombreux paramètres tels que les nombres de Rayleigh, de Nusselt et d'ondulations ainsi que la position du corps interne ont été abordés et discutés afin de tirer les principales conclusions et recommandations.

Enfin, pour être le plus complet possible, il nous semble utile de signaler aussi que la convection naturelle dans des enceintes non rectangulaires, remplies de différents fluides, a également fait l'objet d'efforts de recherche intensifs car ces géométries ont une influence considérable sur le transfert de chaleur, lié directement à la consommation de l'énergie. Très récemment (2018), une synthèse des études basées sur des approches expérimentales, analytiques et numériques et concernant une grande variété de géométries soumises à différentes conditions aux limites a été rapportée et analysée par **Rahimi et al. [52]**. Les différents comportements des écoulements en régime de convection naturelle, notamment laminaire, stationnaire et transitoire, turbulente, présentant des bifurcations ou non, ont été mis en évidence.

2.2.2 Cas de la convection naturelle stable

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré des cavités chauffées par le bas et dont les côtés latéraux sont adiabatiques (condition de Neumann). Nous allons voir, à présent, la même configuration géométrique mais cette fois-ci les côtés latéraux sont soumis à une température constante (condition de Dirichlet). L'intérêt accordé à cette configuration géométrique est dû au fait que les écoulements induits ne présentent ni instabilités ni bifurcations.

Il semble que **Torrance et al. [53]**, ainsi que **Torrance et Rockett [54]** furent, parmi les premiers qui ont réalisé respectivement, une étude expérimentale et une étude numérique de la convection naturelle en régime permanent induite dans des enceintes par une petite source de chaleur située au centre de la paroi inférieure. Des expériences ont été menées pour visualiser les schémas d'écoulement de convection naturelle dans les enceintes. Les résultats ont été présentés sous forme de photographies des différents types d'écoulement en régime permanent pour une série de conditions expérimentales en fonction de la variation du nombre de Grashof. Les résultats obtenus numériquement s'avèrent en excellent accord avec ceux obtenus expérimentalement. Cette même configuration a été revisitée expérimentalement et numériquement, une dizaine d'années plus tard, par le même auteur, **Torrance [55]** mais cette fois-ci les parois latérales de l'enceinte sont soumises à une température qui augmente linéairement avec la hauteur et les résultats incluent en plus la variation du nombre de Prandtl.

Aydin et **Yang** [56] ont étudié numériquement la convection naturelle d'un écoulement d'air dans une enceinte carrée. Les parois latérales de la cavité sont soumises à une température froide. Une source de chaleur est placée au milieu de la paroi inférieure. Toutes les autres parois de la cavité sont considérées adiabatiques (Figure (1.10)). Les simulations sont obtenues pour des valeurs du nombre de Rayleigh variant de 10^3 à 10^6 et de la longueur sans dimension $\varepsilon = l/L$ de la partie chauffée égale à $1/5$, $2/5$, $3/5$ et $4/5$. Les résultats locaux sont présentés sous forme de contours de lignes de courant, d'isotherme et de la variation du nombre de Nusselt local sur la paroi chaude. Les champs d'écoulement et de température sont symétriques à l'intérieur de l'enceinte dues à la symétrie des conditions aux limites dans la direction verticale. Pour des petites valeurs du nombre de Rayleigh (Ra), le transfert de chaleur est dominé par la conduction à travers la couche de fluide, alors que pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh le transfert de chaleur est principalement dû à la convection. Comme attendu, l'accroissement de la longueur sans dimension ε augmente le transfert de chaleur, particulièrement pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh.

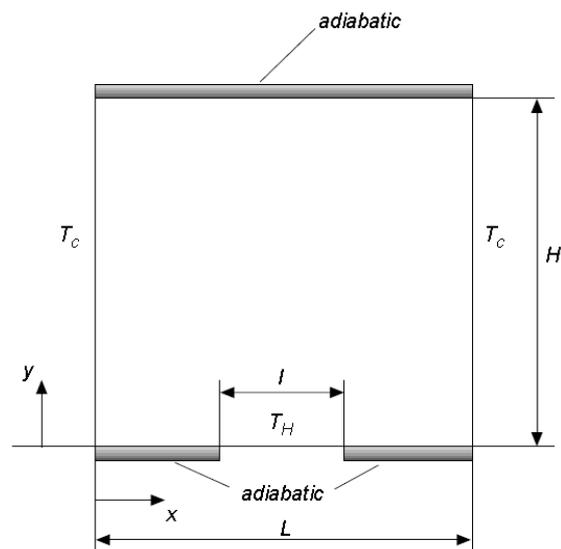


Figure 1.10 : Schéma de l'enceinte carrée.

Aydin et Yang [56].

Depuis la partition de cet article en 2000 un nombre impressionnant de publications a été consacré à cette même configuration géométrique, avec tout de même, de légères différences dans les conditions aux limites. Nous nous attachons, dans ce qui suit à mentionner les principales d'entre elles.

Du point de vue expérimentale **Calcagni et al. [57]** ont considéré la même configuration géométrique et représentée par la figure (1.11). La cavité utilisée pour les tests consiste en une enceinte carrée de dimensions $H \times H \times L$, avec $H = 0.05$ m et $L = 0.405$ m ; L est beaucoup plus grand que H pour laisser le mouvement se développer dans la direction L , parallèlement au faisceau laser. Les parois verticales latérales sont en aluminium et un bain thermostatique permettait la circulation du fluide de refroidissement à travers une chemise métallique fixée à la surface arrière. Les surfaces supérieure et inférieure de l'enceinte sont en plexiglas et, à l'exception de la partie chauffée, sont considérées comme adiabatiques, tandis que les parois verticales d'extrémité sont en verre qui garantit l'accès optique à la cavité. La source de chaleur, située au centre de la paroi inférieure, est en laiton et est maintenue à une température T_h par un fluide circulant à travers elle. Les dimensions de la source de chaleur étudiées sont de $1/5$, $2/5$, $3/5$ et $4/5$ de la longueur L . Les températures du fluide sont mesurées par des thermocouples en cuivre ; trois d'entre eux sont situés à 1 mm sous la surface du laiton de la source de chaleur, et cinq autres sont à l'intérieur de l'aluminium de chaque paroi verticale ; la différence entre les trois températures mesurées sur la source de chaleur est d'environ 0.1 K, de sorte qu'il est possible de considérer que la source de chaleur est isotherme. Différents écoulements ont été obtenus en fonction du nombre de Rayleigh (Ra) et de la longueur de la source chaude. Les inters férogrammes montrent un faible mouvement convectif pour $Ra < 1.63 \times 10^4$ et il augmente un nombre de Rayleigh (Ra) situé au environ de 10^5 et qui représente la valeur du début de la convection. Le nombre de Nusselt a été évalué sur la surface de la source de chaleur et a montré une forme symétrique présentant des pics aux deux bouts de la source de chaleur.

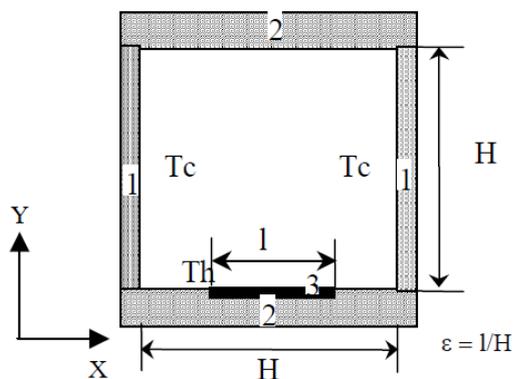


Figure 1.11 : Schéma de la cavité, (1) : parois à la température froide, (2) : parois en plexi glace, (3) : Source chaude.

Calcagni et al. [57].

Cette même configuration géométrique (voir figure (1.12)) a été revisitée par les mêmes auteurs **Calcagni et al. [58]** à la différence que cette fois ci que les résultats expérimentaux sont confirmés par une étude numérique basée sur la méthode des volumes finis implémentée dans le code commercial Fluent (version 6.0).

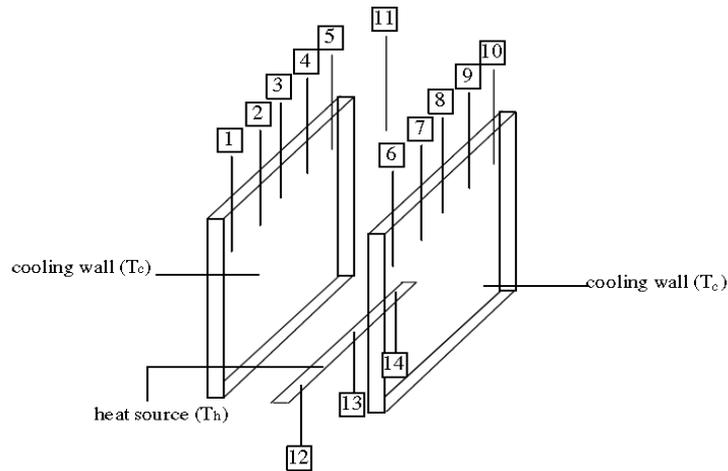


Figure 1.12 : Schéma de la cavité et position des thermocouples
Calcagni et al. [58].

Cette même configuration géométrique (voir figure (1.13)) a été revisitée une troisième fois par **Corvaro et Paroncini [59]**. Dans ce cas la distribution de la température de l'air et les nombres de Nusselt à différents nombres de Rayleigh sur la bande chauffée ont été mesurés par interférométrie holographique, alors que le champ de vitesse aux mêmes nombres de Rayleigh ont été déterminés par une vélocimétrie par image de particules en 2D (P.I.V.) Les résultats obtenus ont été comparés à ceux obtenus numériquement en utilisant le logiciel Fluent (version 6.2.16).

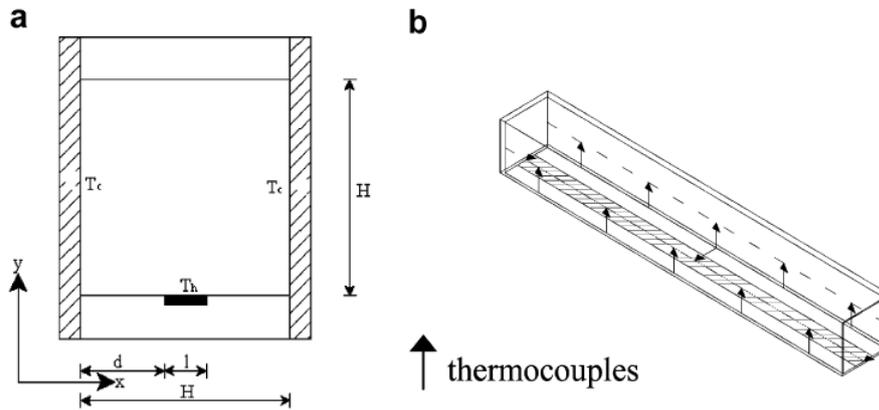


Figure 1.13 : Modèle expérimental et localisation des thermocouples
Corvaro et Paroncini [59].

Les mêmes auteurs **Corvaro** et **Paroncini [60]** ont considéré la même configuration, mentionnée précédemment, avec cette fois ci une source de chaleur représentée par un block chauffé comme le montre la figure (1.14) et dont la position sur la paroi inférieure constitue un paramètre d'étude. L'analyse PIV a évalué les structures d'écoulement liées à l'écoulement convectif et ont permis d'identifier les champs de vitesse, les fonctions de courant et les distributions des vecteurs de vitesse, tandis que, grâce à l'interférométrie holographique, les nombres moyens et locaux du nombre de Nusselt ont été déterminés. L'analyse des résultats montre que la position de la source de chaleur influence à la fois les nombres de Nusselt moyens sur les surfaces chaudes et le développement de vortex de petites tailles sur la surface supérieure.

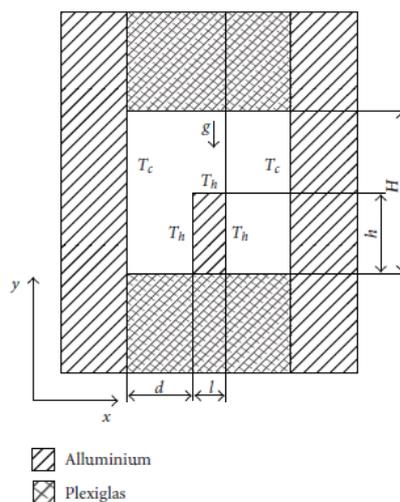


Figure 1.14 : Schéma de la cavité
Corvaro et Paroncini [60].

Du point de vue numérique **Zouiri et al. [61]** ont étudié la convection naturelle laminaire au sein d'une cavité carrée. Les parois verticales sont maintenues à une température constante alors que les parois horizontales sont isolées thermiquement, à l'exception d'une fraction occupant 20% à 80% de la surface inférieure de l'enceinte et centrée par rapport à celle-ci, qui est maintenue à une température constante et uniforme, supérieure à celle des parois latérales (voir figure (1.15)). La résolution des équations régissant l'écoulement et le transfert thermique est approchée par la méthode des volumes finis et l'algorithme SIMPLER est adopté pour traiter le couplage vitesse-pression. L'étude se focalise sur l'influence occasionnée par les variations du nombre de Rayleigh et de la longueur de la fraction chauffée, sur la structure de l'écoulement et du transfert thermique au sein de la cavité remplie entièrement d'un fluide newtonien incompressible. Comme la configuration géométrique et que les conditions aux limites sont les mêmes que celles considérées par **Aydin et Yang [56]**, les résultats obtenus sont strictement similaires.

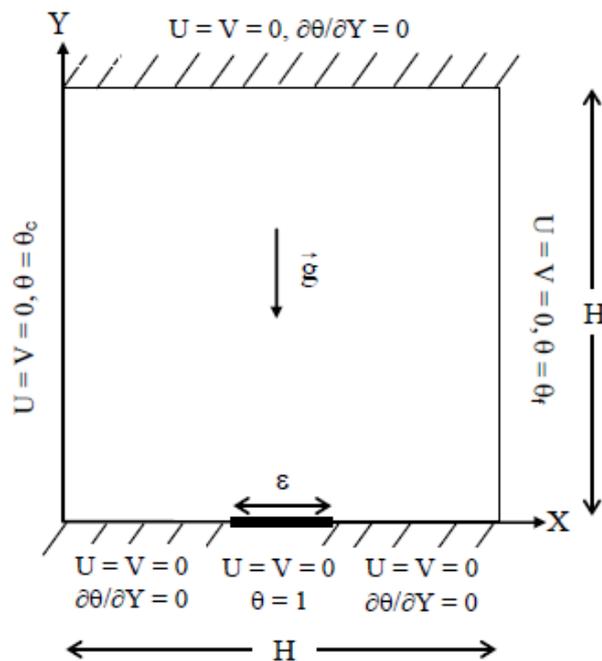


Figure 1.15 : Schématisation du problème physique et conditions aux limites.

Zouiri et al. [61].

Mamun Molla et al. [62] ainsi que **Noor-A-Alam Siddiki [63]** ont considéré strictement le même problème que celui étudié par **Aydin et Yang [56]** (voir figure (1.16)). La seule différence est que la cavité est saturée par un milieu poreux.

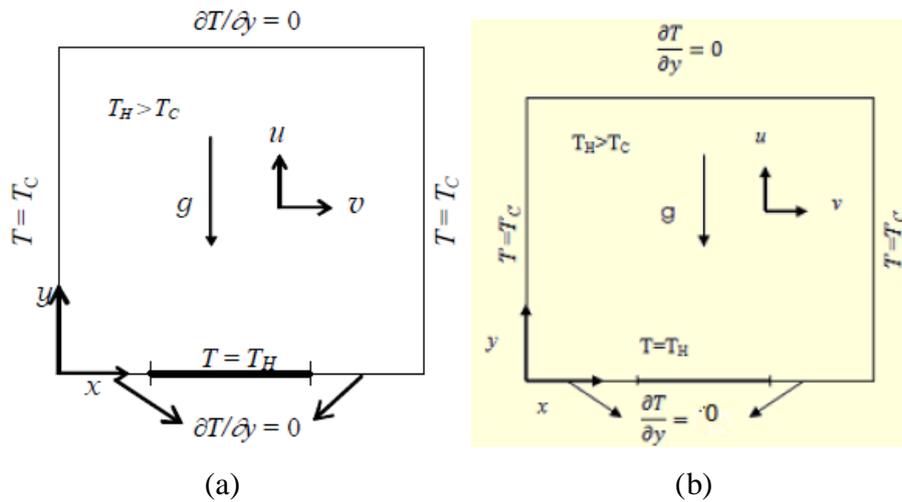


Figure 1.16 : Schéma de la cavité

(a) Mamun Molla et al. [62] et (b) Noor-A-Alam Siddiki [63].

Naffouti et Djebali [64] ont revisité ce même problème (voir figure (1.17)) mais cette fois-ci la méthode "Lattice Boltzmann" est utilisée pour résoudre les équations sans dimension avec les conditions aux limites qui leurs sont associées. Dans ce cas particulier, les simulations numériques sont effectuées pour étudier les effets du nombre de Grashof allant de 10^4 à 10^6 , de la longueur de la source chaude ϵ de 0.1 à 0.4 et de sa position X_c allant de 0.15 à 0.45, sur les comportements de l'écoulement et du transfert de chaleur dans cette cavité.

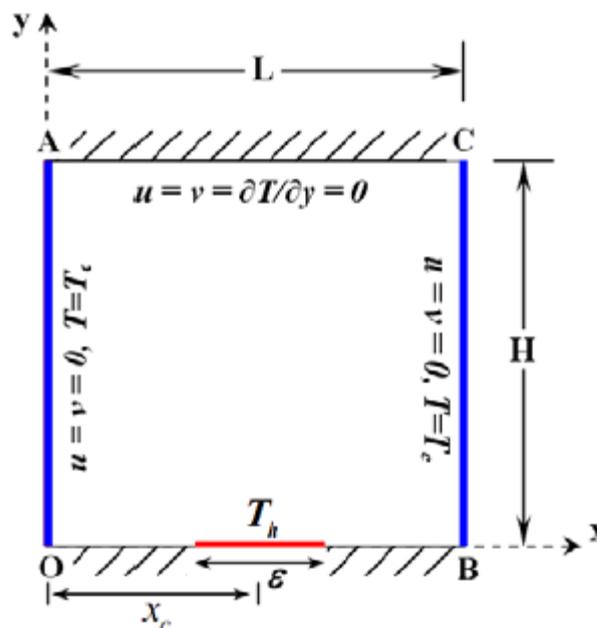


Figure 1.17 : Schéma de la cavité.

Naffouti et Djebali [64].

Saha et al. [65], ont étudié numériquement la convection naturelle dans une enceinte rectangulaire bidimensionnelle de dimension $W \times H$, les deux parois verticales de la cavité sont maintenues à une température basse constante, T_c . Une source de chaleur, de longueur L , est située au milieu de la paroi inférieure. Toutes les autres parois sont considérées adiabatiques (Figure (1.18)). La formulation vitesse-pression des équations de Navier-Stokes et de l'énergie est utilisée pour modéliser la conservation de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie du milieu fluide dans l'enceinte. Les résultats sont présentés sous forme des contours de courant et d'isothermes, ainsi que la variation du nombre de Nusselt à la surface de la source de chaleur dans différentes conditions. Le nombre de Grashof varie de 10^3 à 10^6 , alors que le nombre de Prandtl est maintenu constant égale à 0.71 (air). Cette étude a considéré l'effet de divers rapports d'aspect ($A=H/W$), variant de 0.5 à 1, et des angles d'inclinaison de l'enceinte variant de 0° à 30° sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement dans l'enceinte considérée.

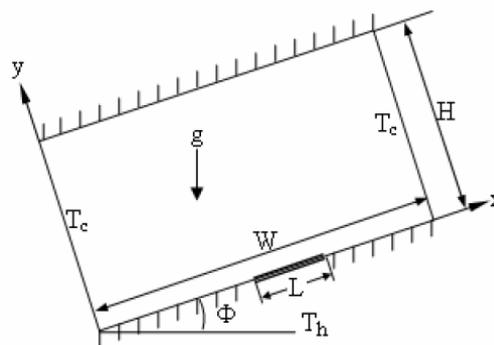


Figure 1.18 : Schéma de la cavité rectangulaire inclinée

Saha et al. [65].

Nguyen et al. [66] ont considéré le même problème, dont il est question, à la différence près que la cavité est remplie d'un nano fluide et que la partie chauffée est soumise à un flux de chaleur constant (voir figure (1.19)). Une large gamme du nombre de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq 10^7$), de la fraction de volume solide des nanoparticules ($0 \leq \phi \leq 0.2$), de longueurs ($0.2L \leq B \leq 0.8L$), et de l'emplacement de sources de chaleur ($0.2L \leq D \leq 0.5L$) ont été considérés. Les effets de ces différents paramètres sur les champs de l'écoulement et de température ainsi que les caractéristiques de transfert de chaleur ont été étudiés en considérant divers nano fluides à base d'eau en incluant les nanoparticules de Cu, Ag, Al_2O_3 et du TiO_2 .

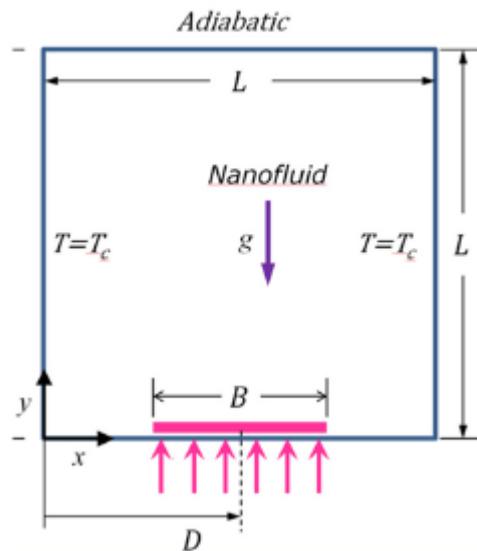


Figure 1.19 : Schéma de la cavité.

Nguyen et al. [66].

Une variante du problème précède, présenté par la figure (1.20), est rapportée par Bouhelal et al. [67]. Dans ce cas-ci la paroi supérieure est soumise à une température froide et la source chaude est localisée soit au milieu soit à gauche de la paroi inférieure.

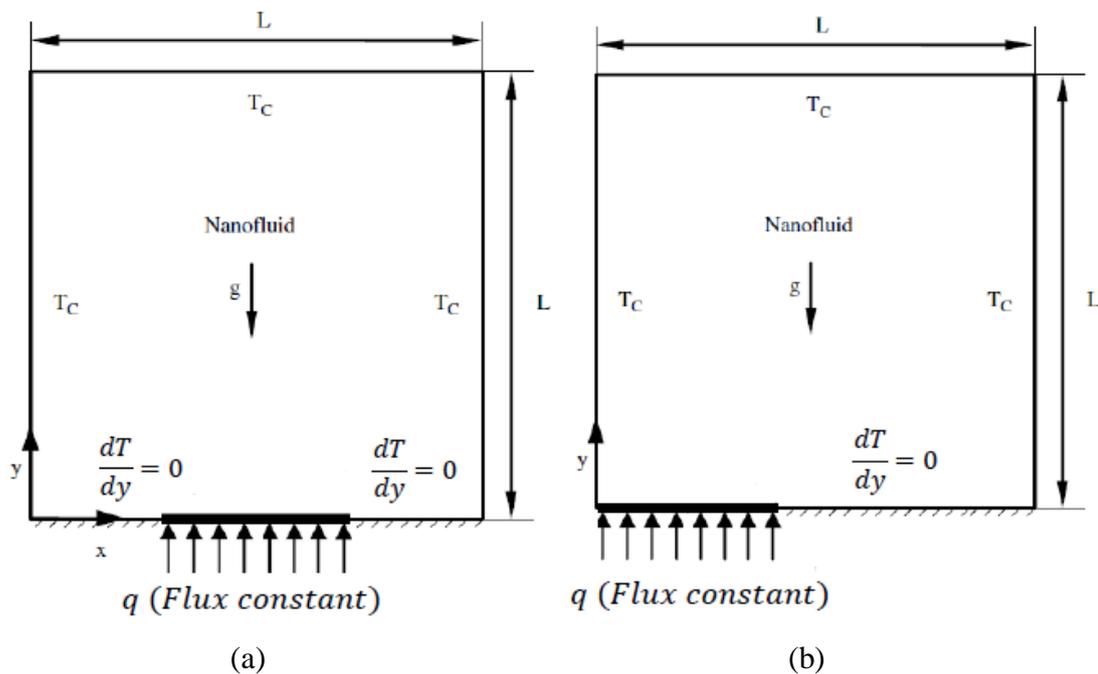


Figure 1.20 : Description géométrique du problème, (a) source localisée au milieu,

(b) source circonscrite à gauche.

Bouhelal et al [67].

Notons, enfin que **Kasaeian et al. [68]** à travers leur article de synthèse (publié en 2017), viennent résumer les travaux les plus récents concernant les écoulements en régime de convection naturelle au sein de différentes formes de cavités remplis de nano fluides.

Le comportement de fluides non newtonien se produisant dans la même configuration géométrique (cf. figure (1.21)) a été étudié par **Raisi [69]**. L'étude rapporte les effets de paramètres pertinents tels que le nombre de Rayleigh, l'indice de la loi de puissance de la viscosité du fluide, la longueur de la source de chaleur et son emplacement sur la performance thermique de la cavité.

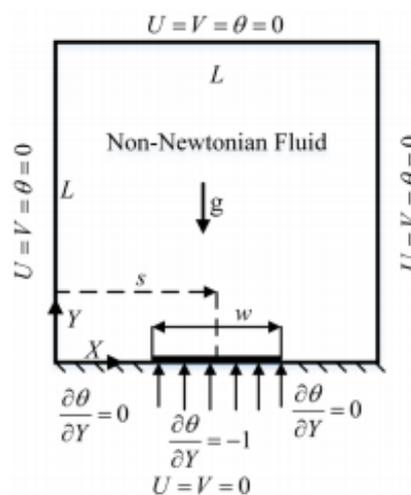


Figure 1.21 : Modèle physique et conditions aux limites dans la cavité carrée.

Raisi [69].

Jusqu'à présent seules les cavités partiellement chauffées par le bas ont été abordées. Des cavités entièrement chauffées par le bas ont également fait l'objet de quelques travaux comme par exemple :

Corcione [70] qui a étudié numériquement la convection naturelle laminaire dans des enceintes rectangulaires 2-D remplies d'air, chauffées par le bas et refroidies par le haut, pour une grande variété de conditions limites thermiques au niveau des parois latérales. Les équations régissant le transfert de masse, de quantité de mouvement et d'énergie ont été discrétisées en utilisant la méthode des volumes finis basée sur l'algorithme SIMPLER. Des simulations numériques sont effectuées pour plusieurs valeurs du rapport d'aspect (largeur/hauteur) de l'enceinte dans la gamme comprise entre 0.66 et 8, et du nombre de Rayleigh basé sur la hauteur de la cavité dans la gamme comprise entre

10^3 et 10^6 , dont l'influence sur les modèles d'écoulement, les distributions de température et les taux de transfert de chaleur sont analysés et discutés. Des comparaisons entre les différentes configurations thermiques considérées sont rapportées. Les résultats de taux de transfert de chaleur obtenus sont exprimés par des équations de corrélation.

Basak et al. [71] qui ont examiné une étude numérique, basée sur la méthode des éléments finis de Galerkin, relative à l'écoulement de la convection naturelle laminaire stationnaire dans une cavité carrée dont la paroi inférieure est soumise à une température uniforme et non uniforme, tandis que la paroi supérieure est considérée adiabatique, alors que les parois verticales sont maintenues à une température constante froide (Figure (1.22)). La procédure numérique a été étendue pour une large gamme des nombres de Rayleigh (Ra) compris entre 10^3 et 10^5 et des nombres de Prandtl compris entre 0.7 et 10. Les résultats obtenus montrent qu'un échauffement non uniforme de la paroi inférieure produit des taux de transfert de chaleur plus élevés au centre de la paroi inférieure que le cas d'un échauffement uniforme pour tous les nombres de Rayleigh. Cependant, les valeurs de nombre de Nusselt moyen indiquent des taux de transfert de chaleur globalement plus bas pour le cas d'un échauffement non uniforme. Des nombres de Rayleigh critiques ont été obtenus pour des cas de transfert de chaleur dominés par la conduction et ceux dominés par la convection. Des corrélations de loi de puissance entre le nombre de Nusselt moyen et le nombre de Rayleigh sont présentées.

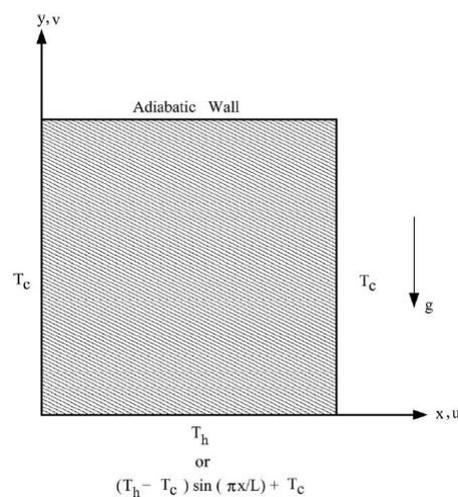


Figure 1.22 : Schéma de la cavité carrée

Basak et al. [71].

Basak et **Chamkha** [72] qui ont reconsidéré la même configuration géométrique (voir figure (1.23)) sauf que cette fois ci la cavité est remplie de nano fluides.

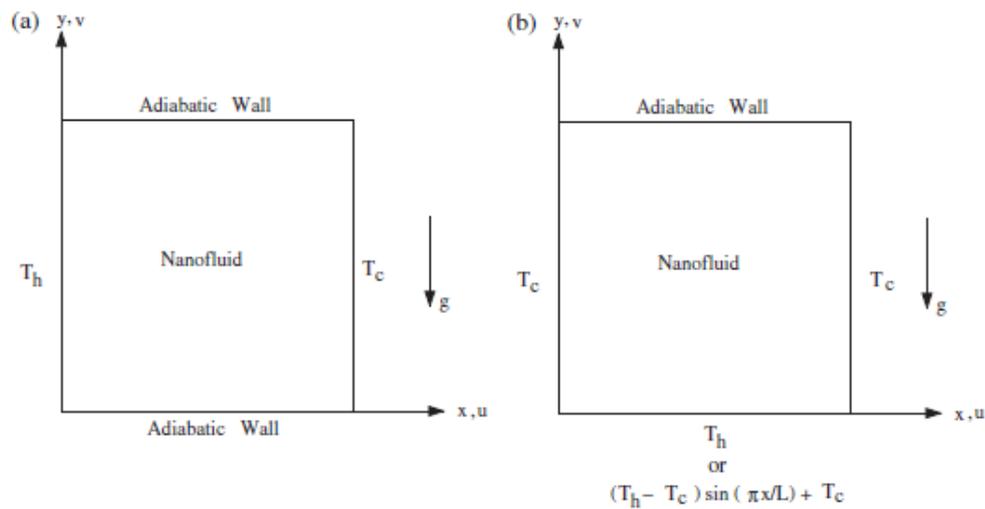


Figure 1.23 : Schéma de la cavité carrée
Basak et **Chamkha**. [72].

Aswatha et **al.** [73] qui ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée à l'aide d'une procédure de calcul basée sur les volumes finis. La cavité utilisée pour l'analyse d'écoulement et du transfert de chaleur a été délimitée par une paroi supérieure adiabatique, des parois verticales froides à une température constante T_c , tandis que la paroi inférieure horizontale qui soumise à des conditions aux limites convectives à des températures uniformes/sinusoidales/linéairement variables (cf. Figure (1.24)). Les résultats sont présentés sous forme de contours de courant, d'isothermes et de profils des nombres de Nusselt moyen pour des nombres de Rayleigh compris entre 10^3 et 10^7 et les rapports d'aspect (H/L) de 1 à 3. Il ressort de cette étude que la température uniforme au niveau de la paroi inférieure donne un nombre de Nusselt plus élevé par rapport aux cas de température sinusoidale ou linéaire. Le nombre de Nusselt moyen augmente de façon monotone avec le nombre de Rayleigh pour les rapports d'aspect considérés.

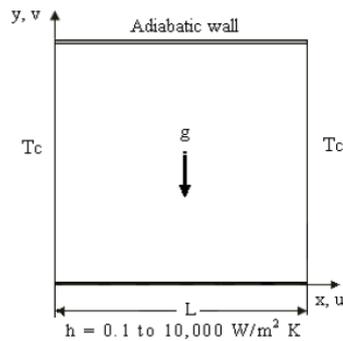


Figure 1.24 : Géométrie de la cavité

Aswatha et al. [73].

Actuellement (2016-2020) les écoulements en régime de convection laminaire et qui ne présentent aucune bifurcation dans des cavités dont la forme est singulières commencent à intéresser certains chercheurs. Nous citons, par exemple, celle de :

Gibanov et Sheremet [74] qui ont étudié numériquement la convection naturelle laminaire à l'intérieur d'une cavité cubique munie d'une source de chaleur locale de section triangulaire comme le montre la figure (1.25). Le modèle mathématique formulé en variables sans dimension telles que "fonctions de potentiel vectoriel - vecteur de vorticité" a été résolu par la méthode des différences finies avec des schémas de discrétisation du second ordre. Les champs de température tridimensionnels, les lignes de courant 2D et les isothermes pour une large gamme du nombre de Rayleigh variant de 10^4   10^6 ont été présentés en mettant en évidence les variations de l'écoulement des fluides et du transfert de chaleur.

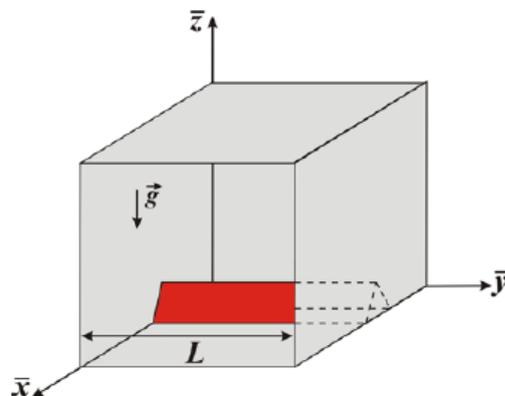


Figure 1.25 : G m trie de la cavité

Gibanov et Sheremet [74].

La fusion par convection naturelle dans des enceintes en 2D et 3D avec un chauffage local est étudiée numériquement par **Bondareva** et **Sheremet** [75]. La cavité comprend des parois froides verticales, des parois horizontales adiabatiques et une source de chaleur située sur la paroi adiabatique inférieure. La cavité est remplie d'un matériau à changement de phase (PCM) à l'état solide au début du processus (figure (1.26)). Pendant le chauffage de la source de chaleur, le PCM fond. La technique numérique utilisée est la même que celle citée dans l'article précédemment. Il a été constaté que le processus de fusion est plus intensif en 3D et que le taux de transfert de chaleur au niveau de la source de chaleur est plus élevé pour la cavité 2D que pour la cavité 3D.

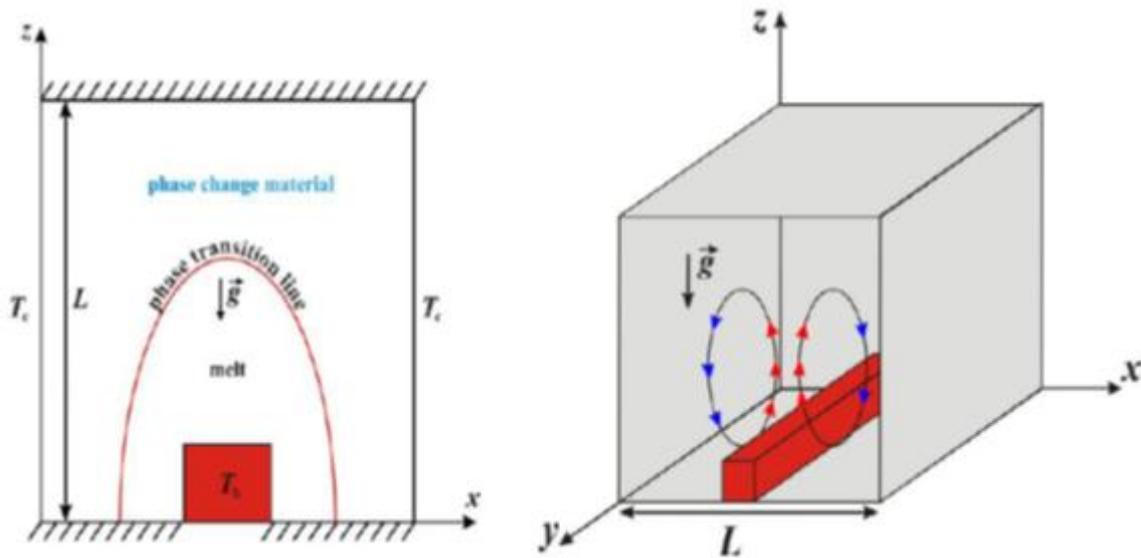


Figure 1.26 : Géométrie des cavités 2D et 3D

Bondareva et **Sheremet** [75].

Loenko et al. [76] qui ont investigué la convection thermo gravitationnelle, d'un fluide non newtonien décrit par un indice en loi de puissance de la viscosité du fluide tel que le d'Ostwald-de Waele, dans une cavité carrée fermée avec une source locale de production de chaleur volumétrique interne comme le montre la figure (1.27). Les effets du nombre de Rayleigh, de l'indice de la loi de puissance de la viscosité du fluide et du rapport de conductivité thermique sur le transfert de chaleur et de la structure de l'écoulement sont examinés.

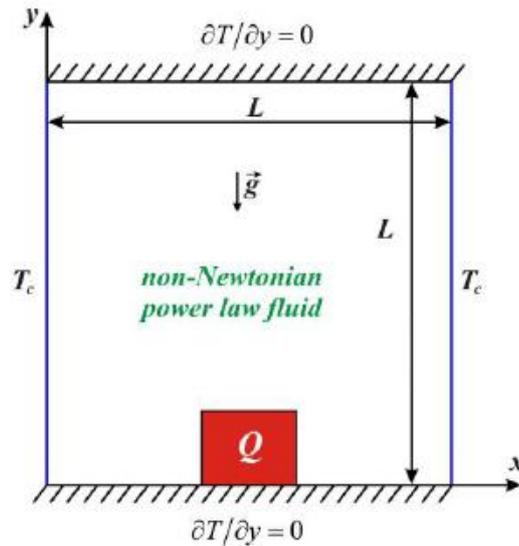


Figure 1.27 : Géométrie du domaine physique

Loenko et al. [76].

Aich [77] qui a étudié numériquement l'écoulement des fluides en régime de convection naturelle dans un capteur solaire triangulaire tridimensionnel chauffé par sa paroi inférieure ondulée, refroidi sur ses parois inclinées alors que les parois verticales sont supposées être thermiquement isolées, comme le montre la figure (1.28). Les résultats sont rapportés en termes de trajectoires des particules, d'iso-surfaces de la température, de l'amplitude de la vitesse et du nombre de Nusselt moyen. Il a été constaté que la structure des écoulements est sensible à la valeur de Rayleigh et que le transfert de chaleur est amélioré grâce à l'augmentation de ce paramètre.

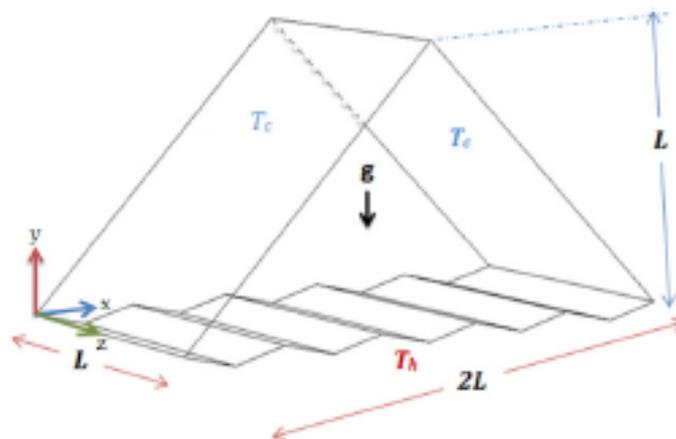


Figure 1.28 : Géométrie de la cavité triangulaire 3D.

Aich [77].

Krishne Gowda et al. [78] qui ont considéré une enceinte trapézoïdale avec une paroi inférieure chauffée discrètement, une paroi supérieure adiabatique et des parois inclinées soumises à une température froide et constante. Le code commercial basé sur le volume fini "ANSYS-FLUENT" est utilisé pour la résolution du modèle mathématique. Les simulations numériques couvrent divers nombres de Rayleigh allant de 10^3 à 10^6 , une longueur non dimensionnelle de la source chaude allant de 0.2 à 0.8 et un nombre de Prandtl de 0.7. Les résultats sont donnés sous la forme de la fonction de courant, du profil des températures et du nombre de Nusselt. Ils montrent que le nombre de Nusselt moyen augmente de façon monotone avec l'augmentation du nombre de Rayleigh et de la longueur de la source de chaleur. La variation des nombres de Nusselt locaux et moyens est plus significative pour une plus grande longueur de chauffage que pour une plus petite. Les corrélations de transfert de chaleur utiles pour les problèmes pratiques de conception ont été prédites.

Enfin **Bouras et al. [79]** qui ont considéré une cavité semi-elliptique dont la paroi horizontale est chauffée à une température constante et la paroi semi elliptique est à température froide comme le montre la figure (1.29). Ici aussi le code commercial basé sur le volume fini "ANSYS-FLUENT" est utilisé pour la résolution du modèle mathématique. L'effet du nombre de Rayleigh sur les champs de vitesse et de température ainsi que sur le nombre de Nusselt ont été considérés. Les résultats montrent que pour de faibles nombres de Rayleigh le transfert à l'intérieur de l'anneau est essentiellement contrôlé par le processus de conduction. Quand le nombre de Rayleigh augmente ($Ra \geq 10^4$), le rôle de la convection devient prédominant et le taux de transfert de chaleur augmente également.

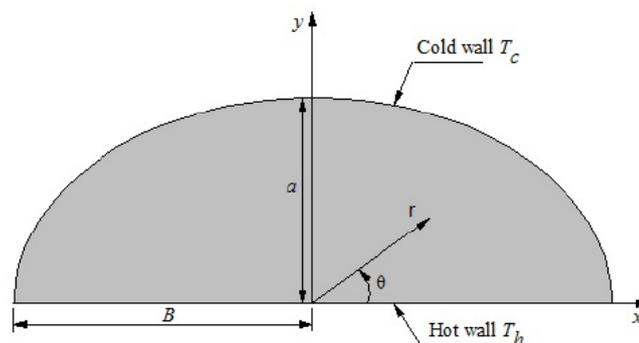


Figure 1.29 : Présentation schématique du modèle physique
Bouras et al. [79].

2.3 Convection mixte

Bien que le cas de la convection mixte soit fréquent dans des configurations industrielles (refroidissement de composants électroniques par exemple), il a reçu jusqu'à présent moins d'intérêt que celui de convection naturelle.

2.3.1 Convection mixte avec bifurcation

Le transfert de chaleur par la convection mixte dans une cavité carrée bidimensionnelle est étudié numériquement par **Ovando Chacón (G.E.)** et **Ovando Chacón (S.L.)** [80]. Les coins de cette cavité sont maintenus à une température chaude T_h , tandis que la partie centrale des parois verticales sont soumises à une température froide fixée T_c . Ces dernières se déplacent, vers le haut, avec une vitesse constante V_w . Par contre, dans la partie centrale des parois horizontales sont adiabatique comme le montre la Figure (1.30). Les résultats sont obtenus pour une gamme de nombres de Richardson de $0.1 \leq Ri \leq 10$ avec un nombre de Prandtl de 0.7. Les champs hydrodynamique et thermique, les profils de vitesse et les champs de l'énergie cinétique sont obtenus. Pour la gamme des nombres de Richardson étudiés, ils ont observé la formation de vortex développée par la convection forcée due au mouvement de cisaillement des parois verticales et par les forces de flottabilité dues au gradient de température près des coins de la cavité. Pour $Ri = 0.1$, la symétrie axiale persiste car la formation de vortex est dominée par le mouvement des limites mobiles générant un vortex près de chaque paroi verticale. Lorsque le nombre de Richardson augmente, la symétrie axiale disparaît car la formation de vortex est dominée par le gradient de température générant un vortex près de chaque coin où se trouve la région chaude.

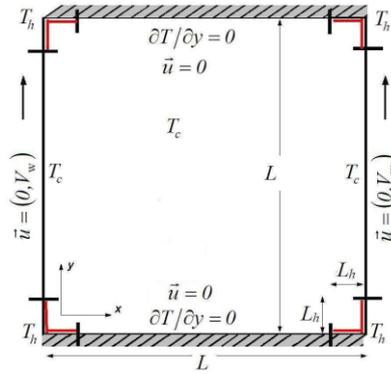


Figure 1.30 : Géométrie de la cavité carrée considérée et les conditions aux limites

Ovando Chacón (G.E.) et Ovando Chacón (S.L.) [80].

Dahdi et al. [81], ont considéré l'étude numérique de la convection mixte bidimensionnelle dans une cavité carrée remplie d'air. Les forces de cisaillement et de flottabilité ont été générées par un déplacement, vers le haut des parois latérales et par un chauffage partiel de la paroi inférieure de la cavité, comme le montre la figure (1.31). L'importance relative de la convection naturelle et forcée a été contrôlée par le nombre de Richardson (Ri), qui varie de 0.1 à 30. De multiples modes de solution convective, avec des schémas d'écoulement différents, ont été mis à jour. La dépendance de la solution par rapport aux conditions initiales a été établie. La transition entre les différents modes convectifs a été illustrée par la variation du nombre de Nusselt par rapport au nombre de Richardson. L'existence d'un phénomène d'hystérésis a également été démontrée.

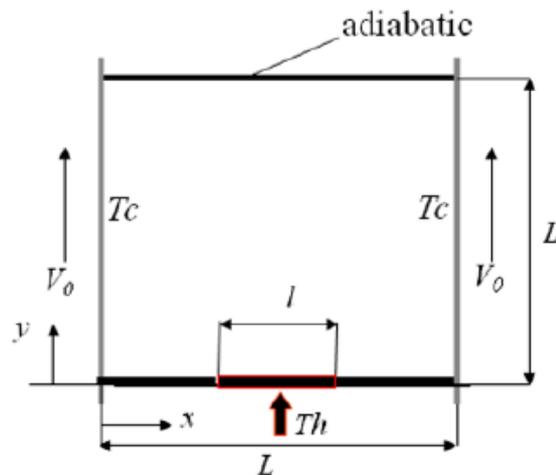


Figure 1.31 : Modèle physique.

Dahdi et al. [81].

Biswas et **Manna** [82] présentent le phénomène de convection mixte dans une enceinte remplie d'air et chauffé par le bas. Le mouvement ascendant et descendant des parois latérales et l'alternation du refroidissement entre les parois latérales et la paroi supérieure sont examinés. Tous les cas sont étudiés afin d'identifier la combinaison appropriée de mouvement des parois et de conditions thermiques pour une meilleure efficacité thermique en tenant compte des différents régimes de convection (Figure (1.32)). Les résultats révèlent, entre autre, que dans les cas 3 et 4 l'écoulement est parfaitement symétrique par rapport à l'axe vertical passant par le centre de la cavité alors que dans les cas 1 et 2 l'écoulement n'est plus symétrique par rapport à ce même axe.

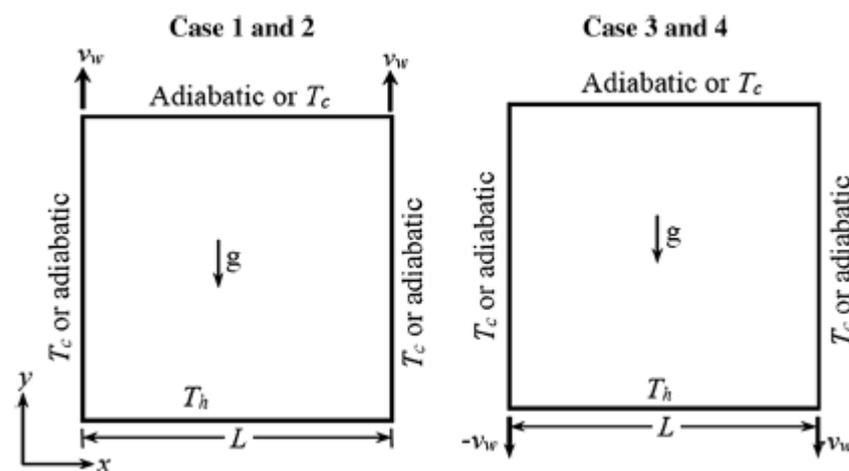


Figure 1.32 : Schéma du domaine de calcul avec les différentes conditions aux limites de vitesse et de température

Biswas et Manna [82].

Plus récemment (2019) **Eutamene et al.** [83] ont considéré une étude numérique des caractéristiques du transfert de chaleur par convection mixte laminaire transitoire dans une cavité carrée (2D) et cubique (3D) (voir figure (1.33)). Les parois latérales sont maintenues à une température froide constante et se déplacent vers le haut avec une vitesse constante. Une source de chaleur est située au centre de la paroi inférieure de la cavité et maintenue à une température élevée constante. Toutes les parties restantes de la cavité sont considérées comme adiabatiques. Le nombre de Richardson varie de 0.1 à 10 et la compétition entre les forces de convection naturelle et forcée peut amener l'écoulement à adopter, dans certaines conditions, des comportements complexes tels que la perte de symétrie, les bifurcations, etc. Les résultats obtenus ont montré que les valeurs critiques du nombre de Richardson qui caractérisent la transition de la convection forcée (deux cellules

symétriques) à la convection mixte (deux cellules asymétriques) se produisent à $Ri = 2.51$ et $Ri = 4.7$ pour les cas 3D et 2D, respectivement. Ensuite, la deuxième transition de la convection mixte à la convection naturelle (quatre cellules symétriques) se produit à $Ri = 6.29$ et $Ri = 7$ pour les mêmes cas 3D et 2D.

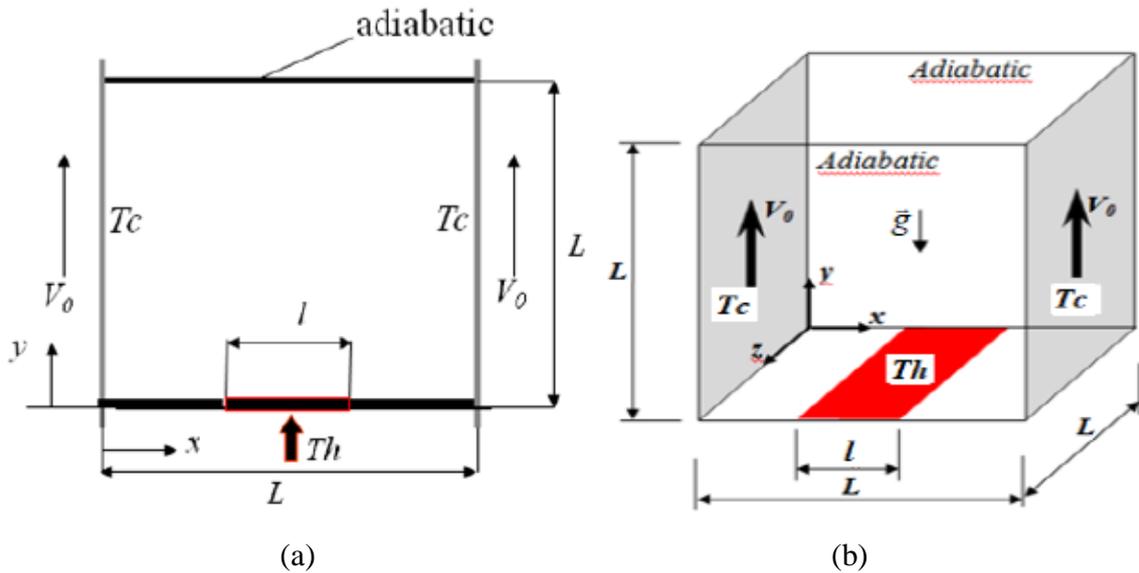


Figure 1.33 : Schéma de la cavité (a) cas 2D et (b) cas 3D.

Eutamene et al. [83].

2.3.2 Convection mixte sans bifurcation

Aydin et Yang [84], ont étudié numériquement le même problème (convection purement naturelle) déjà signalé dans la référence [56], (voir figure (1.34)). La seule différence dans ce cas est que les parois latérales se déplacent vers le bas avec une vitesse déterminée (convection mixte). Dans ces deux cas l'écoulement ne présente aucune perte de symétrie ni de bifurcations.

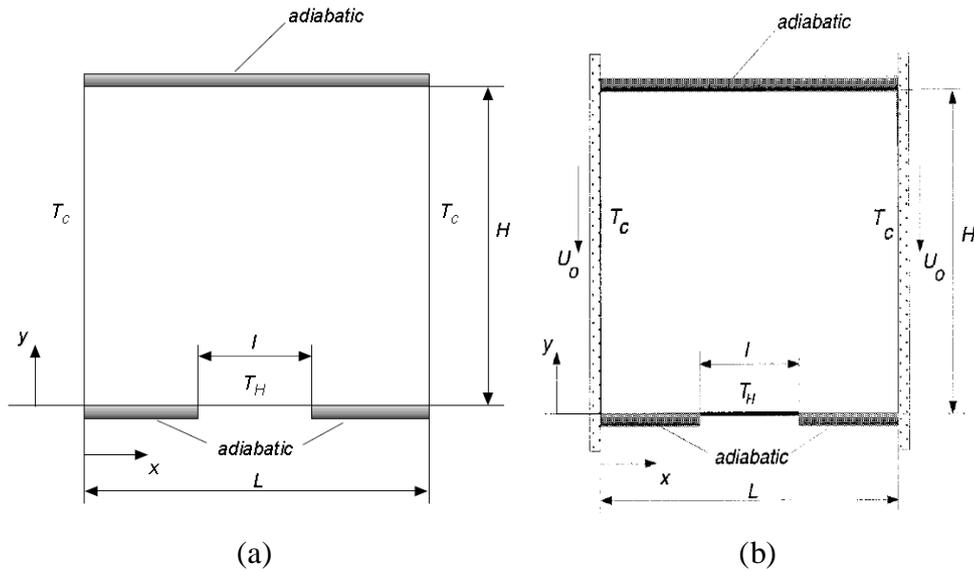


Figure 1.34 : Schéma du système physique
(a) Aydin et Yang [56] et (b) Aydin et Yang [84].

Guo et Sharif [85], ont reconsidéré le phénomène de la convection mixte dans la même configuration géométrique cité précédemment en imposant un flux de chaleur constant au lieu d'une température constante sur la partie chauffée située au milieu de la paroi inférieure comme le montre la figure (1.35). Les simulations numériques sont effectuées pour une gamme de nombres de Richardson allant de 0.1 à 10. L'influence du nombre de Richardson, de la longueur de la source de chaleur, de l'emplacement de la source de chaleur et du rapport d'aspect de la cavité sur la température maximale et le nombre de Nusselt à la surface de la source de chaleur est étudiée.

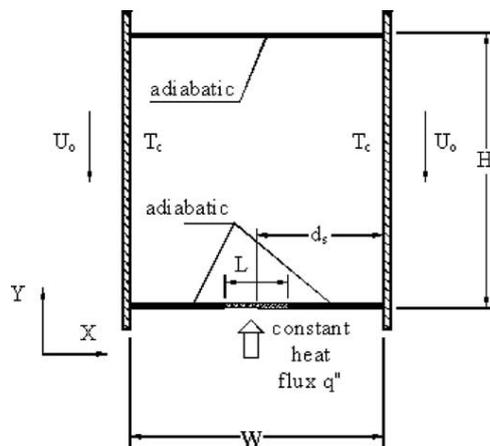
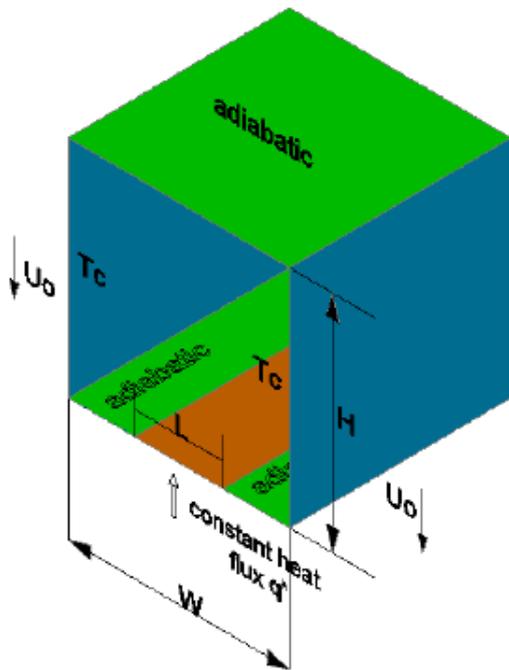
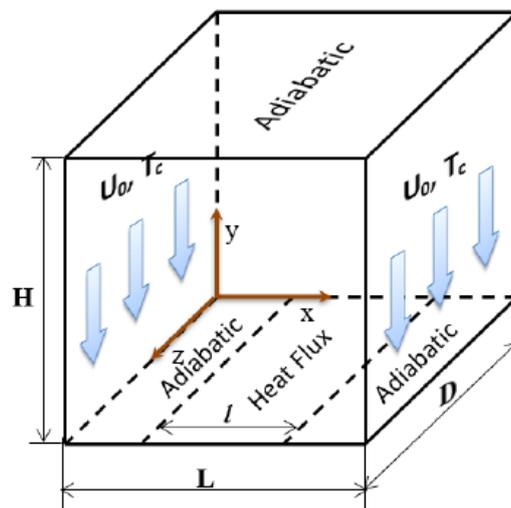


Figure 1.35 : Configuration du modèle physique
Guo et Sharif [85].

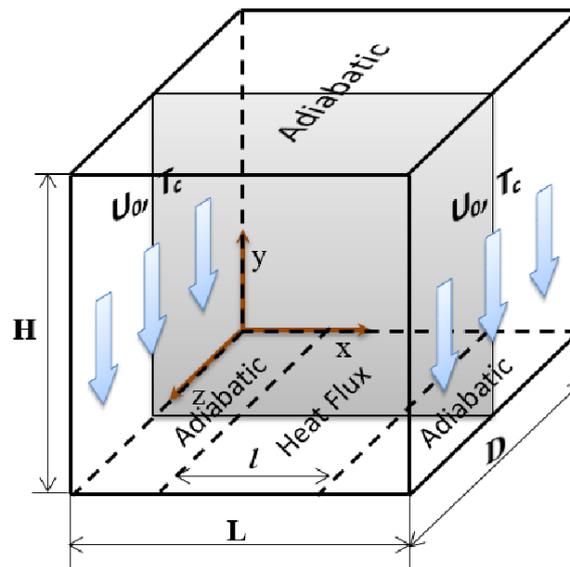
La nature complexe des phénomènes de convection mixte en régime turbulent dans une cavité carrée en trois dimensions a été rapportée par **Ali Khaleel Kareem Al-Khafaji [86]** dans sa thèse de doctorat soutenue en 2018. Le but de cette thèse consiste en l'amélioration des performances du transfert de chaleur grâce à l'utilisation de différents types de fluides, de configurations de domaines, de conditions limites ou de combinaisons de ceux-ci. Les configurations géométriques, qui concernent directement notre sujet, sont les mêmes que celles décrites précédemment avec pour seule différence la prise en compte de la troisième dimension et la turbulence. La discrétisation des différentes équations régissant le phénomène est basée sur la méthode des volumes finis et les modèles de turbulences utilisés sont ceux "URANS" (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes) et la "LES" (Large Eddy Simulation). Le nombre de Reynolds prend les valeurs suivantes : 5000, 10 000, 15 000 et 30 000. Les résultats obtenus concernent les champs dynamique, thermique ainsi que les caractéristiques de la turbulence. Dans le cadre de cette thèse, divers articles [87-89] ont été publiés mettant en valeur l'importance du travail. Les configurations géométriques considérées sont données par la figure (1.36).



(a) Kareem et Gao [87]



(b) Kareem et al. [88]



(c) Kareem et Gao [89]

Figure 1.36 : Configuration du modèle physique étudiée
Ali Khaleel Kareem Al-Khafaji [86].

Enfin pour compléter cette revue de la littérature nous invitons les lecteurs intéressés à se référer aux articles de synthèses publiés très récemment (2019-2020) et qui résument les principaux travaux portant sur la convection naturelle et mixte dans différentes configurations géométriques remplies de fluides newtoniens (**Mustafa et al. [90]**), non newtoniens (**Yang et Du [91]**) et de nano fluides (**Izadi et al. [92]**).

Le présent travail est basé sur le même problème que celui de **Guo et Sharif [85]**, cependant nous avons inversé le sens de déplacement des parois latérales pour créer une compétition entre ces deux forces (les forces provoquées par la convection mixte de la partie chauffée et le déplacement des parois verticales de la cavité). Il a été observé une perte de symétrie et un changement radical dans l'écoulement à l'intérieur de la cavité. A notre connaissance, ce schéma d'écoulement dans cette configuration géométrique n'a jamais été rapporté dans la littérature. Elle a pour objet de déterminer l'influence relative des deux modes de force (force de flottabilité et de cisaillement) sur le transfert de chaleur induit lorsque le fluide est en mouvement.

3. CONCLUSION

D'après cette revue bibliographique toutes les études citées ci-dessus, relatives à la convection naturelle, montrent que si les parois latérales de la cavité sont adiabatiques, les instabilités, la perte de symétrie et les phénomènes de bifurcation dépendent principalement des nombres de Rayleigh, du rapport d'aspect et des angles de l'enceinte. Au contraire, lorsque ces parois sont isothermes, l'écoulement du fluide ne présente aucune instabilité, perte de symétrie ou bifurcations. Dans le cas de la convection mixte lorsqu'une différence de température est imposée, l'effet du flux dû à la flottabilité et au déplacement de la paroi rend l'analyse encore plus complexe. L'interaction de l'écoulement cisailé dû au mouvement de la paroi et de l'écoulement de la convection naturelle dû à l'effet de flottabilité est jusqu'à présent un domaine de recherche fondamental et nécessite une analyse complète pour comprendre la physique de l'écoulement et du transfert thermique résultant. **Aydin et Yang [84]** et **Guo et Sharif [85]** ont examiné les études numériques de la convection laminaire mixte dans une cavité 2D avec une paroi supérieure adiabatique et des parois verticales froides se déplaçant vers le bas à une vitesse constante. Une source de chaleur est placée au centre de la paroi inférieure. **Guo et Sharif [85]** ont imposé un flux thermique constant alors qu'**Aydin et Yang [84]** considéraient une paroi à température fixe et la partie restante de cette paroi est supposée être adiabatique. Les effets de la longueur de la source de chaleur et du nombre de Richardson ont été étudiés. Dans ces deux cas, les effets de la convection forcée et naturelle étant coopérants, ni instabilités ni rupture de symétrie ou bifurcation n'ont été observées.

La présente étude diffère de celle des deux auteurs cités précédemment en ce sens qu'ici la direction du déplacement des parois latérales est inversée créant ainsi une compétition entre la convection forcée et la convection naturelle de Rayleigh-Bénard. Par conséquent, il est intéressant d'établir le modèle d'écoulement et de prédire les différentes valeurs critiques du nombre de Richardson pour l'apparition de perte de symétrie et de bifurcations, si celles-ci sont effectivement présentes dans l'écoulement du fluide.

FORMULATION MATHEMATIQUE

1. INTRODUCTION

Les équations fondamentales régissant le transfert ou transport d'une entité arbitraire dérivent du principe général de conservation. Ce principe stipule que la variation dans le temps de cette entité, dans un volume de contrôle élémentaire quelconque, est équivalente aux flux nets convectifs et diffusifs entrant et sortant par la surface délimitant ce volume de contrôle plus les taux nets de sa création et/ ou de sa destruction dans ce même volume. Cette entité peut représenter la masse, la quantité de mouvement, l'énergie etc. Dans ce chapitre nous allons rappeler, dans un premier temps, les différentes équations mathématiques permettant la résolution du problème considéré. Nous présenterons par la suite la description du problème considéré dans cette étude ainsi que le système d'équations sans dimensions établi en utilisant la formulation « fonction de courant (ψ) – vorticité (ω) » pour la détermination des champs dynamique et thermique de cet écoulement dans la configuration géométrique choisie.

2. MODELE MATHEMATIQUE

L'écoulement d'un fluide en régime de convection (naturelle ou forcée) reste gouverné par les équations classiques de Navier-Stokes, (i.e) ; la conservation de la masse totale et le théorème des quantités de mouvement, associées à l'équation de transfert de la chaleur. La différence essentielle, dans la modélisation d'un problème de la convection naturelle ou mixte, concerne l'apparition d'une nouvelle force volumique causée par des gradients de températures qui créent une des différences de la masse volumique (densité) au sein du fluide, au repos ou en écoulement, dont il faut tenir compte dans la conservation de la quantité de mouvement. Par conséquent il faut procéder à une adaptation des équations classiques citées plus haut afin d'introduire cette nouvelle force volumique.

2.1 Equations de base

Les trois principes physiques fondamentaux de la conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont largement utilisés comme modèles mathématiques

pour décrire les phénomènes physiques des écoulements des fluides. Les équations générales sous leurs formes vectorielles sont donc :

2.1.1 Conservation de la masse

Cette loi stipule qu'au cours de son déplacement la masse d'un fluide reste constante. Ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \rho \vec{V} = 0 \quad (2.1)$$

2.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Cette loi stipule que le taux de variation de quantité de mouvement dans un volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées. Ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} (\rho \vec{V}) = \rho \vec{F}_g - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \bar{\tau} \quad (2.2)$$

2.1.3 Conservation de l'énergie

Cette loi stipule que l'énergie totale d'un système isolé est invariant au cours du temps ce qui se traduit par :

$$\frac{\partial (\rho C_p T)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho C_p \vec{V} T) = \vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \beta T \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V} \vec{\nabla} p \right) + \varphi \quad (2.3)$$

Dans ces équations :

\vec{V} : est le vecteur de vitesse.

$\vec{\nabla}$: est l'opérateur nabla défini comme suit : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}$

ρ : est la masse volumique.

t : est le temps.

\vec{F}_g : est la force volumique.

p : est la pression.

$\vec{\nabla} \bar{\tau}$: est le tenseur des contraintes visqueuses donné par l'expression suivante :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\tau} = \mu(\vec{\nabla}^2 \vec{V} + \frac{1}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V})) \quad (2.4)$$

μ : est la viscosité dynamique du fluide.

k : est la conductivité thermique.

C_p : est la chaleur spécifique à pression constante.

$\varphi = \sum_{i,j} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$: est la dissipation visqueuse et représente la puissance des

forces de viscosité dans le fluide.

Les détails de la méthodologie sont rapportés dans des ouvrages de référence [93] et [94].

2.2 Hypothèses simplificatrice

Ces hypothèses ont été largement utilisées pour l'étude des phénomènes de la convection mixte dans des domaines très variés. Elles ont été étudiées en détail par de nombreux auteurs dans le but de simplifier la formulation mathématique des équations de conservation couplées. Mais la principale d'entre elles qui concerne directement la modélisation du phénomène de la convection a été attribuée à **Boussinesq** [95], mais elle a été présentée au paravent par **Oberbeck** [96].

2.2.1 Hypothèse d'Oberbeck-Boussinesq

Le mouvement du fluide en régime de convection naturelle est produit par le changement de la masse volumique ayant pour cause une différence de température au sein du fluide. La supposition de la masse volumique constante dans les équations Navier – Stokes ne peut donc être faite dans l'analyse des problèmes de la convection qu'elle soit naturelle, forcée ou mixte. Pour surmonter cet obstacle on fait appel à l'hypothèse d'Oberbeck – Boussinesq. L'approche de base dans cette approximation est de considérer la masse volumique comme constante dans l'équation de continuité et le terme d'inertie de l'équation de quantité de mouvement, mais elle change avec la température dans le terme de pesanteur (force volumique \vec{F}_g figurant dans l'équation de la conservation de la quantité de mouvement). En d'autres termes dans les cas les plus courants de convection, les variations de masse volumique au sein du fluide sont faibles et les vitesses d'écoulement

sont assez lentes. Il est alors possible de considérer le fluide incompressible. Les variations de ρ sont négligées partout, excepté dans la force de gravité à l'origine du phénomène de convection. Cette variation est donnée par son développement au premier ordre par rapport à la température :

$$\rho(T) = \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.5)$$

Où : ρ_0 est la masse volumique de référence du fluide à la température T_0 . Le paramètre β est le coefficient d'expansion thermique exprimé par :

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P \quad (2.6)$$

2.2.2 Les autres hypothèses

Les hypothèses complémentaires sont classiques et largement évoquées dans les études relatives à l'étude des écoulements en mécanique des fluides. Elles peuvent être énoncées comme suit :

- 1- L'écoulement est bidimensionnel, laminaire, supposé newtonien et incompressible.
- 2- Le transfert de chaleur par rayonnement est négligeable.
- 3- La chaleur générée par la dissipation visqueuse φ est négligeable.
- 4- Les effets de dilatation thermique sont négligés devant les autres termes de l'équation de l'énergie.
- 5- Le travail, induit par les forces visqueuses et de pression, est négligeable.

3. DESCRIPTION DU PROBLEME CONSIDERE

Le problème considéré est schématisé sur la figure (2.1). Il s'agit d'une cavité carrée dont une partie du fond de longueur égale au quatre cinquième de celle de la cavité L est soumise à un flux de chaleur constant q'' . Les parois latérales de cette cavité sont maintenues à une température constante froide et se déplacent avec une vitesse fixée V_0 vers le haut. Toutes les autres parties de la cavité sont isolées thermiquement. L'écoulement dans cette cavité est induit par la force de cisaillement résultant du mouvement des parois latérales combinée à la force de flottabilité résultant de la source de

chaleur. Un mécanisme illustrant le déplacement des parois latérales propre à cette configuration géométrique se trouve dans l'article de Roy et al. [97].

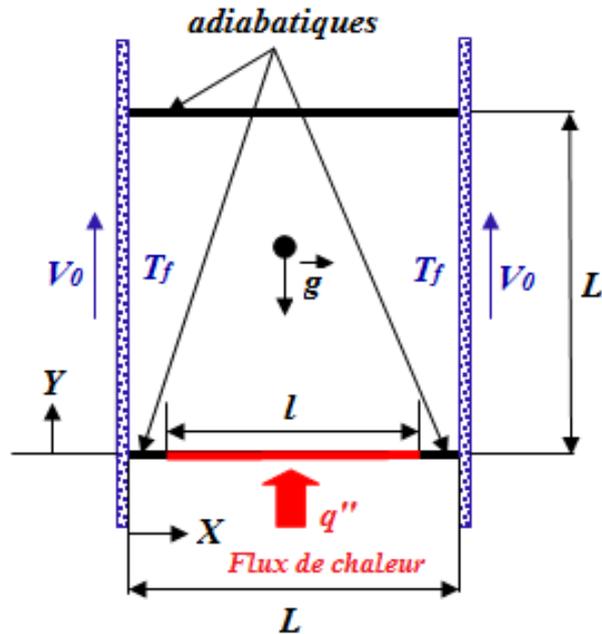


Figure 2.1: Géométrie de la cavité carrée du problème considéré.

4. EQUATIONS DU PROBLEME

4.1 Equations vectorielles dimensionnelles

Les équations de conservation couplées décrivant l'écoulement et le transfert de chaleur sont les équations non linéaires de Navier-Stokes. En tenant compte des hypothèses simplificatrices citées précédemment, ces équations (en présence de la source de chaleur) se réduisent à :

4.1.1 Conservation de la masse

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.7)$$

4.1.2 Conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} (\rho \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{V} - \vec{g} \beta (T - T_f) \quad (2.8)$$

4.1.3 Conservation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \alpha \Delta T \quad (2.9)$$

Dans ces équations, T_f est la température froide des parois latérales, α est la diffusivité thermique et Δ est l'opérateur Laplacien.

4.2 Equations dans le repère cartésien

La projection de ces dernières équations dans un repère cartésien bidimensionnel donne respectivement :

4.2.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.10)$$

u et v sont les composantes du vecteur vitesse \vec{V} dans les directions x et y respectivement.

4.2.2 Equation de la quantité de mouvement

➤ Equation de quantité de mouvement suivant x

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial (p-p_0)}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.11)$$

➤ Equation de quantité de mouvement suivant y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial (p-p_0)}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_f) \quad (2.12)$$

4.2.3 Equation de l'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.13)$$

5. CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES

Les conditions aux limites ont été précisées sur la figure décrivant le problème étudié. Nous allons détailler dans ce qui suit ces conditions initiales et aux limites, nécessaires à la résolution complète du problème.

5.1 Conditions initiales

$$0 < x < L \quad \text{et} \quad 0 < y < L \quad \Rightarrow \quad T = T_f$$

5.2 Conditions aux limites

La température dimensionnelle froide de la paroi gauche et droite est constante et égale à T_f . La partie chaude de la paroi inférieure, de longueur " l " est soumise à un flux de chaleur fixé. La condition d'adiabacité est adoptée pour toutes les autres parois (supérieure et inférieure). Les vitesses des parois gauche et droite sont uniformes et constantes et sont égales à V_0 .

Ces différentes conditions peuvent être résumées par les expressions suivantes :

➤ **Sur la paroi supérieure**

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 ; u = v = 0 \quad \text{pour :} \quad 0 < x < L \quad \text{et} \quad y = L$$

➤ **Aux niveaux des parois droite et gauche**

$$T = T_f ; u = 0 \quad \text{et} \quad v = +V_0 \quad \text{pour :} \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = L \end{cases} \quad \text{et} \quad 0 < y < L$$

➤ **Au niveau de la partie source de chaleur sur la paroi inférieure**

$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{q''}{k} \quad \text{et} \quad u = v = 0 \quad \text{pour :} \quad 0.1 L \leq x \leq 0.9 L \quad \text{et} \quad y = 0$$

➤ **Aux niveaux des parties adiabatiques de la paroi inférieure**

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad \text{et} \quad u = v = 0 \quad \text{pour :} \quad \begin{cases} 0 < x < 0.1 L \\ 0.9 L < x < L \end{cases} \quad \text{et} \quad y = 0$$

6. ADIMENSIONNALISATION DES EQUATIONS

Dans le système d'équations précédent figurent de nombreuses entités physiques qu'il est possible de les regrouper en les normalisant par rapport à certaines caractéristiques propres à chacun des problèmes étudié. L'intérêt principal de cette approche est d'obtenir un système d'équations adimensionnalisées dont le but est de :

- ✓ Faciliter la comparaison entre des écoulements similaires.
- ✓ Servir de guide pour les études expérimentales.
- ✓ Gagner un temps appréciable lors de la résolution numérique de ces systèmes d'équations.

Les caractéristiques de références adoptées dans cette étude ainsi que les variables transformées sont données par les relations suivantes :

$$X = \frac{x}{L}; Y = \frac{y}{L}; \tau = t \cdot \frac{V_0}{L}; U = \frac{u}{V_0}; V = \frac{v}{V_0}; P = \frac{(p - p_0)}{\rho V_0^2}$$

$$\theta = \frac{T - T_F}{\Delta T} \text{ avec : } \Delta T = q'' \cdot \frac{L}{k}$$

En introduisant les grandeurs sans dimensions dans les équations de conservation de masse (2.10), de quantité mouvement [(2.11) et (2.12)] et d'énergie (2.13), on obtient respectivement :

6.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{2.14}$$

6.2 Equations de quantité de mouvement

6.2.1 Suivant la direction X

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \tag{2.15}$$

6.2.2 Suivant la direction Y

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \theta \tag{2.16}$$

6.3 Equation de l'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Re.Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.17)$$

Les équations (2.14), (2.15), (2.16), et (2.17) forment le système d'équations qui régit notre problème. Nous remarquons qu'il existe des points communs importants entre les différentes équations. Toutes ces équations se ramènent à une seule équation générale traduisant le transfert (transport) d'une entité physique quelconque \emptyset qui peut être exprimée de la manière suivante :

$$\underbrace{\frac{\partial \emptyset}{\partial \tau}}_{\text{Terme temporel}} + \underbrace{U \frac{\partial \emptyset}{\partial X} + V \frac{\partial \emptyset}{\partial Y}}_{\text{Terme convectif}} = \underbrace{\Gamma_{\emptyset} \left(\frac{\partial^2 \emptyset}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \emptyset}{\partial Y^2} \right)}_{\text{Terme diffusif}} + \underbrace{S_{\emptyset}}_{\text{Terme source}} \quad (2.18)$$

Où :

\emptyset : est la variable dépendante arbitraire.

Γ_{\emptyset} : est le coefficient de diffusion.

S_{\emptyset} : est le terme source.

Après identification avec le système d'équations précédent, nous pouvons établir le tableau (2.1) dans lequel nous donnons pour chaque équation le coefficient de diffusion et le terme source relatif à la variable indépendante \emptyset .

Tableau 2.1 : Identification des équations par rapport à l'équation générale de transport.

Equation		\emptyset	Γ_{\emptyset}	S_{\emptyset}
Continuité		1	0	0
Quantité de mouvement	Suivant X	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial X}$
	Suivant Y	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{Gr}{Re^2} \theta$
Energie		θ	$\frac{1}{Re.Pr}$	0

Il est à noter que l'avantage de cette forme générale de l'équation traduisant le transfert (transport) d'une entité physique quelconque Φ réside dans la facilité de son implémentation avec un langage de programmation dans le but de sa résolution numérique.

7. PARAMETRES DE CONTROLE DU PROBLEME

L'adimensionnalisation des équations de conservation a permis d'obtenir les nombres adimensionnels, qui caractérisent l'écoulement du fluide et le transfert de chaleur à l'intérieur des cavités.

7.1 Nombre de Grashof

C'est un nombre sans dimension, utilisé en mécanique des fluides pour caractériser la convection naturelle et mixte dans un fluide. Il correspond au rapport des forces de gravité sur les forces visqueuses. Nous le définissons par :

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2}$$

Où :

g : L'accélération de pesanteur.

β : Le coefficient d'expansion thermique.

ΔT : La différence de température.

L : La hauteur dimensionnelle de la cavité.

ν : La viscosité cinématique.

7.2 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides. Il caractérise un écoulement, en particulier la nature de son régime (laminaire, transitoire, turbulent).

$$Re = V_0 \cdot \frac{L}{\nu}$$

Où :

V_0 : La vitesse du déplacement des parois latérales de la cavité.

7.3 Nombre de Prandtl

C'est un nombre adimensionnel qui représente le rapport entre la diffusion de la quantité de mouvement caractérisée par la viscosité cinématique (ν) et la diffusion de la chaleur caractérisée par la diffusivité thermique (α). Nous le définissons de la manière suivante :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$$

7.4 Nombre de Richardson

C'est un nombre sans dimension utilisé notamment en thermodynamique. Il représente le rapport entre l'énergie potentielle gravitationnelle d'une parcelle de fluide et son énergie cinétique : (énergie potentielle/énergie cinétique).

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad \text{ou encore} \quad Ri = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$$

En résumé ces différents paramètres sont définis par le tableau (2.2) suivant :

Tableau 2.2 : Signification des différents nombres adimensionnels.

Nombre adimensionnel	Définition	Signification
Nombre de Reynolds	$Re = V_0 \cdot \frac{L}{\nu}$	Compare les forces d'inertie et les forces visqueuses.
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	Compare la diffusion de la quantité de mouvement à celle de la chaleur.
Nombre de Grashof	$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2}$	Compare les forces de gravité et les forces visqueuses.
Nombre de Richardson	$Ri = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L}{\nu^2}$	Compare l'énergie potentielle

		gravitationnelle d'une parcelle de fluide devant son énergie cinétique.
--	--	---

8. FORMULATION FONCTION DE COURANT–VORTICITE

Dans le système d'équations présenté précédemment la pression n'est pas explicite et figure sous la forme de son gradient. Elle ne possède pas une équation explicite pour sa détermination, aussi plusieurs méthodes sont utilisées pour remédier à ce problème. Parmi celles-ci figure la formulation : « fonction de courant – vorticité ($\Psi - \Omega$) » qui permet d'éliminer complètement la pression des équations de conservation de la quantité de mouvement. Tous les détails concernant le passage du système d'équations originales au système d'équations exprimé en « fonction de courant – vorticité ($\Psi - \Omega$) » se trouvent dans la référence [98].

Les équations adimensionnelles permettant la détermination de la vorticité, de l'énergie et de la fonction du courant s'écrivent pour un écoulement bidimensionnel et incompressible :

8.1 Equation de la vorticité Ω

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (2.19)$$

8.2 Equation de l'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{Re.Pr} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2.20)$$

8.3 Fonction du courant

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (2.21)$$

Les vitesses de l'écoulement ainsi que la vorticité sont définies par les relations suivantes :

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}; \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}; \quad \Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (2.21)$$

Les équations de la vorticité et de l'énergie peuvent être mises sous la forme générale de l'équation de transport précédente (2.18) :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + U \frac{\partial \phi}{\partial X} + V \frac{\partial \phi}{\partial Y} = \Gamma_{\phi} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} \right) + S_{\phi} \quad (2.18)$$

L'équation de la conservation de la vorticité ayant remplacé les deux équations de la conservation de la quantité de mouvement, le coefficient de diffusion Γ_{ϕ} et le terme source S_{ϕ} sont donnés dans le tableau suivant :

Tableau 2.3 : Coefficients de diffusion et du terme source de l'équation de vorticité adimensionnelle.

Equation	ϕ	Γ_{ϕ}	S_{ϕ}
Equation de la vorticité	Ω	$\frac{1}{Re}$	$Ri \frac{\partial \theta}{\partial X}$

9. FORME ADIMENSIONNELLE DES CONDITIONS INITIALES ET AUX LIMITES

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable dépendante.

9.1 Conditions initiales

Dans un premier temps, le fluide est au repos et sa température adimensionnelle est nulle dans toute la cavité. Les conditions de températures sont connues sur les parois.

Ces conditions initiales sous forme adimensionnelles sont données par l'expression suivante :

$$0 < X < 1 \quad \text{et} \quad 0 < Y < 1 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0; \quad \Psi = 0 \quad \text{et} \quad \Omega = 0$$

9.2 Conditions aux limites

La température adimensionnelle de la paroi gauche et droite est constante et égale à 0. La partie chaude de la paroi inférieure est soumise à un flux de chaleur adimensionnel constant. La condition d'adiabacité est adoptée pour les autres parois (supérieure et inférieure). Les vitesses des parois gauche et droite sont uniformes et égale à 1.

Ces différentes conditions peuvent être résumées par les expressions suivantes :

➤ **Sur la paroi supérieure**

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0; U = V = 0 \quad \text{pour : } 0 < X < 1 \text{ et } Y = 1$$

➤ **Aux niveaux des parois droite et gauche**

$$\theta = 0; U = 0 \quad \text{et} \quad V = +1 \quad \text{pour : } \begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \end{cases} \text{ et } 0 < Y < 1$$

➤ **Au niveau de la partie source de chaleur sur la paroi inférieure**

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = -1 \quad \text{et} \quad U = V = 0 \quad \text{pour : } \frac{1-\varepsilon}{2} \leq X \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \text{ et } Y = 0$$

➤ **Aux niveaux des parties adiabatiques de la paroi inférieure**

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{et} \quad U = V = 0 \quad \text{pour : } \begin{cases} 0 < X < \frac{1-\varepsilon}{2} \\ \frac{1+\varepsilon}{2} < X < 1 \end{cases} \text{ et } Y = 0$$

La valeur de la fonction du courant Ψ est égale à 0 sur toutes les parois. La vorticité sur les parois solides ou mobiles est évaluée par un développement de Taylor de premier ordre de la fonction de courant Ψ . L'expression mathématique de cette condition sera développée dans le chapitre suivant.

La figure suivante résume toutes les conditions aux limites pour résoudre le système d'équations considéré dans cette étude.

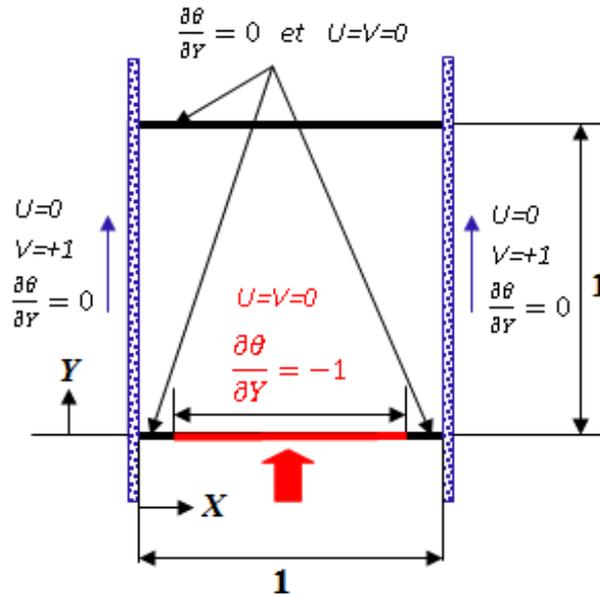


Figure 2.2 : Conditions aux limites adimensionnelles de problème considéré.

10. CALCUL DU COEFFICIENT DE TRANSFERT DE CHALEUR (NOMBRE DE NUSSELT)

C'est un nombre adimensionnel qui représente le rapport entre le flux thermique échangé par convection à celui échangé par conduction. Nous le définissons comme suit :

$$Nu(X) = \frac{h.L}{k}$$

Où :

h : Le coefficient d'échange convectif.

L : La longueur (hauteur) dimensionnelle de la cavité.

k : La conductivité thermique.

Le transfert de chaleur à partir de la paroi chaude est exprimé par le nombre de Nusselt moyen (Num) défini comme suit :

$$Num = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\frac{1-\varepsilon}{2}}^{\frac{1+\varepsilon}{2}} Nu(X) dX \tag{2.22}$$

Où :

$\varepsilon = \left(\frac{l}{L}\right)$: est la longueur adimensionnelle de la source de chaleur et $Nu(X)$ est le nombre de Nusselt local défini par :

$$Nu(X) = \frac{h.L}{k} = \frac{1}{\theta_w(X)} \quad (2.23)$$

$\theta_w(X)$: est la température adimensionnelle au niveau de la paroi chaude.

11. CONCLUSION

Le modèle mathématique du problème considéré dans cette étude a été établi, les conditions initiales et aux limites ont été précisées. Ce modèle est constitué d'équations différentielles à dérivées partielles (E.D.P) non-linéaires. La solution analytique de tels modèles n'est possible que dans certains cas très simplifiés. Le recours aux méthodes numériques s'avère indispensable pour la résolution de ce modèle. La méthode de discrétisation des équations basée sur les différences finies ainsi que la résolution des systèmes d'équations algébriques obtenus après discrétisation seront exposées en détail dans le chapitre suivant.

MODELISATION NUMERIQUE

1. INTRODUCTION

Le système d'équations établi dans le chapitre précédent est composé d'équations différentielles à dérivées partielles (E.D.P.) dont la résolution ne peut se faire que par des méthodes numériques. Toutes ces méthodes numériques n'ont pas pour but la détermination de la fonction temporelle et spatiale de la grandeur physique recherchée, mais la variation de la valeur discrète de celle-ci dans des points bien choisis (nœuds) du domaine considéré. La majorité des études concernant la résolution de tels systèmes fait appel à la méthode des différences finies, à celle des volumes finis ou bien à celle des éléments finis. D'excellents ouvrages sur ce sujet sont disponibles dans la littérature et nous citons, par exemples ceux d'**Ozisk** [99] et **Thomas** [100] pour la méthode des différences finies, ceux de **Versteeg** et **malalasekera** [101] et de **Patankar** [102] pour la méthode des volumes finis et enfin ceux de **Tinsley Oden et al.** [103] et de **Robert Cook et al.** [104] pour la méthode des éléments finis.

2. CHOIX DE LA METHODE DE DISCRETISATION

Parmi toutes les méthodes numériques utilisées pour la résolution des systèmes d'équations impliquant le transfert (transport) de la quantité de mouvement et de la chaleur, nous avons opté pour la méthode des différences finies. Celle-ci consiste à transformer le système d'équations différentielles à dérivées partielles en un système d'équations linéaires en se basant sur le développement de Taylor dont le but est de déterminer la valeur d'une entité physique quelconque en un point (nœud) en fonctions des valeurs de celle-ci en des points (nœuds) voisins (discrétisation).

3. MAILLAGE

Le maillage adopté à la configuration géométrique du problème étudié est conforme aux conditions sur les parois de la cavité et à la forme de celle-ci. Pour tenir compte des forts gradients des variables près des parois et de la partie chauffée de la cavité nous avons choisi un maillage structuré non-uniforme suivant les deux directions. Un schéma de ce maillage est montré dans la figure (3.1).

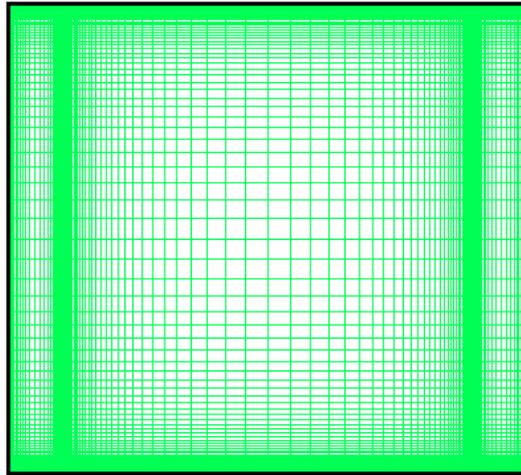


Figure 3.1 : Schémas du maillage non-uniforme de la cavité.

4. DISCRETISATION DES DIFFERENTES DERIVEES

Pour la discrétisation des dérivées partielles des équations gouvernantes, nous avons utilisé différents schémas d'ordre élevé tel que :

- ✓ Le schéma **Upwind du 3^{ème} ordre** pour les termes convectifs.
- ✓ Le schéma **centré du 4^{ème} ordre** pour les termes diffusifs ainsi que pour les dérivées partielles du premier ordre (terme source de l'équation de la conservation de l'énergie et les vitesses).
- ✓ La discrétisation du terme temporel utilise la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)** [105].

Les différents schémas de discrétisation des différents termes figurant dans les équations gouvernant le problème étudié sont détaillés dans ce qui suit. Par souci de clarté et de simplification, nous n'avons considéré que la discrétisation suivant X , la même démarche pourrait s'appliquer facilement suivant la direction Y .

4.1 Discrétisation temporelle $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right)$

Les équations de Navier-Stokes sont paraboliques par rapport à la variable « temps ». Nous adoptons donc pour la résolution numérique des équations déjà citées, une

approche où à chaque pas de temps (Δt), l'écoulement est calculé dans tout le domaine. En général les méthodes de type Runge-Kutta permettent d'obtenir des solutions plus précises que la plus part des autres méthodes. La recherche d'une plus grande précision se fait au détriment d'un temps de calcul plus important car la convergence de la solution est tributaire d'un pas de temps (Δt) très petit, souvent de l'ordre de 10^{-6} . Ce qui demande des ordinateurs de hautes performances.

L'équation générale de transport d'une entité physique quelconque φ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \underbrace{-U \frac{\partial \varphi}{\partial X} - V \frac{\partial \varphi}{\partial Y} + \Gamma_{\varphi} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \right) + S_{\varphi}}_{Rhs(\varphi)} \quad (3.1)$$

La méthode de *RK4* utilise trois paliers intermédiaires pour calculer la valeur de la variable φ au temps « n+1 » ($\varphi|_{i,j}^{n+1}$) dans un nœud quelconque i, j ; à partir de la valeur de la variable φ connue au temps « n » ($\varphi|_{i,j}^n$) selon les étapes suivantes [96] :

$$\varphi|_{i,j}^1 = \varphi|_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{2} \cdot Rhs(\varphi|_{i,j}^n) \quad (3.2)$$

$$\varphi|_{i,j}^2 = \varphi|_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{2} \cdot Rhs(\varphi|_{i,j}^1) \quad (3.3)$$

$$\varphi|_{i,j}^3 = \varphi|_{i,j}^n + \Delta \tau \cdot Rhs(\varphi|_{i,j}^2) \quad (3.4)$$

$$\varphi|_{i,j}^{n+1} = \varphi|_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{6} \cdot \{Rhs(\varphi|_{i,j}^n) + 2 \cdot Rhs(\varphi|_{i,j}^1) + 2 \cdot Rhs(\varphi|_{i,j}^2) + Rhs(\varphi|_{i,j}^3)\} \quad (3.5)$$

4.2 Discrétisation du Terme convectif ($U \frac{\partial \varphi}{\partial X}$)

À cause de leur non-linéarité les termes convectifs soulèvent des difficultés quant à leurs discrétisations surtout lorsqu'il existe des zones de recirculation au sein du fluide en écoulement. Parmi tous les schémas de discrétisation proposés dans la littérature nous avons choisi le schéma « Upwind » du troisième ordre de Kawamura et al. [106]. Le terme convectif est une combinaison de la dérivée première centrée et de la dérivée première décentrée avant, quand la vitesse de l'écoulement est négative ou de la dérivée première décentrée arrière si la vitesse de l'écoulement est positive. Nous allons, dans ce qui suit,

déterminer la dérivée première telle qu'elle s'est imposée par le schéma précédemment cité, dans le cas où la vitesse est positive et dans le cas où celle-ci est négative.

Pour $U > 0$ l'entité physique φ est convectée à partir de la gauche (amont). L'équation (3.6) donne l'expression de la dérivée première de ce schéma et la figure (3.5) montre les nœuds concernés pour sa discrétisation.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U>0} = \frac{1}{3} \left[2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{centrale} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{arriere} \right] \quad (3.6)$$

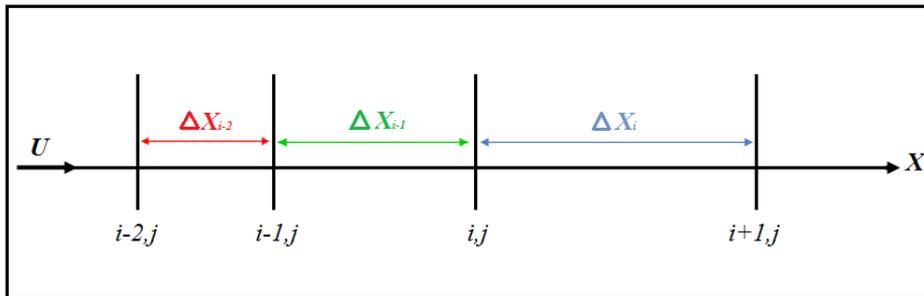


Figure 3.2 : Maillage décentré amont suivant X.

Pour $U < 0$ dans ce cas l'entité physique φ est convectée à partir de la droite (aval). La dérivée première de ce schéma est donnée par l'équation (3.7) et la figure (3.6) montre les nœuds concernés pour sa discrétisation.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U<0} = \frac{1}{3} \left[2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{centrale} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{avant} \right] \quad (3.7)$$

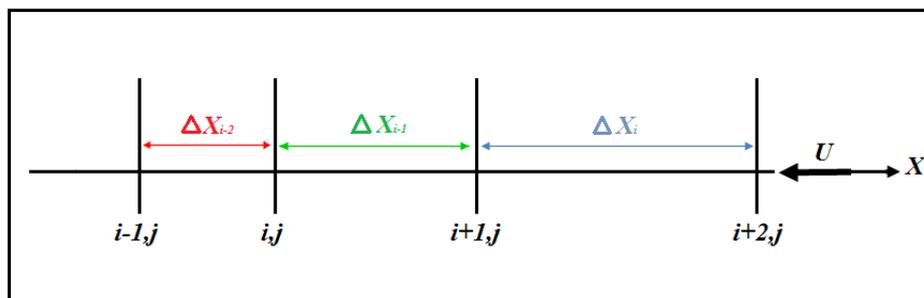


Figure 3.3 : Maillage décentré aval suivant X.

En se basant sur les figures précédentes et en considérant le développement en séries de Taylor d'une variable dépendante φ en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, nous pouvons écrire :

$$\varphi_{i-2,j} = \varphi_{i,j} - smx_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{smx_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \quad (a)$$

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi_{i,j} - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \quad (b)$$

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi_{i,j} + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \quad (c)$$

$$\varphi_{i+2,j} = \varphi_{i,j} + spx_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \quad (d)$$

Avec:

$$smx_i = \Delta X_{i-2} + \Delta X_{i-1}$$

$$sx_i = \Delta X_{i-1} + \Delta X_i$$

$$spx_i = \Delta X_i + \Delta X_{i+1}$$

À partir de ces développements en séries de Taylor nous allons détailler la discrétisation des différentes dérivées premières de l'entité physique φ .

4.2.1 La différence centrale (central difference) $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{centrale} \right]$

Nous multiplions l'équation (c) par (ΔX_{i-1}^2) , nous obtenons :

$$\Delta X_{i-1}^2 \varphi_{i+1,j} = \Delta X_{i-1}^2 \varphi_{i,j} + \Delta X_{i-1}^2 \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}^2 \Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \quad (c_1)$$

Et l'équation (b) par $(-\Delta X_i^2)$, nous obtenons :

$$-\Delta X_i^2 \varphi_{i-1,j} = -\Delta X_i^2 \varphi_{i,j} + \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} - \frac{\Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} \quad (b_1)$$

La sommation de l'équation (c₁) et (b₁) donne la différence centrale (central difference) exprimée par :

$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big _{centrale} = -\frac{\Delta X_i}{sx_i \cdot \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1,j} + \frac{(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \cdot \Delta X_{i-1}} \varphi_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}}{sx_i \cdot \Delta X_i} \varphi_{i+1,j} \quad (3.8)$

4.2.2 La différence arrière (backward difference) $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right]_{\text{arrière}}$

De façon analogue que la différence centrale, nous allons calculer la différence arrière, nous faisons la multiplication de l'équation (b) par (smx_i^2) , nous obtenons :

$$smx_i^2\varphi_{i-1,j} = smx_i^2\varphi_{i,j} - smx_i^2 \times \Delta X_{i-1} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{i,j} + \frac{smx_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} \quad (b_2)$$

Et l'équation (a) par $(-\Delta X_{i-1}^2)$, nous obtenons :

$$-\Delta X_{i-1}^2\varphi_{i-2,j} = -\Delta X_{i-1}^2\varphi_{i,j} + smx_i \times \Delta X_{i-1}^2 \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{i,j} - \frac{\Delta X_{i-1}^2 \times smx_i^2}{2!} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} \quad (a_1)$$

La sommation de l'équation (b₂) et (a₁) donne la différence arrière (backward difference) exprimée par :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial X}\Big|_{\text{arrière}} = \frac{\Delta X_{i-1}}{smx_i \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-2,j} - \frac{smx_i}{\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-1,j} + \frac{(smx_i + \Delta X_{i-1})}{smx_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i,j} \quad (3.9)$$

4.2.3 La différence avant (forward difference) $\left[\frac{\partial\varphi}{\partial X}\right]_{\text{avant}}$

Nous multiplions l'équation (c) par (spx_i^2) , nous obtenons :

$$spx_i^2\varphi_{i+1,j} = spx_i^2\varphi_{i,j} + spx_i^2 \times \Delta X_i \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{i,j} + \frac{spx_i^2 \times \Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} \quad (c_1)$$

Et l'équation (d) par $(-\Delta X_i^2)$, nous obtenons :

$$-\Delta X_i^2\varphi_{i+2,j} = -\Delta X_i^2\varphi_{i,j} - \Delta X_i^2 \times spx_i \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{i,j} - \frac{\Delta X_i^2 \times spx_i^2}{2!} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\Big|_{i,j} \quad (d_1)$$

Et enfin la sommation de l'équation (c₁) par (d₁) donne la différence avant (forward difference) exprimée par :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{\text{avant}} = -\frac{(spx_i + \Delta X_i)}{spx_i \times \Delta X_i} \varphi_{i,j} + \frac{spx_i}{\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+1,j} - \frac{\Delta X_i}{spx_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+2,j} \quad (3.10)$$

En substituant les équations (3.8) et (3.9) dans l'équation (3.6) nous obtenons :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{U > 0}^{Upwind} = \frac{\Delta X_{i-1}}{3smx_i \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-2,j} - \left(\frac{2\Delta X_i}{3sxi \times \Delta X_{i-1}} + \frac{smx_i}{3\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} \right) \varphi_{i-1,j} + \left(\frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} + \right. \\ \left. smxi + \Delta Xi - 13smxi \times \Delta Xi - 1 \right) \varphi_{i,j} + 2\Delta Xi - 13sxi \times \Delta Xi \varphi_{i+1,j} \quad (3.11)$$

La substitution de (3.8) et (3.10) dans l'équation (3.7) donne :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{U < 0}^{Upwind} = -\frac{2\Delta X_i}{3.sxi \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1,j} + \left(\frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} - \frac{(spx_i + \Delta X_i)}{3spx_i \times \Delta X_i} \right) \varphi_{i,j} + \left(\frac{2\Delta X_{i-1}}{3sxi \times \Delta X_i} + \right. \\ \left. spxi3\Delta Xi \times \Delta Xi + 1 \right) \varphi_{i+1,j} - \Delta Xi3spxi \times \Delta Xi + 1 \varphi_{i+2,j} \quad (3.12)$$

Maintenant que les différentes dérivées premières sont déterminées nous allons déduire la discrétisation du terme convectif.

Posant :

$$U_p(i, j) = \frac{U_{i,j} + |U_{i,j}|}{2}$$

Et :

$$U_n(i, j) = \frac{U_{i,j} - |U_{i,j}|}{2}$$

$$\text{➤ Si } U > 0 : \begin{cases} U_p(i, j) = \frac{2U_{i,j}}{2} = U_{i,j} \\ U_n(i, j) = 0 \end{cases}$$

$$\text{➤ Si } U < 0 : \begin{cases} U_p(i, j) = 0 \\ U_n(i, j) = \frac{2U_{i,j}}{2} = U_{i,j} \end{cases}$$

Donc on peut écrire :

$$U \left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{Upwind} = U_p(i, j) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{Upwind}^{U>0} + U_n(i, j) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{Upwind}^{U<0} \quad (3.13)$$

Le développement de cette dernière relation permet d'exprimer la discrétisation du terme convectif suivant la direction horizontale (X).

$$\begin{aligned} U \left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{i,j}^{Upwind} = \\ ai(i)U_p \varphi_{i-2,j} + (b_1i(i)U_p + b_2i(i)U_n)\varphi_{i-1,j} + (c_1i(i)U_p + c_2i(i)U_n)\varphi_{i,j} + \\ (d_1i(i)U_p + d_2i(i)U_n)\varphi_{i+1,j} + ei(i)U_n\varphi_{i+2,j} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les valeurs des différents coefficients de l'entité physique φ figurent dans l'annexe B.

D'une manière analogue la discrétisation du terme convectif suivant la direction verticale (Y) sera exprimée par les équations suivantes :

$$V \left. \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right|_{Upwind} = V_p(i, j) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right|_{Upwind}^{V>0} + V_n(i, j) \left. \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right|_{Upwind}^{V<0} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} V \left. \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right|_{i,j}^{Upwind} = \\ aj(j)V_p \varphi_{i,j-2} + (b_1j(j)V_p + b_2j(j)V_n)\varphi_{i,j-1} + (c_1j(j)V_p + c_2j(j)V_n)\varphi_{i,j} + (d_1j(j)V_p + \\ d_2j(j)V_n)\varphi_{i,j+1} + ej(j)V_n\varphi_{i,j+2} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Les valeurs des différents coefficients de l'entité physique φ figurent dans l'annexe B.

4.3 Discrétisation du terme diffusif ($\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}$)

Considérons le développement en séries de Taylor d'une variable dépendante φ en négligeant les termes d'ordre supérieur à quatre :

$$\varphi_{i-2,j} = \varphi_{i,j} - smx_i \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{smx_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{i,j} - \frac{smx_i^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right|_{i,j} + \frac{smx_i^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right|_{i,j} \quad (i)$$

$$\varphi_{i-1,j} = \varphi_{i,j} - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} - \frac{\Delta X_{i-1}^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j} \quad (j)$$

$$\varphi_{i+1,j} = \varphi_{i,j} + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_i^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j} \quad (k)$$

$$\varphi_{i+2,j} = \varphi_{i,j} + spx_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \Big|_{i,j} \quad (l)$$

Pour arriver à l'expression donnant la discrétisation de la dérivée seconde, trois étapes sont indispensables. L'étape de départ a pour but d'éliminer la dérivée quatrième ($\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}$), la seconde pour la dérivée troisième ($\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}$) et la dernière pour la dérivée première ($\frac{\partial \varphi}{\partial x}$). Il en découle l'expression suivante pour la dérivée seconde.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = d_2 x m_2(i) \varphi_{i-2,j} + d_2 x m_1(i) \varphi_{i-1,j} + d_2 x_0(i) \varphi_{i,j} + d_2 x p_1(i) \varphi_{i+1,j} + d_2 x p_2(i) \varphi_{i+2,j} \quad (3.17)$$

Les coefficients de la variable φ figurant dans cette expression sont très compliqués pour être reproduits ici et nous avons détaillé leurs calculs dans l'annexe C.

4.4 Discrétisation du terme source ($\frac{\partial \theta}{\partial X}$)

Nous procédons de la même manière que précédemment pour discrétiser la dérivée première. Dans ce cas la dernière étape a pour but d'éliminer la dérivée seconde ($\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$). Il en découle l'expression suivante pour la dérivée première.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{i,j} = d_1 x m_2(i) \varphi_{i-2,j} + d_1 x m_1(i) \varphi_{i-1,j} + d_1 x_0(i) \varphi_{i,j} + d_1 x p_1(i) \varphi_{i+1,j} + d_1 x p_2(i) \varphi_{i+2,j} \quad (3.18)$$

Dans ce cas aussi les coefficients de la variable φ figurent dans l'annexe D.

4.5 Discrétisation des conditions aux limites

Les dérivées des conditions aux limites sont discrétisées avec un schéma décentré avant ou arrière, selon la position de la paroi considérée.

4.5.1 Température

Dans le problème que nous traitons, les températures aux parois latérales sont imposées ; alors que les autres parois sont considérées adiabatiques. Cette condition s'exprime par :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{j=1,nyt} = 0$$

Il vient alors : $\theta_{i,1} = -\frac{spy_1^2}{\Delta y_1^2 - spy_1^2} \theta_{i,2} + \frac{\Delta y_1^2}{\Delta y_1^2 - spy_1^2} \theta_{i,3}$

$$\theta_{i,nyt} = -\frac{smy_{nyt}^2}{\Delta y_{nyt-1}^2 - smy_{nyt}^2} \theta_{i,nyt-1} + \frac{\Delta y_{nyt-1}^2}{\Delta y_{nyt-1}^2 - smy_{nyt}^2} \theta_{i,nyt-2}$$

Avec : $spy_1 = \Delta y_1 + \Delta y_2$ et $smy_{nyt} = \Delta y_{nyt-2} + \Delta y_{nyt-1}$

4.5.2 Vorticité

L'une des principales difficultés dans l'utilisation de la formulation fonction de courant – vorticité ($\Psi - \Omega$) apparaît lors du traitement des conditions aux limites de la vorticité, qui ne sont pas données explicitement sur les parois (solides ou mobiles). Plusieurs conditions ont été proposées dans la littérature, dans notre cas nous allons détailler la discrétisation de ces conditions aux niveaux des parois.

La vorticité est donnée par cette relation : $\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$

➤ Paroi fixe inférieure

Au niveau de la paroi inférieure elle s'exprime par :

$$\Omega|_{j=1} = \underbrace{\frac{\partial V}{\partial X}}_{=0} \Big|_{j=1} - \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{j=1} = - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \Big|_{j=1}$$

Considérons le développement en série de Taylor pour Ψ en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux.

$$\Psi_{i,2} = \Psi_{i,1} + \underbrace{\Delta Y_1 \frac{\partial \Psi}{\partial Y}}_{=0} \Big|_{j=1} + \frac{\Delta Y_1^2}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2}}_{=-\Omega|_{j=1}} \Big|_{j=1}$$

Donc :

$$\Omega|_{i,1} = \frac{2}{\Delta Y_1^2} (\Psi_{i,1} - \Psi_{i,2})$$

➤ **Paroi fixe supérieure**

D'une manière similaire que la paroi inférieure, nous obtenons la relation suivante :

$$\Omega|_{i,nyt} = \frac{2}{\Delta Y_{nyt-1}^2} (\Psi_{i,nyt} - \Psi_{i,nyt-1})$$

➤ **Paroi mobile gauche**

Dans ce cas le terme $(\frac{\partial \Psi}{\partial X})$ n'est pas nul mais égal à $(-V_0)$, de telle façon que pour la paroi gauche ($i = 1$) le développement en série de Taylor pour Ψ est :

$$\Psi_{2,j} = \Psi_{1,j} + \underbrace{\Delta X_1 \frac{\partial \Psi}{\partial X}}_{=-\Delta X_1 V_0} \Big|_{i=1} + \frac{\Delta X_1^2}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2}}_{=-\Omega|_{i=1}} \Big|_{i=1}$$

Alors :

$$\Omega|_{1,j} = \frac{2}{\Delta X_1^2} (\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j} - \Delta X_1 V_0)$$

➤ **Paroi mobile droite**

D'une manière analogue que la paroi gauche, nous obtenons pour la paroi droite l'expression suivante :

$$\Omega|_{nxt,j} = \frac{2}{\Delta X_{nxt-1}^2} (\Psi_{nxt,j} - \Psi_{nxt-1,j} + \Delta X_{nxt-1} V_0)$$

5. RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS

Les différentes dérivées partielles figurant dans les équations régissant notre modèle mathématique ont été discrétisées. Une fois leurs expressions substituées dans ces équations nous obtenons un système d'équations algébriques qui peut être résolu facilement par n'importe quelle méthode numérique.

Les champs de la température et de la vorticité sont d etermin es par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4), déjà décrite, alors que pour la détermination de la fonction de courant Ψ nous avons opté pour la méthode itérative N.L.O.R. avec sur relaxation (Non Linear Over Relaxation). Conformément à cette méthode la valeur de la fonction de courant Ψ à l'itération $(k+1)$ en fonction de la valeur de cette même variable à l'itération k , est donnée par la relation suivante :

$$\Psi_{i,j}^{k+1} = \Psi_{i,j}^k - K \frac{F_{\Psi_{i,j}}}{\frac{\partial F_{\Psi_{i,j}}}{\partial \Psi_{i,j}}} \tag{3.19}$$

Dans laquelle : $F_{\Psi_{i,j}} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \Omega_{i,j}$ et K représente le facteur de sur/sous relaxation, sa valeur est comprise entre 0 et 2.

En substituant la discrétisation des dérivées secondes de la fonction $F_{\Psi_{i,j}}$ dans l'équation (3.19), la fonction de courant à l'itération $(k+1)$ est donnée par l'équation suivante :

$\Psi_{i,j}^{k+1} = \Psi_{i,j}^k - \frac{K}{[d_2x_0(i)+d_2y_0(j)]} [d_2xp_2(i)\Psi_{i+2,j}^k + d_2xp_1(i)\Psi_{i+1,j}^k + d_2xm_1(i)\Psi_{i-1,j}^{k+1} + d_2xm_2(i)\Psi_{i-2,j}^{k+1} + [d_2x_0(i) + d_2y_0(j)]\Psi_{i,j}^k + d_2yp_2(j)\Psi_{i,j+2}^k + d_2yp_1(j)\Psi_{i,j+1}^k + d_2ym_1(j)\Psi_{i,j-1}^{k+1} + d_2ym_2(j)\Psi_{i,j-2}^{k+1}] \tag{3.20}$
--

Tous les coefficients figurant dans cette formule sont donn es dans l'annexe C.

5.1 Champs de vitesses

Les composantes du champ de vitesse sont obtenues explicitement à partir de la définition de la fonction de courant c'est-à-dire : $U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}$ et $V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}$. Une fois les

valeurs de la fonction de courant calculées les vitesses seront déduites par les relations suivantes :

$$U_{i,j} = d_1 y m_2(j) \Psi_{i,j-2} + d_1 y m_1(j) \Psi_{i,j-1} + d_1 y_0(j) \Psi_{i,j} + d_1 y p_1(j) \Psi_{i,j+1} + d_1 y p_2(j) \Psi_{i,j+2} \quad (3.21)$$

$$V_{i,j} = -[d_1 x m_2(i) \Psi_{i-2,j} + d_1 x m_1(i) \Psi_{i-1,j} + d_1 x_0(i) \Psi_{i,j} + d_1 x p_1(i) \Psi_{i+1,j} + d_1 x p_2(i) \Psi_{i+2,j}] \quad (3.22)$$

Tous les coefficients figurant dans ces deux formules sont donnés dans l'annexe D.

6. ALGORITHME DE CALCUL

La formulation ($\Psi - \Omega$) exige un traitement simultané des trois équations (fonction du courant, vorticité et l'énergie). Les principales étapes sont résumées par l'algorithme suivant :

1. Définition du domaine et lecture des données.
2. Génération du maillage.
3. Introduction des conditions initiales et aux limites.
4. Début de la boucle sur le temps.
 - ✚ Résolution de l'équation de l'énergie et de la vorticité à l'aide de la méthode de RK4.
 - ✚ Calcul du champ de la fonction de courant à partir de l'équation de Laplace (3.17) par la méthode N.L.O.R.
 - ✚ Détermination du champ de vitesse (U, V) à partir de ces relations : (3.21) et (3.22).
 - ✚ Détermination de la vorticité aux parois.
 - ✚ Incrémentation du temps ($\tau + \Delta\tau$).
 - ✚ Répétition des calculs jusqu'à l'obtention du régime établi.
- Fin de la boucle sur le temps.
5. Impression des résultats.

7. CRITERE DE CONVERGENCE

Pour optimiser le temps de calcul en fonction des moyens informatiques disponibles nous avons fixé le critère de convergence pour la détermination de la fonction de courant à :

$$\text{Max} [|\Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^k|] \leq 10^{-5}$$

8. CONCLUSION

Dans le cadre de ce chapitre nous avons présenté la discrétisation des différentes dérivées des équations de base régissant la convection mixte dans notre cavité par la méthode des différences finis. Les schémas de cette discrétisation ont été détaillés ; et nous avons obtenu pour, chaque variable du problème considéré, un système d'équations algébriques qui a été résolu numériquement. À partir de l'algorithme déjà établi nous avons élaboré un code de calcul en langage Fortran qui a été utilisé pour effectuer toutes les simulations nécessaires à la résolution numérique du problème considéré dans cette étude afin de satisfaire le but déjà fixé. Les résultats de ces simulations numériques sont présentés et discutés dans le chapitre suivant.

RESULTATS ET DISCUSSION

1. INTRODUCTION

Les équations du modèle mathématique régissant la convection mixte dans la géométrie considérée ainsi que la méthode de résolution ont été établies et présentées dans les chapitres précédents. Dans ce chapitre nous présenterons les résultats de nombreuses simulations relatives à ce problème. Le choix du maillage sera d'abord déterminé, ensuite suivra la validation du code de calcul et enfin nous présenterons et discuterons les résultats obtenus.

2. CHOIX DU MAILLAGE

Le choix d'un maillage permettant un compromis raisonnable entre le temps de calcul et la précision des résultats, nécessite des tests en considérant plusieurs grilles. Nous avons, alors, considéré des grilles de : 81×81 , 101×101 , 161×161 et 201×201 . Les résultats obtenus en termes de la fonction de courant maximale Ψ_{max} ; de la température maximale θ_{max} ; et du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour $Ri = 0.1$, $Pr = 0.71$ et $Re = 100$ sont présentés en fonction des grilles du maillage dans le tableau (4.1). L'erreur relative entre une grille de 101×101 par rapport à celle de 201×201 est de 0.4% pour \overline{Nu} , elle est de 1.4% pour θ_{max} ; cependant elle atteint 7% pour Ψ_{max} .

Tableau 4.1 : Effet du maillage sur la fonction de courant et de la température maximales ainsi que sur le nombre de Nusselt moyen. ($Ri = 0.1$, $Pr = 0.71$ et $Re = 100$).

<i>Grille</i>	Ψ_{max}	θ_{max}	\overline{Nu}
81×81	7.8832×10^{-2}	0.1758	5.65734
101×101	8.1470×10^{-2}	0.1772	5.66724
161×161	8.5896×10^{-2}	0.1790	5.68334
201×201	8.7527×10^{-2}	0.1797	5.68913

Les figures (4.1), (4.2) et (4.3) montrent les profils de la température, de la vitesse verticale "V" et de la fonction de courant à $Y = 0.5$ respectivement. Nous pouvons constater que les profils correspondant à la grille de 101×101 sont proches de ceux correspondant aux grilles de 161×161 et de 201×201 et par conséquent nous avons opté pour une grille de 101×101 pour tous les calculs ultérieurs. Par ailleurs il faut préciser que ce choix a aussi été motivé par le matériel informatique (*P.C*) disponible.

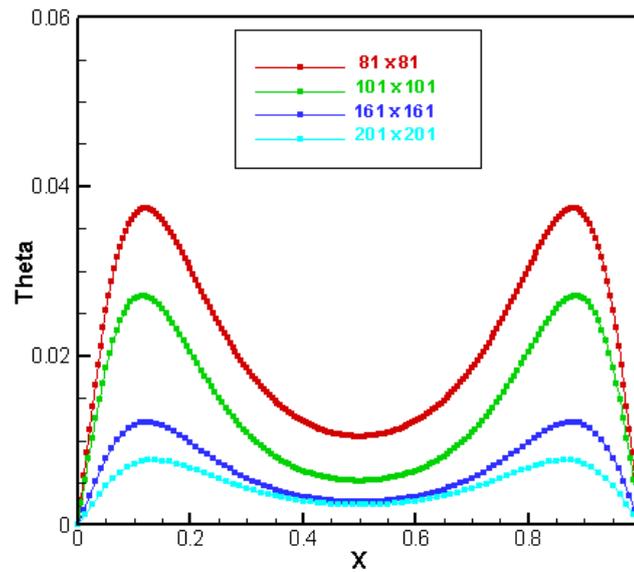


Figure 4.1 : Convergence du profil de température à $Y = 0.5$.

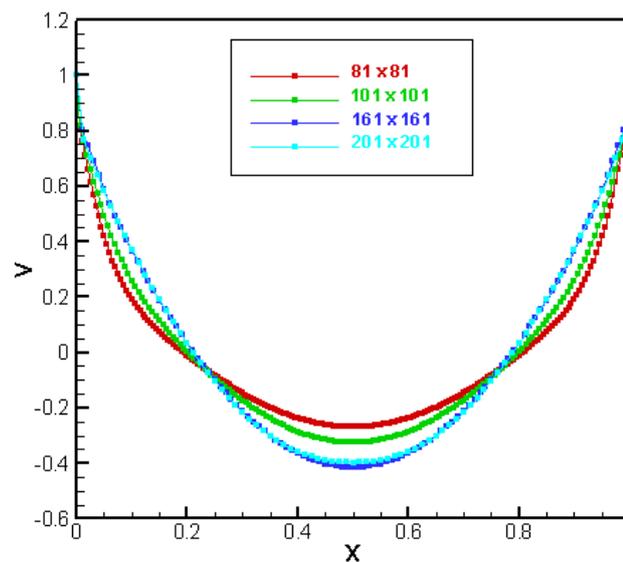


Figure 4.2 : Convergence du profil de vitesse à $Y = 0.5$.

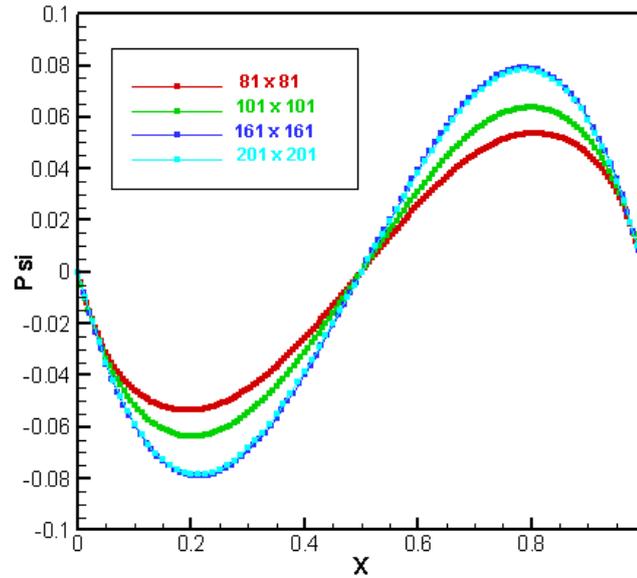
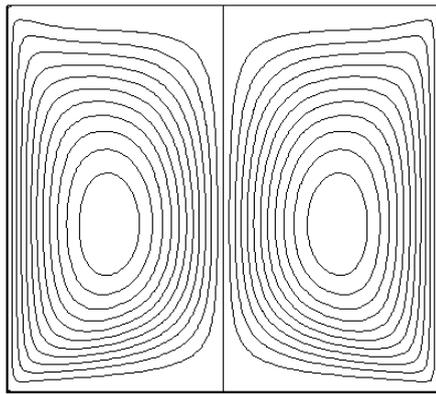


Figure 4.3 : Convergence du profil de la fonction de courant à $Y = 0.5$.

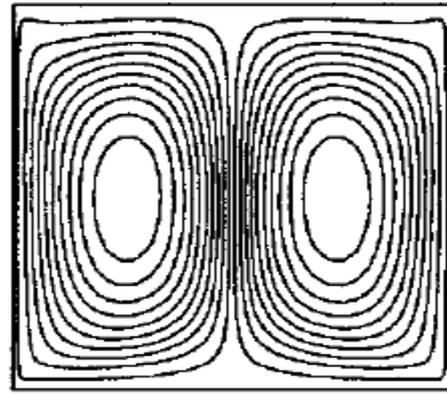
3. VALIDATION DU CODE DE CALCUL

La validation de notre code numérique a été faite en considérant une étude similaire rapportée par **Aydin** et **Yang** [84]. Ces auteurs considèrent l'étude numérique de la convection mixte dans une cavité carrée contenant de l'air, dont la paroi supérieure est adiabatique et les parois verticales qui se déplacent vers le bas avec une vitesse et une température froide constantes. Une source de chaleur dont la longueur adimensionnelle est $\varepsilon = l/L$ est placée au centre de la paroi inférieure. Toutes les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques.

Les figures (4.4) et (4.5) comparent, respectivement, les contours de la fonction de courant et de la température pour $Ri = 10$ et $\varepsilon = 4/5$. D'une manière qualitative nous pouvons constater que ces contours sont similaires.

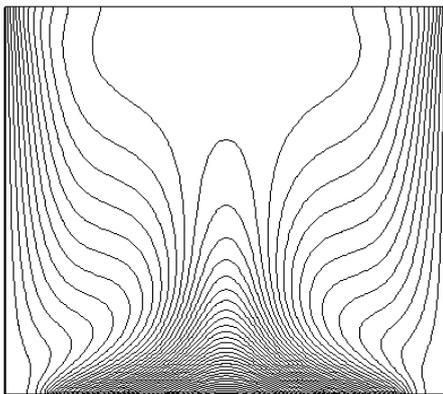


(a) Présent travail

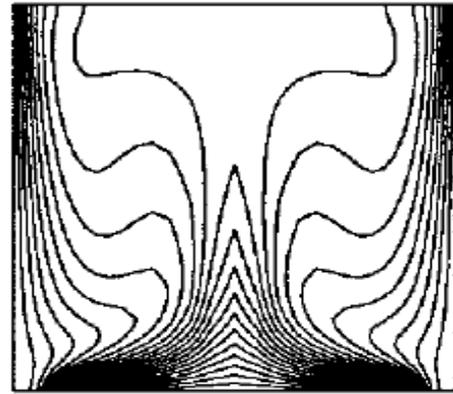


(b) Résultat d'Aydın et Yang [84]

Figure 4.4 : Comparaison des contours de la fonction de courant pour $Ri = 10$ et $\varepsilon = 4/5$.



(a) Présent travail



(b) Résultat d'Aydın et Yang [84]

Figure 4.5 : Comparaison des isothermes pour $Ri = 10$ et $\varepsilon = 4/5$.

Par ailleurs, la figure (4.6) compare quantitativement le profil de la vitesse verticale " V " à $Y = 0.5$ quand $\varepsilon = 1/5$ et pour différents nombres du nombre de Richardson " Ri ". Nous pouvons constater, que dans les deux cas, ces profils sont équivalents. Enfin la figure (4.7) compare, pareillement, les valeurs du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} en fonction du nombre de Richardson ($Ri = Gr/Re^2$). Là aussi, nous constatons une excellente concordance entre les deux cas.

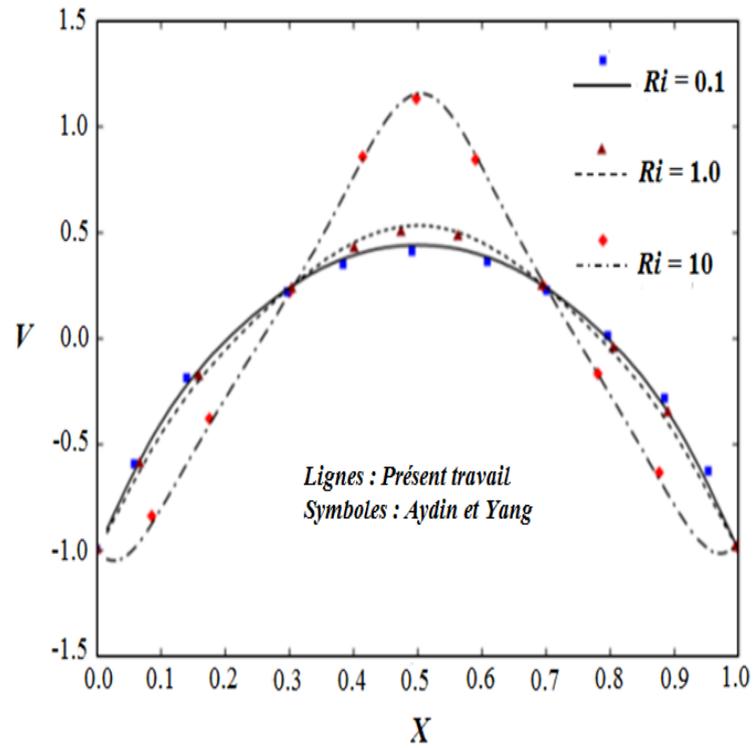


Figure 4.6 : Comparaison du profil de vitesse "V" le long du Y = 0.5 avec les résultats d'Aydin et Yang [84] pour Ri = 0.1, 1 et 10.

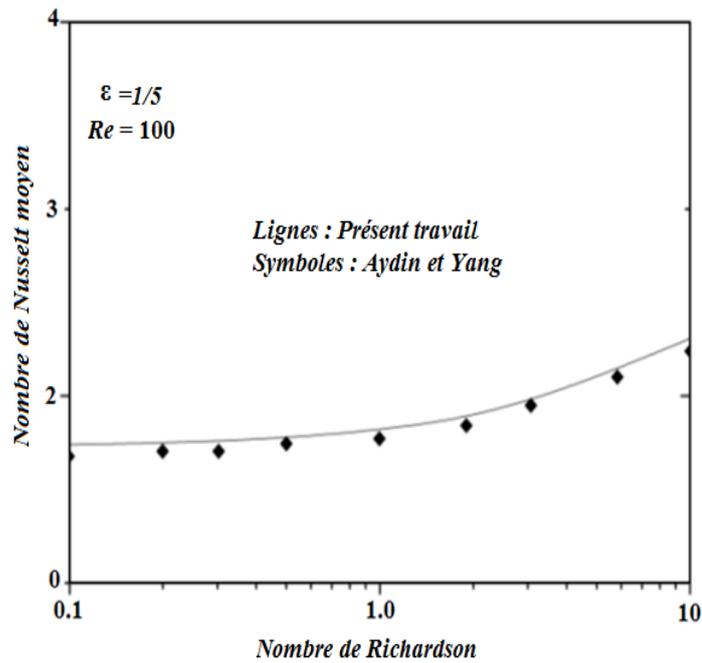


Figure 4.7 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen (*Num*) avec les résultats d'Aydin et Yang [84] en fonction de Ri.

4. RESULTATS

L'un des aspects le plus important de cette étude numérique consiste à détecter les divers comportements de l'écoulement du fluide dans la cavité. À cet égard nous avons choisi le nombre de Richardson Ri comme paramètre d'étude. Les simulations numériques ont été effectuées pour une valeur de ce nombre comprise entre 0.1 et 50, ce qui correspond à une valeur du nombre de Grashof comprise entre 10^3 et 5.10^5 (convection mixte en régime laminaire). La cavité est remplie d'air dont le nombre de Prandtl est 0.71. La longueur adimensionnelle de la partie chauffée de la paroi inférieure est maintenue à 4/5. Le nombre de Reynolds a été fixé à 10^2 .

Les résultats des nombreuses simulations nous ont permis de déceler trois comportements, tout à fait différents, exposés sur la figure (4.8). Cette figure montre la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson. Nous pouvons remarquer que le nombre de Nusselt moyen calculé le long de la paroi chauffée située sur la paroi inférieure de la cavité augmente continuellement avec l'augmentation du nombre de Richardson.

Cependant, nous pouvons observer deux diminutions assez nettes de ce nombre concrétisées par les points B et C. Le point B marque la transition d'un écoulement caractérisé par deux cellules parfaitement symétriques à un écoulement caractérisé par deux cellules asymétriques, et le point C indique le passage de l'écoulement formé des deux cellules asymétriques à un écoulement caractérisé par quatre cellules symétriques. Une paire de cellules contrarotatives situées au milieu de la cavité et une autre paire de cellules adjacentes aux parois latérales.

En outre, pour bien visualiser ces changements de l'écoulement (bifurcation) les contours de la fonction de courant (au-dessus de la courbe) et ceux des isothermes (en dessous de la courbe) sont tracés sur la même figure pour les nombres de Richardson égaux à 10, 35 et 45.

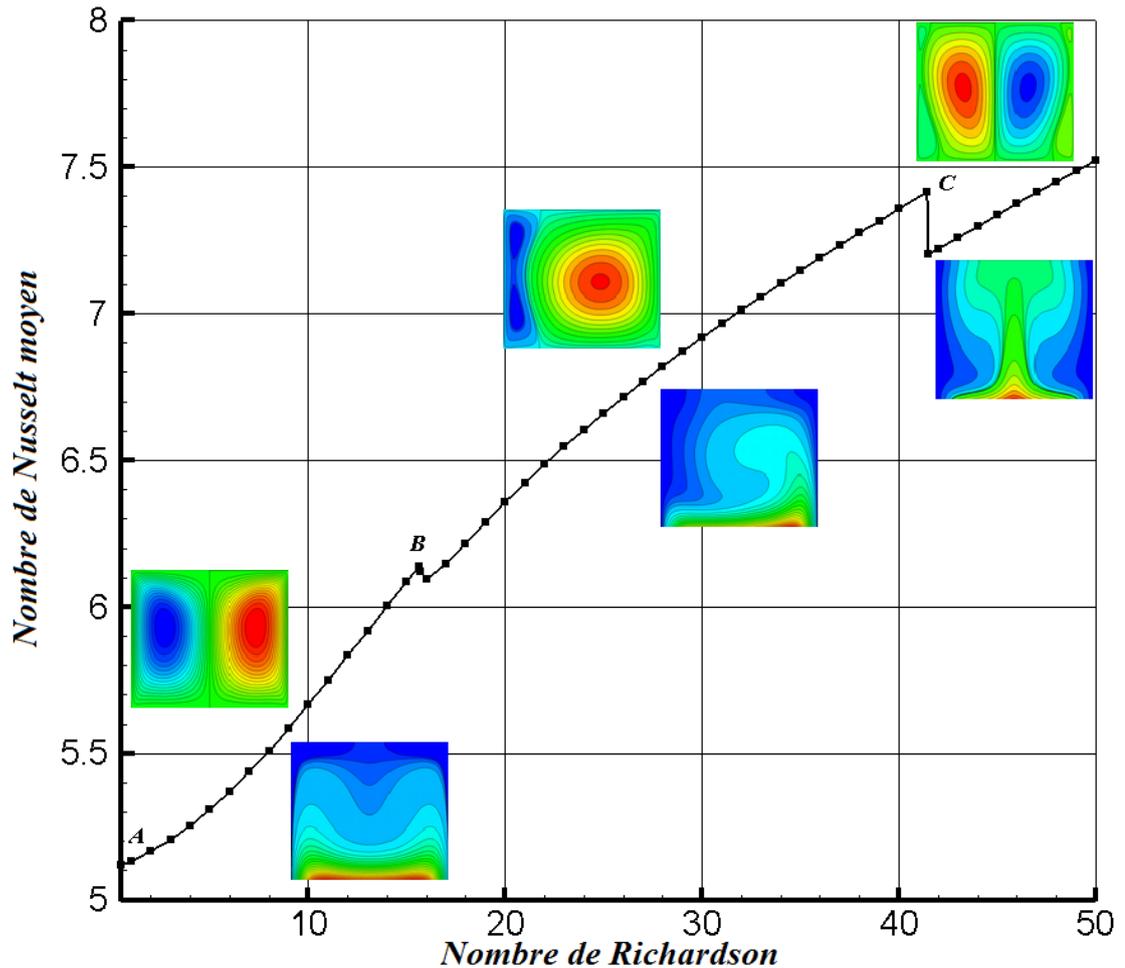


Figure 4.8 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Richardson.

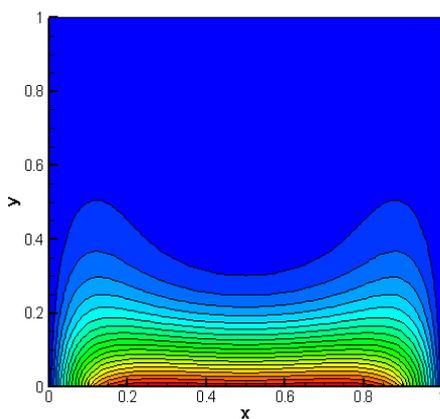
Nous allons, dans ce qui suit détailler ces différents comportements de l'écoulement en fonction du nombre de Richardson.

4.1 Régime dominé par la convection forcée $0.1 \leq Ri \leq 15.6$

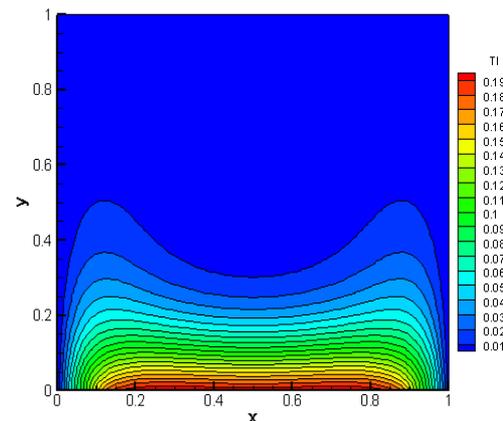
Ce régime d'écoulement est caractérisé par deux cellules contrarotatives et symétriques par rapport à l'axe vertical situé au milieu de la cavité. Le fait que l'écoulement du fluide à l'intérieur de la cavité est généré seulement par les forces de cisaillement dues aux parois latérales mobiles, nous permet de désigner ce régime comme « régime dominé par la convection forcée ».

4.1.1 Champs thermiques

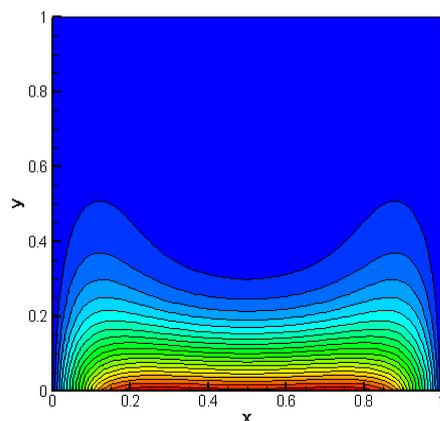
La figure (4.9) montre le contour des isothermes pour des nombre de Richardson compris entre 0.1 et 15.6. Dans tous les cas les isothermes présentent une densité importante au niveau de la partie chauffée et sont parallèles à celle-ci indiquant par là même un régime de transmission de la chaleur par conduction. Les forces visqueuses dues au mouvement latéral des parois mobiles soutirent une partie de la chaleur produite par la partie chauffée pour essayer de la transmettre, le long de ces parois verticales, vers le haut de la cavité. Par conséquent la partie supérieure de la cavité reste à une température froide. Par ailleurs nous remarquons visuellement que le champ de température n'est pas affecté d'une manière nette, par l'augmentation du nombre de Richardson. Nous pouvons conclure que dans ce cas, la dominance des forces de cisaillement dues au glissement des parois mobiles sont prépondérantes par rapport aux forces de flottabilité dues aux gradients de température au niveau de la partie chauffée.



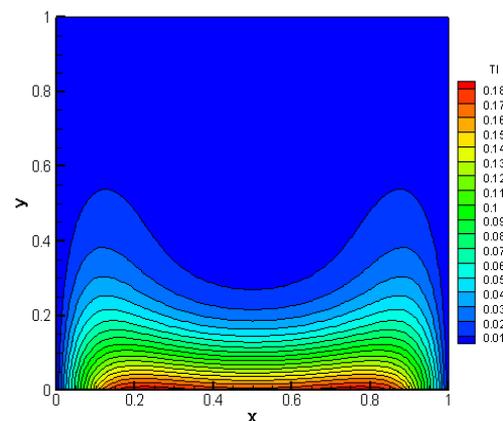
$Ri = 0.1$



$Ri = 0.2$



$Ri = 1$



$Ri = 8$

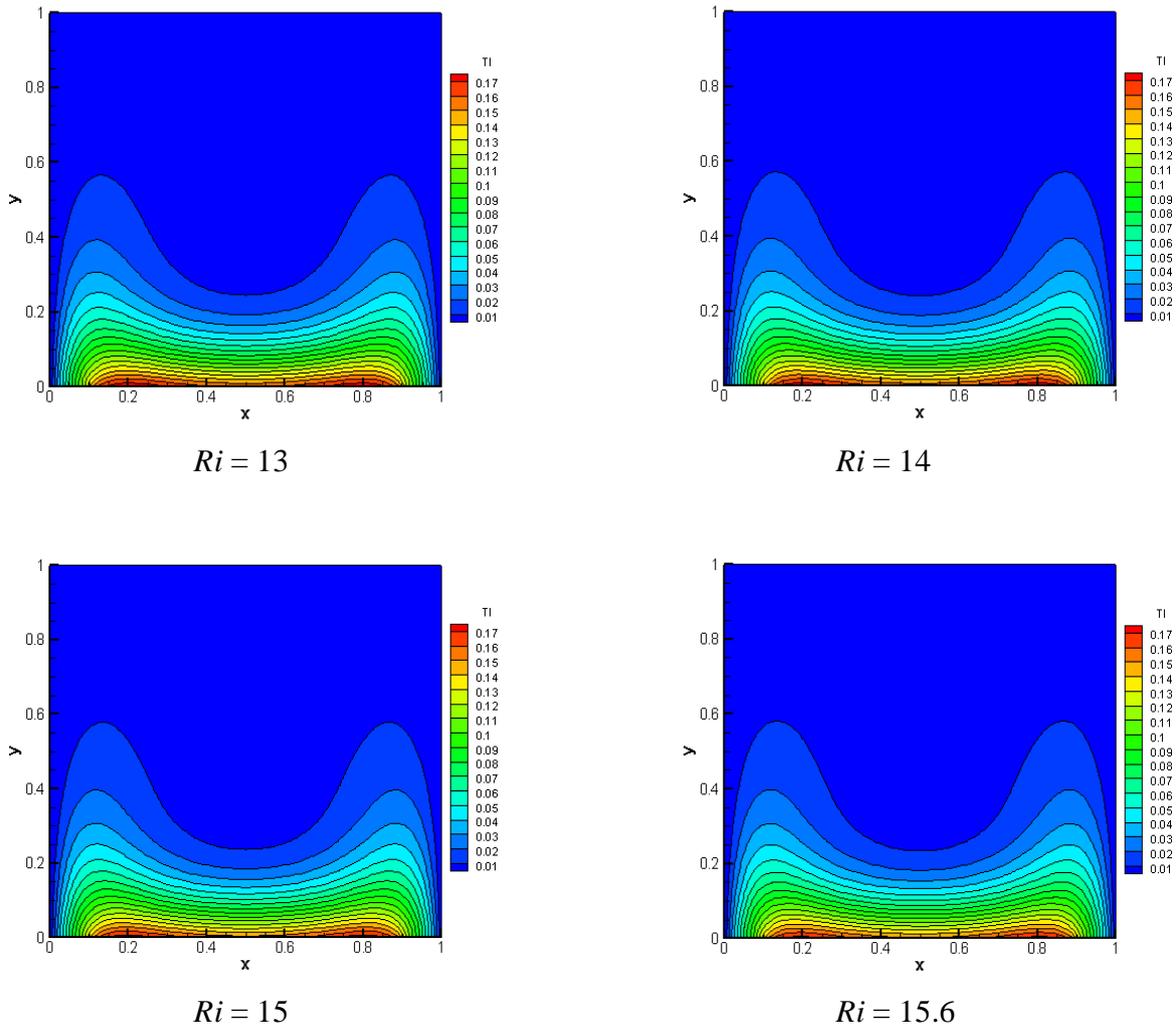


Figure 4.9 : Champ thermique dans le cas du régime dominé par la convection forcée pour différentes valeurs du nombre de Richardson.

Les profils de température à $Y = 0.5$ pour différentes valeurs du nombre de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection forcée sont rapportés dans la figure (4.10). Ces profils montrent d'une manière claire que la chaleur est aspirée presque totalement par les côtés verticaux. Les valeurs des températures restent faibles à ce niveau et le nombre de Richardson n'a aucun effet significatif.

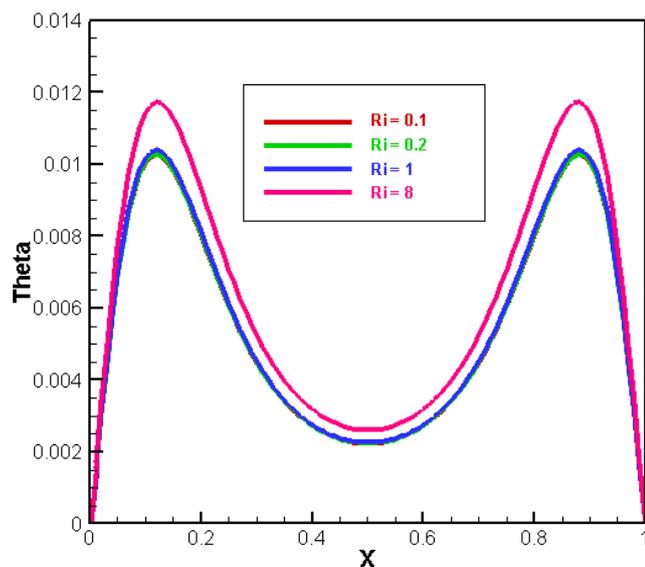
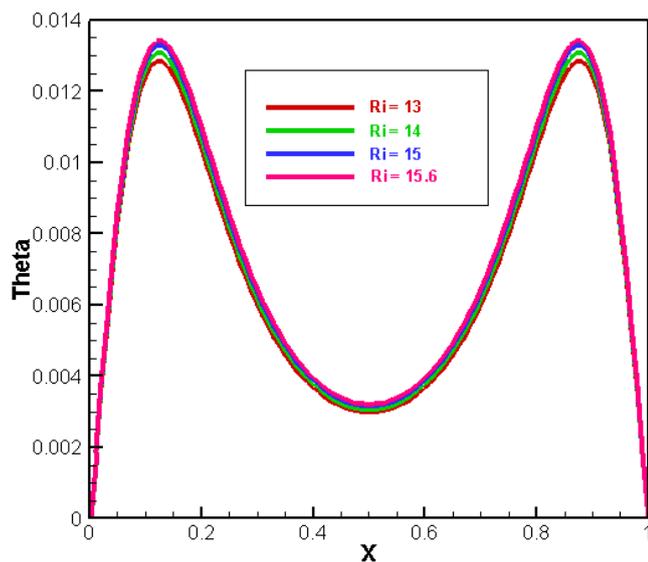
(a) : pour : $Ri = 0.1 ; 0.2 ; 1$ et 8 .(b) : pour : $Ri = 13 ; 14 ; 15$ et 15.6 .

Figure 4.10 : Profils de température à $Y = 0.5$ pour différents nombres de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection forcée.

4.1.2 Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur la figure (4.11) pour différents nombres de Richardson. D'une manière générale ce nombre décroît brusquement pendant les tous premiers instants, ensuite il augmente régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe qui diffère suivant le nombre de Richardson. Quand ce nombre

augmente, le nombre de Nusselt augmente aussi traduisant ainsi une influence plus marquée de l'écoulement sur l'échange de chaleur avec la paroi chauffée.

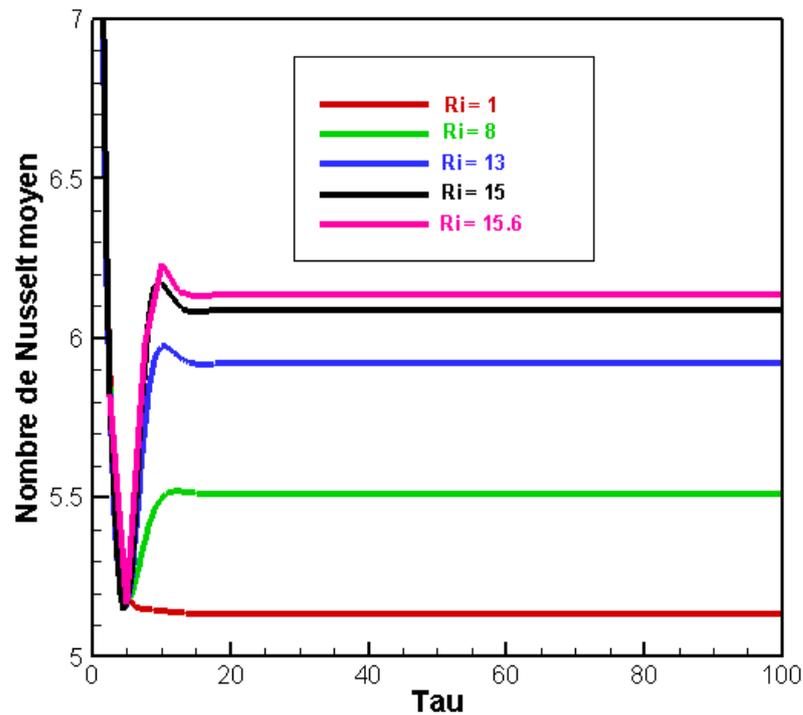
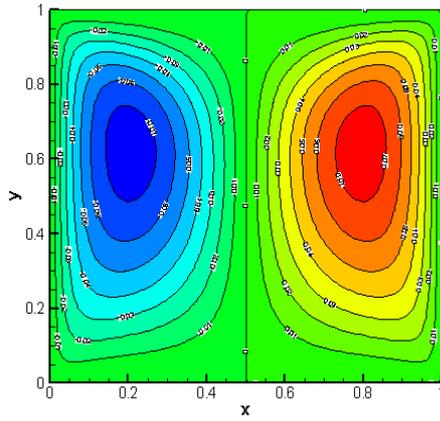


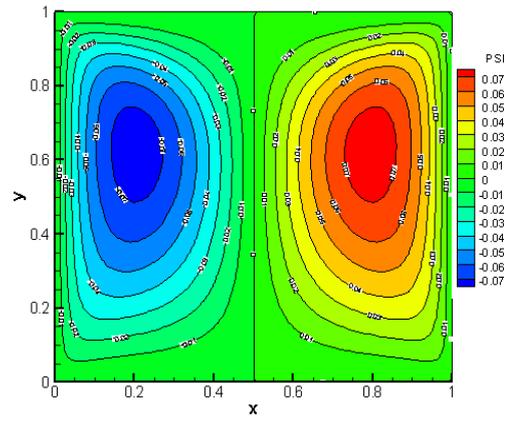
Figure 4.11 : Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du régime dominé par la convection forcée (deux cellules symétrique) pour différents nombre des Richardson.

4.1.3 Champs dynamiques

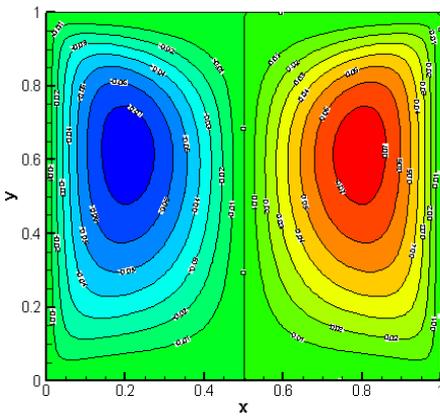
Les contours de la fonction de courant, matérialisant le comportement de l'écoulement à l'intérieur de la cavité, sont représentés pour les mêmes valeurs de " Ri " dans la figure (4.12). Dans tous les cas ces contours sont caractérisés par une paire de cellules contrarotatives strictement symétriques par rapport à l'axe médian vertical ($X = 0.5$). Les lignes « iso-courant » sont très serrées le long des parois verticales justifiant ainsi la propagation de la chaleur le long de ces parois comme le montrent les contours des isothermes.



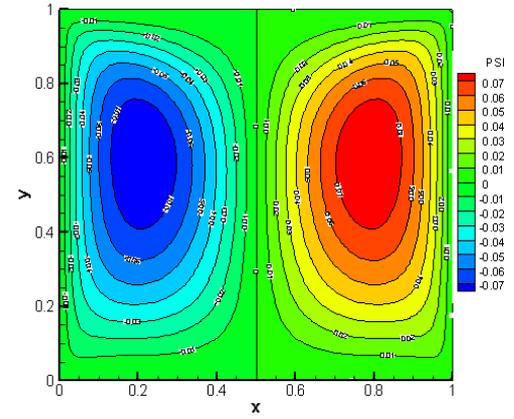
$Ri = 0.1$



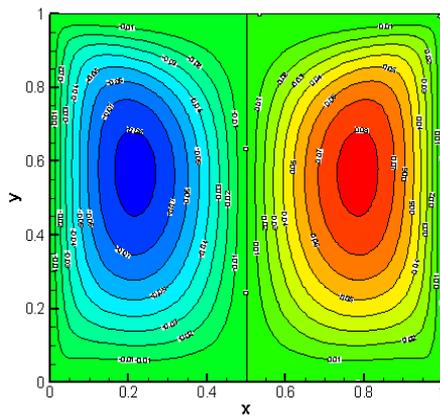
$Ri = 0.2$



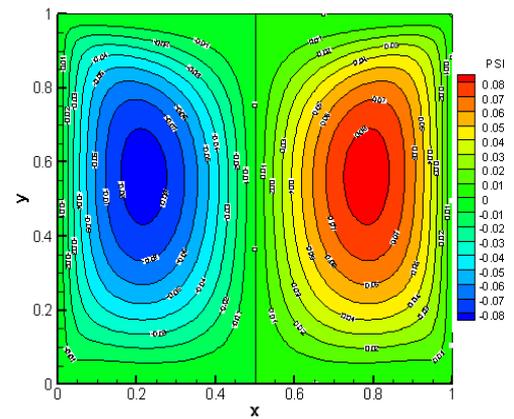
$Ri = 1$



$Ri = 8$



$Ri = 13$



$Ri = 14$

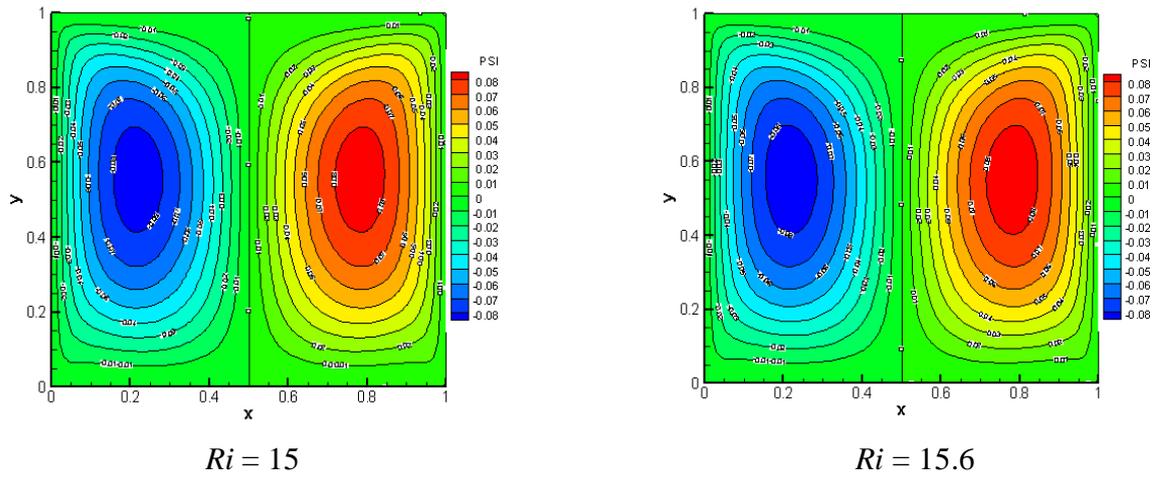
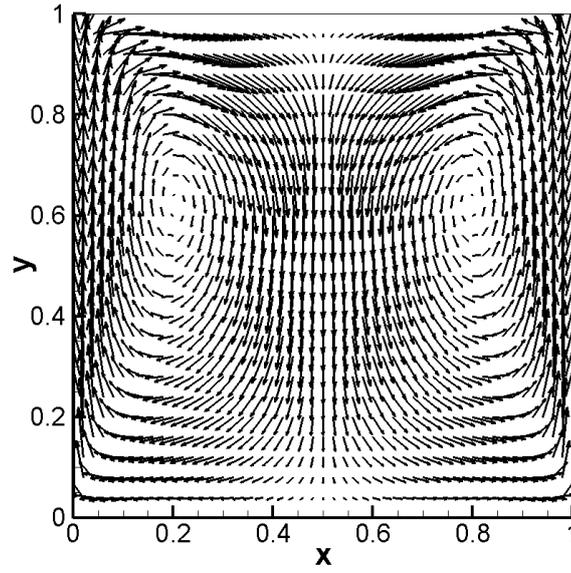


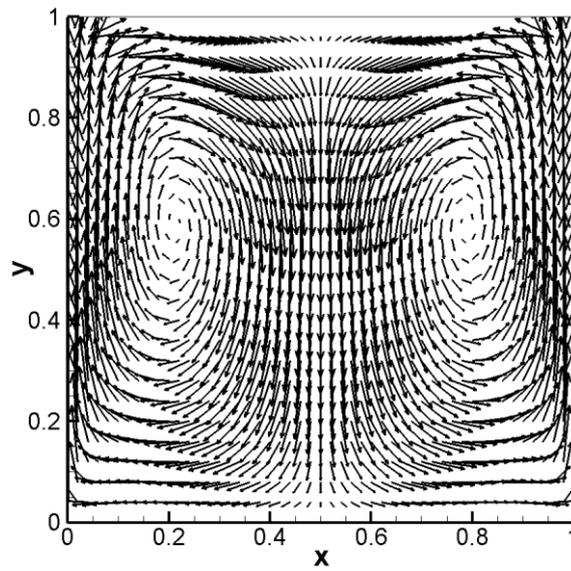
Figure 4.12 : Champ dynamique dans le cas du régime dominé par la convection forcée.

4.1.4 Champ du vecteur de vitesse

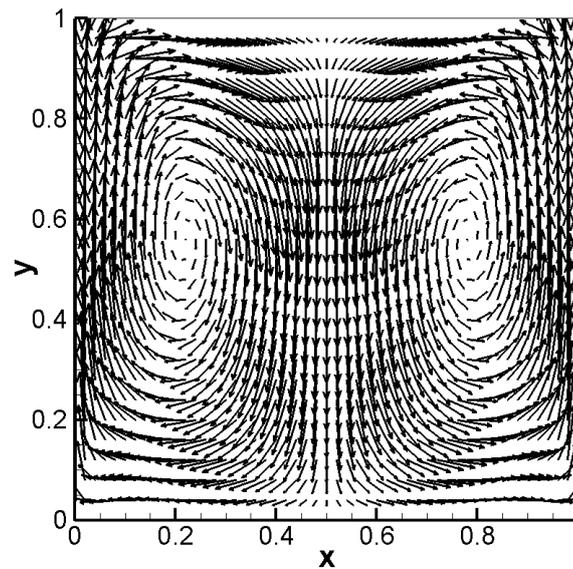
Les champs du vecteur de vitesses sont représentés dans la figure (4.13). Pour ne pas surcharger le contenu de la thèse nous avons tracé ces champs pour les valeurs limites du nombre de Richardson c'est-à-dire $Ri = 0.1$ et $Ri = 15.6$ et pour un nombre de Richardson intermédiaire $Ri = 10$. Dans tous les cas nous constatons que le fluide remonte vers le haut de la cavité grâce aux parois mobiles, contourne la paroi supérieure et redescend le long de l'axe médian de la cavité pour entamer le même cycle. Ceci explique l'allure générale des profils de température de la figure (4.9). Il est également noté une légère intensification de l'écoulement au fur et à mesure que le nombre de Richardson augmente. De plus, un examen méticuleux de ces figures montre que la hauteur du centre des cellules contrarotatives diminue imperceptiblement avec l'augmentation du nombre de Richardson. En effet elle est supérieure à 0.6 pour $Ri = 0.1$; presque égale à 0.6 pour $Ri = 0.6$ et inférieure à 0.6 pour $Ri = 15.6$.



$Ri = 0.1$



$Ri = 10$



$$Ri = 15.6$$

Figure 4.13 : Champ du vecteur de vitesse dans le cas du régime dominé par la convection forcée pour différents nombres de Richardson.

Par ailleurs les profils de la vitesse verticale "V" à $Y = 0.5$ pour différentes valeurs du nombre de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection forcée sont rapportés dans la figure (4.14). Ces profils montrent que le nombre de Richardson n'a aucun effet significatif. Nous remarquons, seulement une pénétration du fluide au niveau de l'axe médian de la cavité qui augmente légèrement avec l'augmentation du nombre de Richardson.

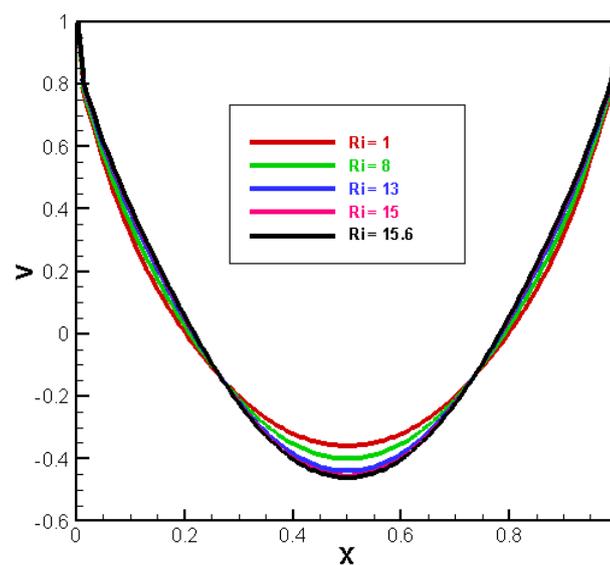


Figure 4.14 : Profils de la vitesse verticale dans le cas du régime dominé par la convection forcée pour différents nombres de Richardson.

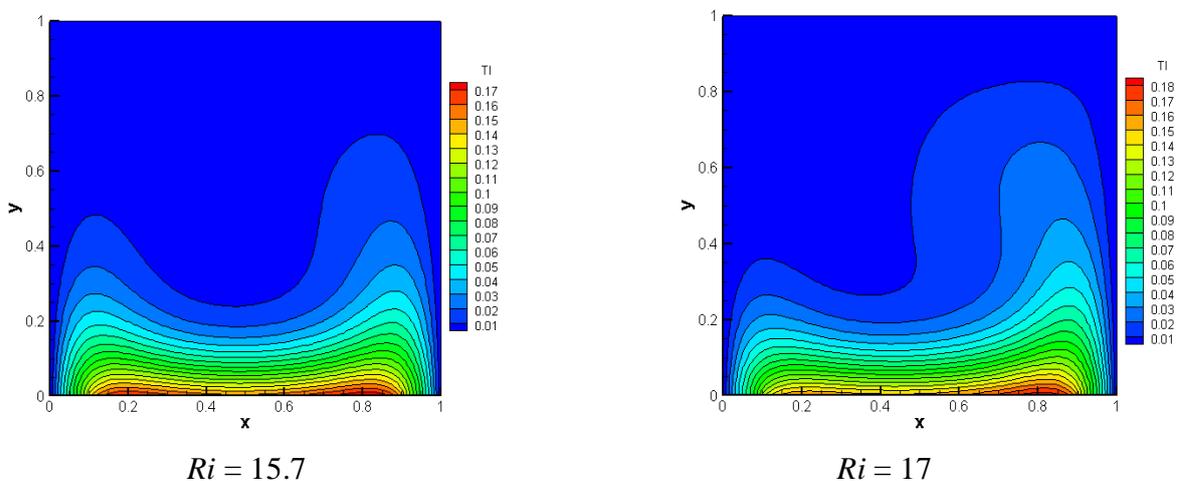
4.2 Régime dominé par la convection mixte $15.7 \leq Ri \leq 41.4$

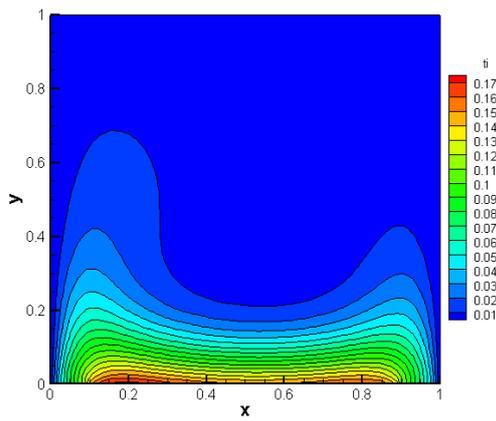
Dans cette plage du nombre de Richardson l'écoulement reste toujours caractérisé par deux cellules contrarotatives et toujours généré seulement par les forces de cisaillement dues aux parois latérales mobiles mais, chose curieuse, l'écoulement se distingue par une perte totale de la symétrie bien que les conditions aux limites soient strictement symétriques. Il faut noter que cette perte de symétrie a été rapportée par plusieurs auteurs déjà signalés dans la partie « bibliographie » et certains l'ont qualifié de « phénomène surprenant » [106], cependant jusqu'à présent elle n'a jamais pu être expliquée d'une manière scientifique et rigoureuse.

4.2.1 Champs thermiques

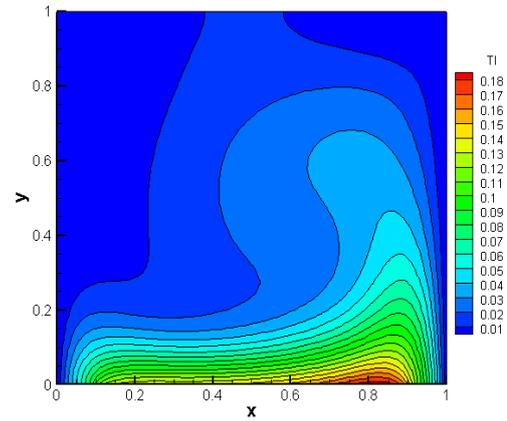
Ces champs sont représentés dans la figure (4.15) pour un nombre de Richardson compris entre 15.7 et 41.4. Dans ce cas nous constatons que la majorité de la chaleur produite par la partie chauffée est évacuée soit par la paroi gauche soit par la paroi droite suivant la valeur du nombre de Richardson. Nous remarquons aussi une pénétration de la chaleur dans la cavité de plus en plus importante quand le nombre de Richardson augmente.

Nous pouvons déduire que, dans ce cas aussi, la dominance des forces de cisaillement dues au glissement des parois mobiles restent prépondérantes par rapport aux forces de flottabilité dues aux gradients de température au niveau de la partie chauffée.

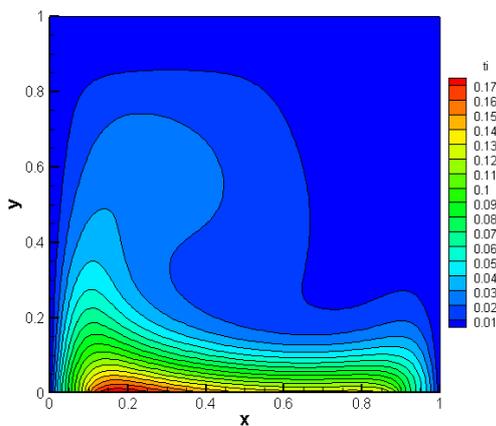




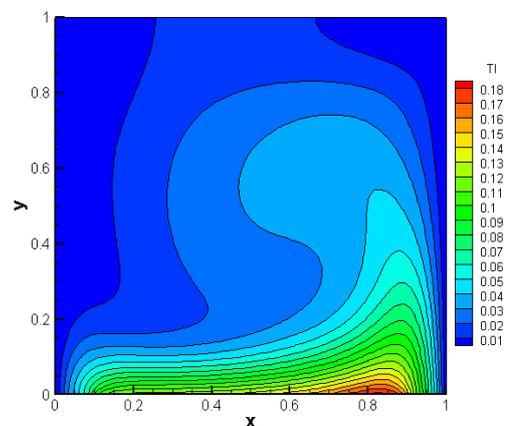
$Ri = 20$



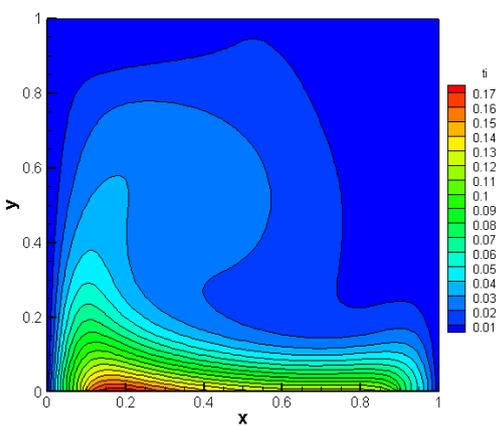
$Ri = 25$



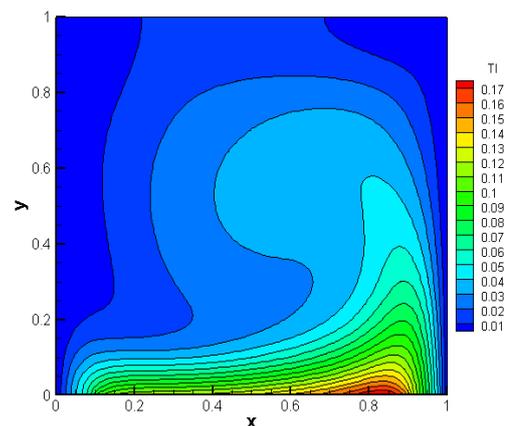
$Ri = 30$



$Ri = 35$



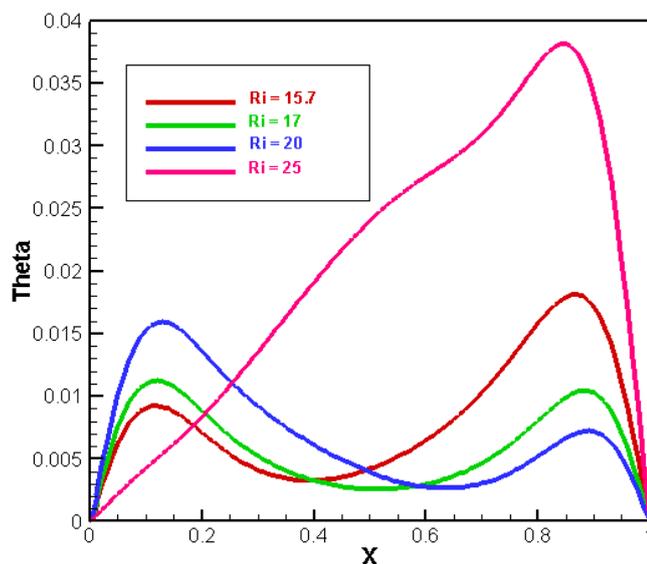
$Ri = 38$



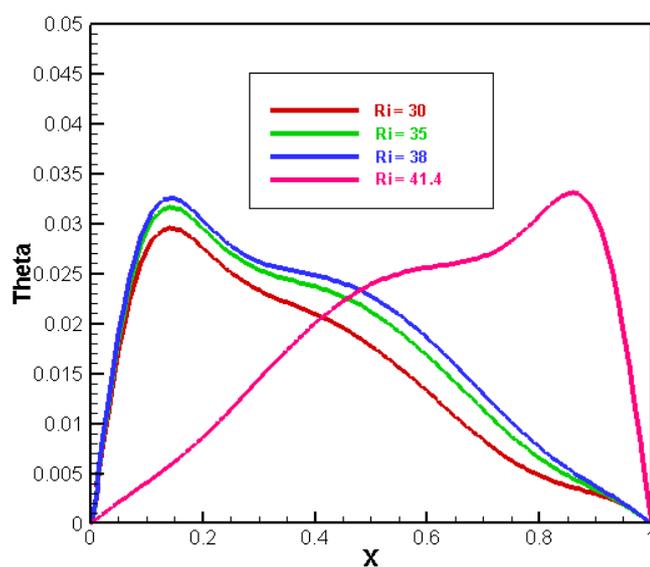
$Ri = 41.4$

Figure 4.15 : Champ thermique dans le cas du régime dominé par la convection mixte (deux cellules non-symétriques) pour différentes valeurs du nombre de Richardson.

Pour plus de détail concernant la distribution de température dans la cavité, nous considérons quelques profils de la température le long du $Y = 0.5$ (figure (4.16)). Ces contours reflètent l'allure générale du champ thermique. Le profil de température présente un pic près de la paroi latérale gauche ou droite, dont l'importance ne cesse de croître avec l'augmentation du nombre de Richardson.



(a) : pour : $Ri = 15.7, 17, 20$ et 25



(b) : pour : $Ri = 30, 35, 38$ et 41.4 .

Figure 4.16 : Profils de température à $Y = 0.5$ pour différents nombres de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection mixte (deux cellules non-symétriques).

4.2.2 Nombre de Nusselt

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur la figure (4.17) pour différents nombres de Richardson. Quel que soit ce nombre cette évolution suit un palier pendant un certain temps, ensuite nous remarquons l'apparition soudaine d'un pic du nombre de Nusselt moyen mettant en évidence une perte de symétrie de l'écoulement (bifurcation). Après ce pic le nombre de Nusselt moyen se stabilise à une valeur fixe.

Nous constatons également, que le temps mis par l'écoulement pour basculer d'un système de deux cellules strictement symétriques à un système de deux cellules non symétriques, est de plus en plus court au fur et à mesure que le nombre de Richardson augmente. Par ailleurs nous notons, clairement que le nombre de Nusselt moyen croît avec l'accroissement du nombre de Richardson.

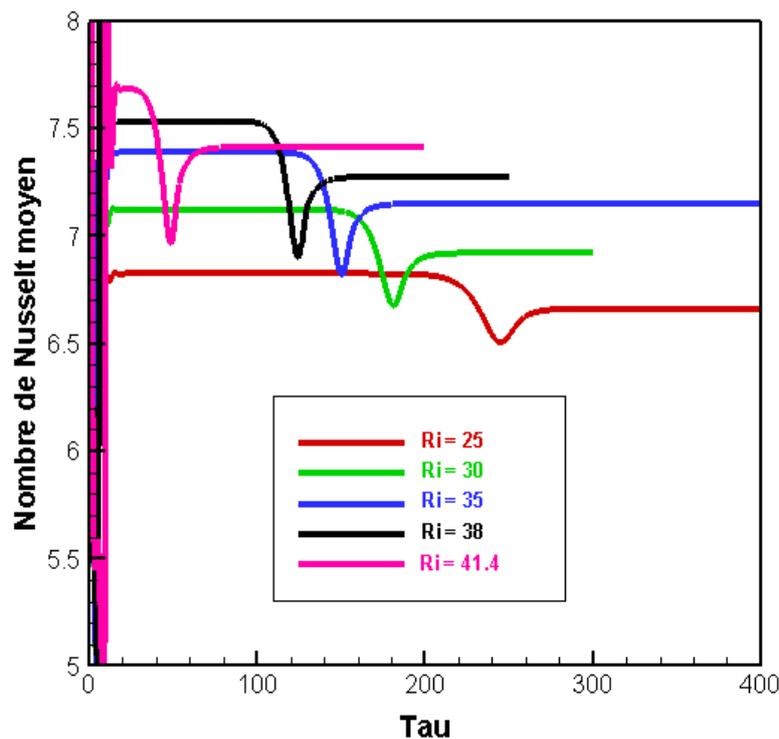


Figure 4.17 : Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du régime dominé par la convection mixte (deux cellules non-symétriques) pour différents nombres de Richardson.

Pour illustrer plus clairement l'apparition de cette première bifurcation nous avons jugé utile de tracer l'évolution du nombre de Nusselt moyen, en réduisant l'échelle de celui-ci, pour les deux nombres de Richardson $Ri = 15.6$ et $Ri = 15.7$. La figure (4.18) montre cette évolution et il est possible d'apporter quelques précisions. La première est que

pour un nombre de Richardson égal à 15.6 le nombre de Nusselt moyen reste constant à une valeur fixe égale à 6.136. Il a suffi d'une augmentation du nombre de Richardson de seulement un dixième pour que le nombre de Nusselt moyen diminue brusquement de 6.144 à 6.118.

La seconde est que si le test standard de convergence communément appliqué pour arrêter les calculs, la solution aurait convergé à $\tau = 15$ alors que l'altération du nombre de Nusselt moyen commence à se produire à $\tau = 12.5 \times 10^3$ pour être stabilisé à $\tau = 22.5 \times 10^3$. Dans ce cas, le nombre d'itérations correspondant peut atteindre environ 225 millions avec un pas de temps $\Delta\tau$ égal à 10^{-4} ; ce qui correspond à un temps de calcul compris entre 2 et 3 jours pour chaque simulation numérique lorsque que le nombre de Richardson est compris entre 15 et 16, sur une "station de travail HP Z820" pour détecter cette première bifurcation. C'est précisément là que réside, pour nous, la difficulté de trouver le nombre de Richardson critique qui caractérise chaque type d'écoulement car il n'existe aucune méthode directe pour déterminer le nombre de bifurcations et les valeurs critiques du nombre de Richardson qui leurs correspondent. Une autre précision est que la recherche de ces valeurs critiques se fait par « dichotomie » comme pour la résolution numérique des équations non-linéaires. L'approche consiste à prendre un intervalle plus ou moins large du nombre de Richardson correspondant à deux comportements différents de l'écoulement et le réduire progressivement pour déterminer la valeur critique.

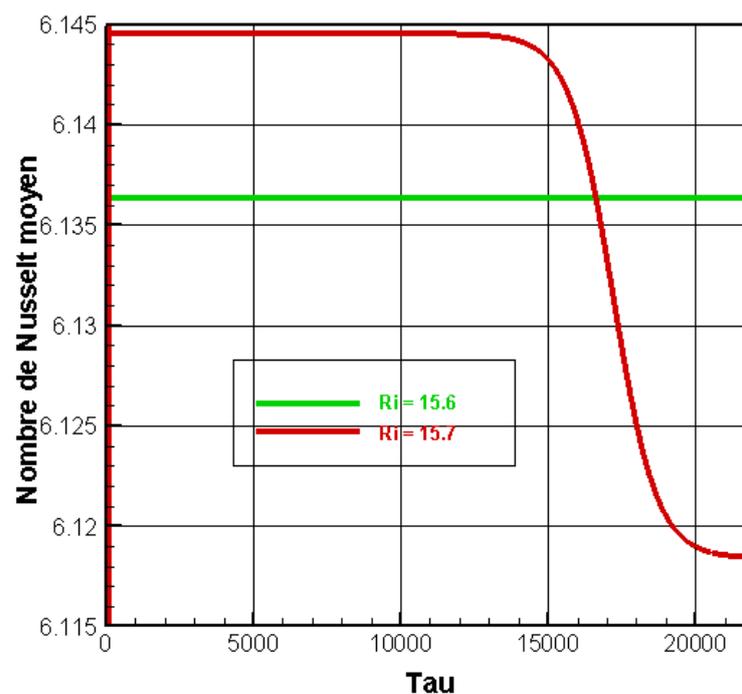
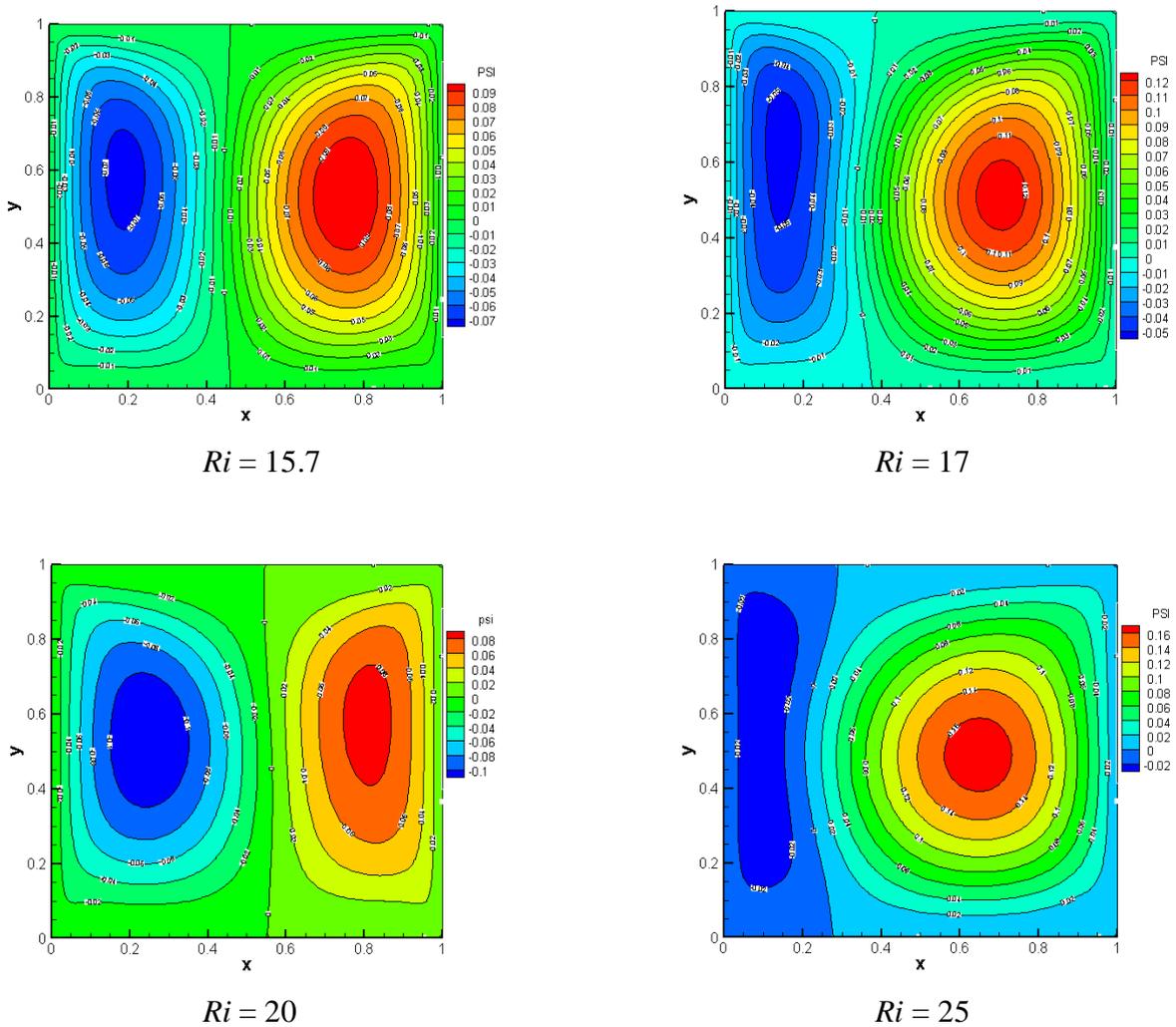


Figure 4.18 : Evolution du nombre de Nusselt moyen pour $Ri = 15.6$ et $Ri = 15.7$.

4.2.3 Champs dynamiques

Ces champs sont représentés dans la figure (4.19). L'écoulement reste toujours caractérisé par deux cellules contrarotatives (régime de convection mixte dominante), mais dans ces cas l'une des cellules possède une taille plus importante que l'autre et cet écart s'accroît quand le nombre de Richardson augmente.



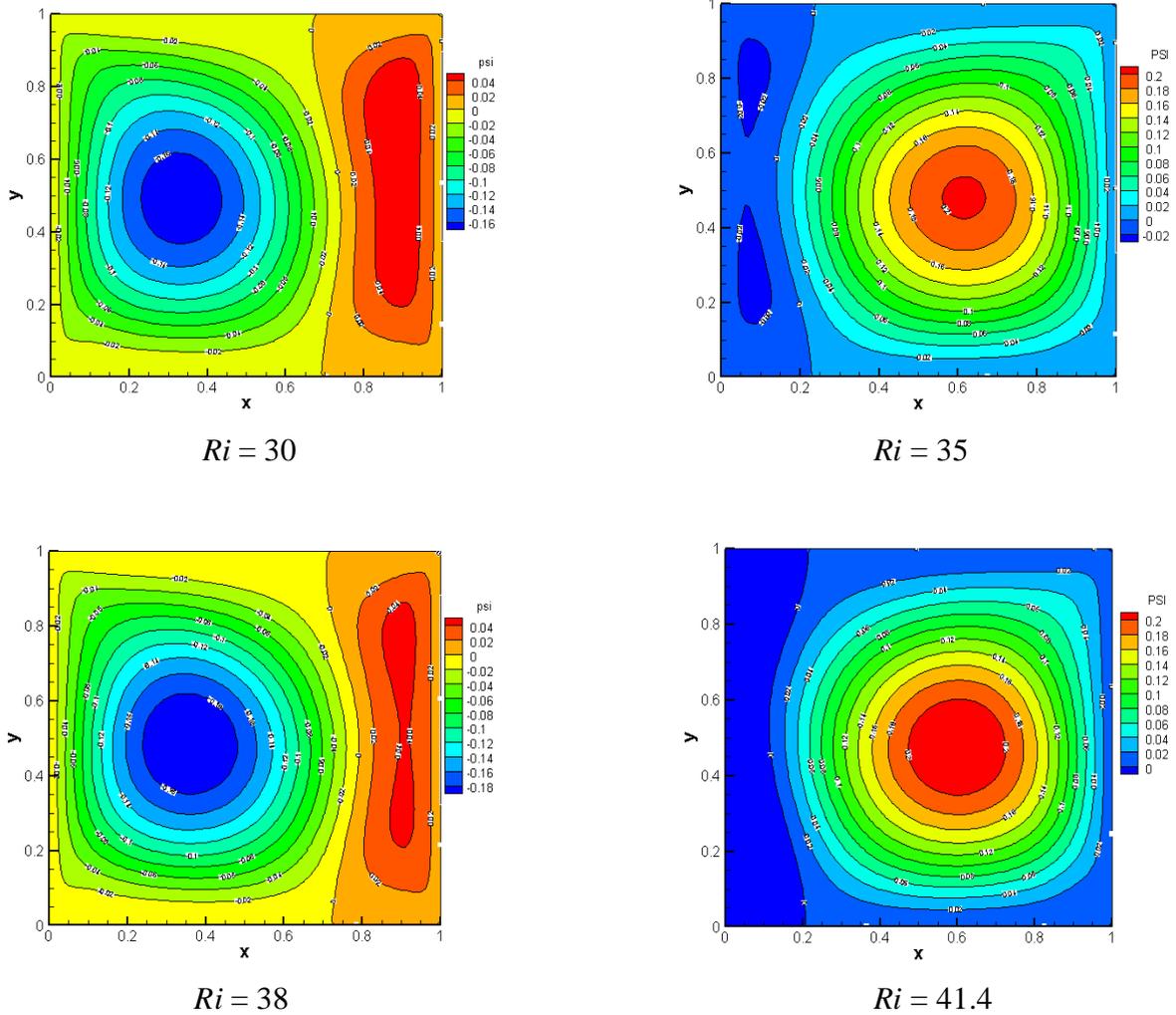
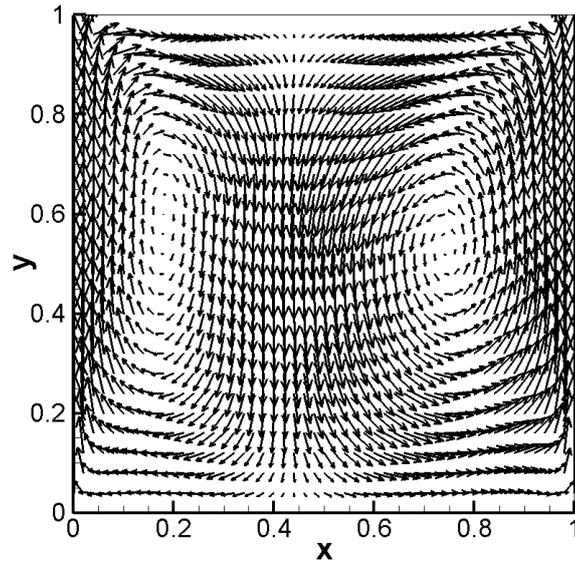


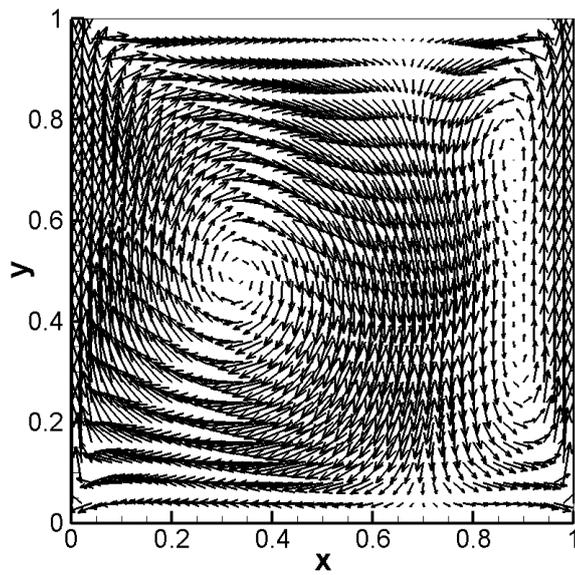
Figure 4.19 : Champ dynamique dans le cas du deuxième type d'écoulement.

4.2.4 Champ du vecteur de vitesse

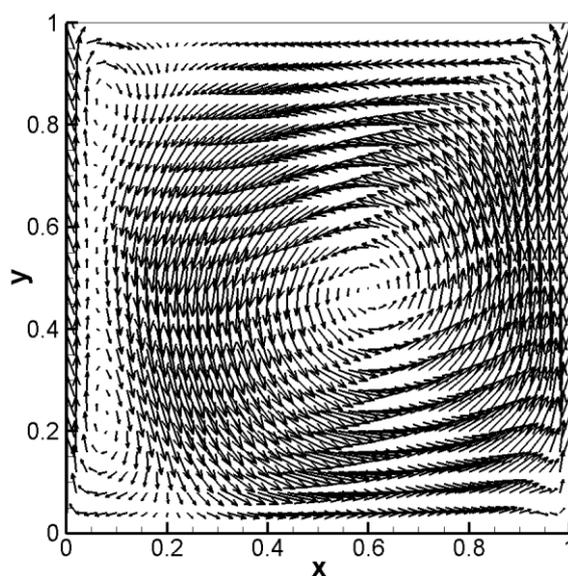
La figure (4.20) illustre la comparaison des champs du vecteur de vitesses. Dans ce cas aussi, nous avons choisi de représenter ces champs pour les valeurs limites du nombre de Richardson c'est-à-dire $Ri = 15.7$ et $Ri = 41.4$ et pour un nombre de Richardson intermédiaire $Ri = 30$. Nous constatons que ces cellules sont toujours au nombre de deux et générées par les forces visqueuses dues au mouvement latéral des parois mobiles. Il faut signaler également que l'une des deux cellules est plus importante que l'autre et que cette disproportion s'accroît quand le nombre de Richardson augmente.



$Ri = 15.7$



$Ri = 30$



$$Ri = 41.4$$

Figure 4.20 : Champ du vecteur de vitesse dans le cas du deuxième type d'écoulement.

Par ailleurs les profils de la vitesse verticale "V" à $Y = 0.5$ pour différentes valeurs du nombre de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection forcée ou les deux cellules sont asymétriques et sont rapportés dans la figure (4.21). Ces profils montrent une nouvelle fois la perte de symétrie de l'écoulement dans la cavité bien que les conditions aux limites soient symétriques par rapport à l'axe vertical passant par le milieu de la cavité.

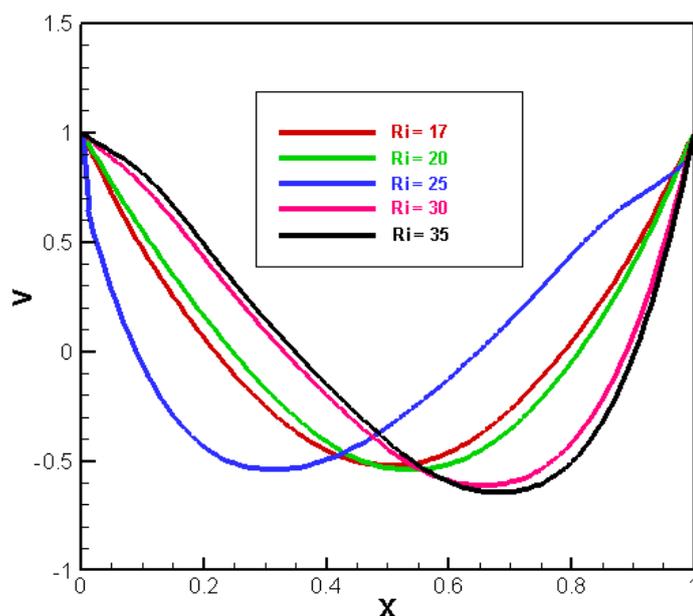


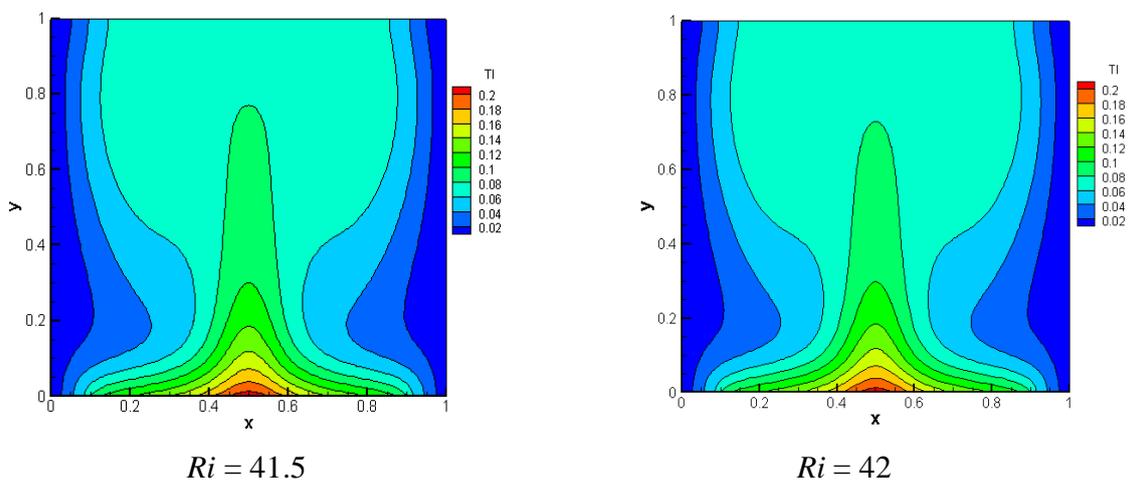
Figure 4.21 : Profils de la vitesse verticale dans le cas du régime dominé par la convection mixte.

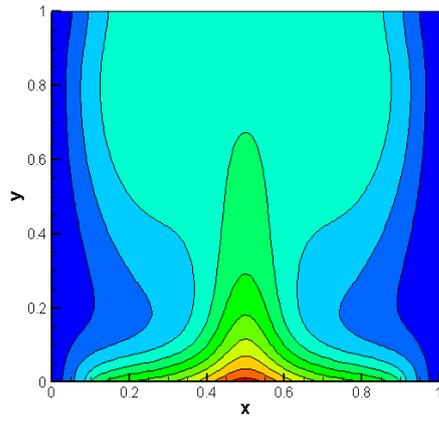
4.3 Régime dominé par la convection naturelle $Ri \geq 41.5$

Ce régime d'écoulement est caractérisé par deux cellules principales contrarotatives situées au milieu de la cavité et deux autres cellules secondaires adjacentes aux parois. Les premières sont générées par les poussées d'Archimède (buoyancy forces) dues aux gradients de la masse volumique alors que les secondes sont engendrées par les forces de cisaillement dues à la viscosité du fluide. Il faut noter qu'à partir de cette valeur critique du nombre de Richardson ($Ri = 41.5$) l'écoulement reste stable et présente une symétrie stricte par rapport à l'axe verticale médian de la cavité.

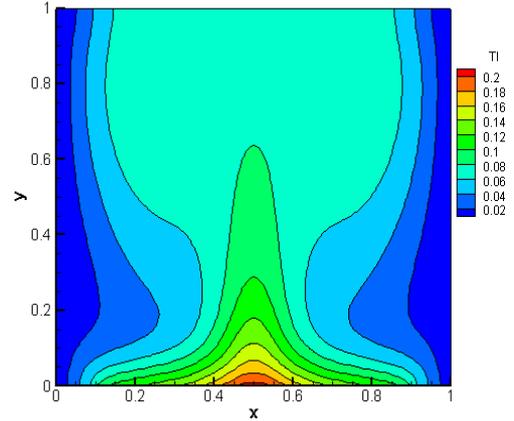
4.3.1 Champs thermiques

Ces champs sont représentés dans la figure (4.22). Dans ce cas et quelle que soit la valeur du nombre de Richardson, la totalité de la chaleur récupérée de la source chaude est convectée sous forme de « panaches » [58], [107] vers le haut à travers l'axe médian de la cavité. Ces résultats mettent en évidence des températures relativement élevées dans la partie centrale de la cavité en comparaison avec celles près des parois latérales.

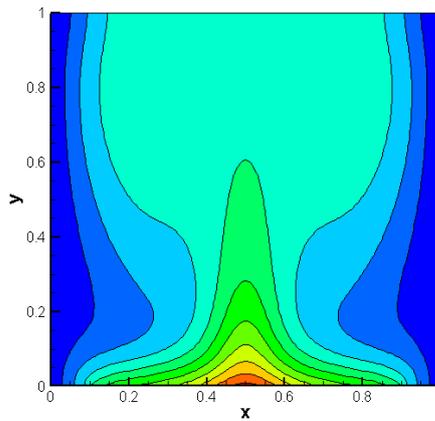




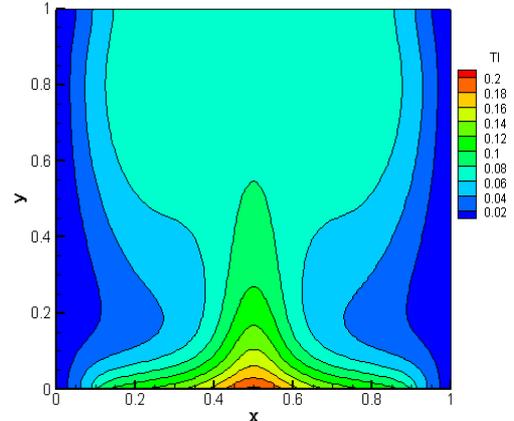
$Ri = 43$



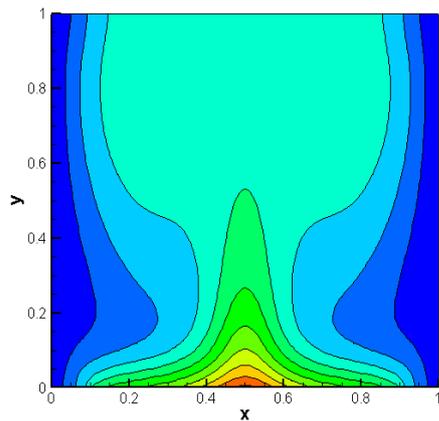
$Ri = 44$



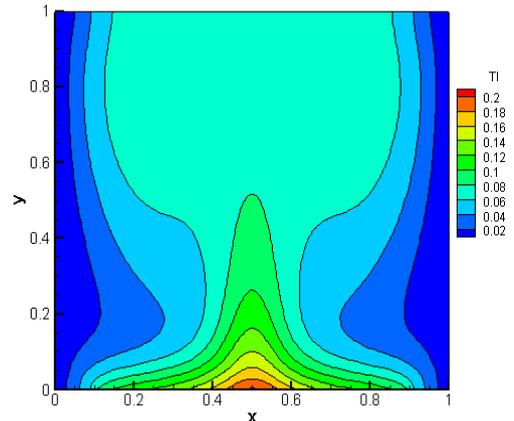
$Ri = 45$



$Ri = 48$



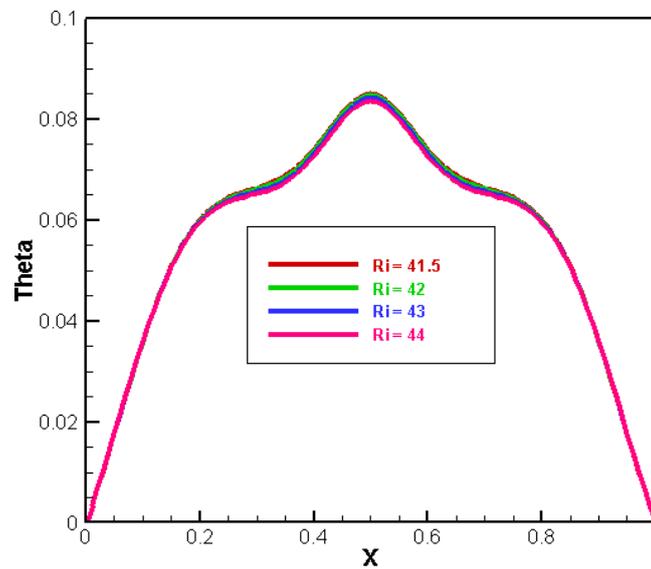
$Ri = 49$



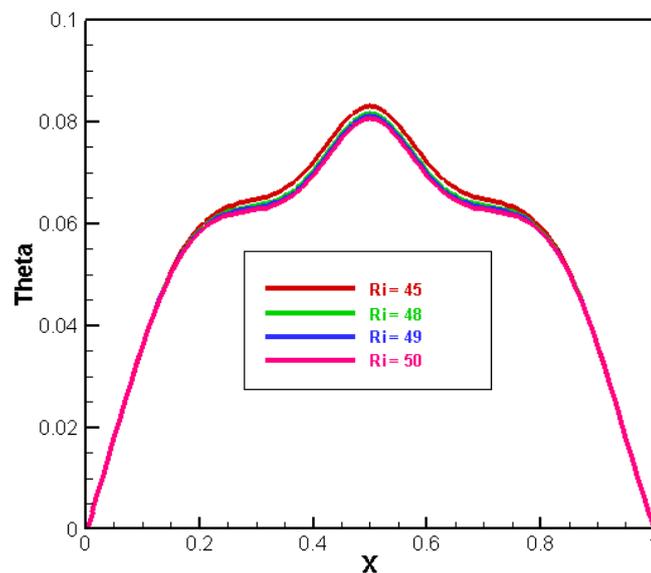
$Ri = 50$

Figure 4.22 : Champ thermique dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différentes valeurs du nombre de Richardson.

Les profils de température à $Y = 0.5$ pour différentes valeurs du nombre de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection naturelle sont rapportés dans la figure (4.23). Ces profils présentent un maximum juste sur l'axe médian avec un étalement légèrement plus important au fur et à mesure que le nombre de Richardson augmente.



(a) : pour : $Ri = 41.5$; 42; 43 et 44.



(b) : pour : $Ri = 45$; 48 ; 49 et 50.

Figure 4.23 : Profils de température à $Y = 0.5$ pour différents nombres de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection naturelle.

4.3.2 Nombre de Nusselt

La figure (4.24) montre l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour différents nombres de Richardson. Nous constatons que cette évolution présente des oscillations plus ou moins importantes suivant la valeur du nombre de Richardson. Leurs amplitudes et leurs fréquences augmentent avec l'augmentation de ce nombre. Ces oscillations s'amortissent au bout d'un certain temps, qui est de plus en plus court quand le nombre de Richardson croit, pour se stabiliser en suite à une valeur constante. C'est pour cela que contrairement à la première bifurcation, cette seconde bifurcation est plus facile à cerner puisque le temps mis pour chaque simulation est nettement moins important (de l'ordre de 60 au lieu de 22.5×10^3).

Par ailleurs l'augmentation du nombre de Richardson a pour but un apport de chaleur plus conséquent dans la cavité ce qui se traduit par une intensification de l'écoulement du fluide et un accroissement du nombre de Nusselt moyen.

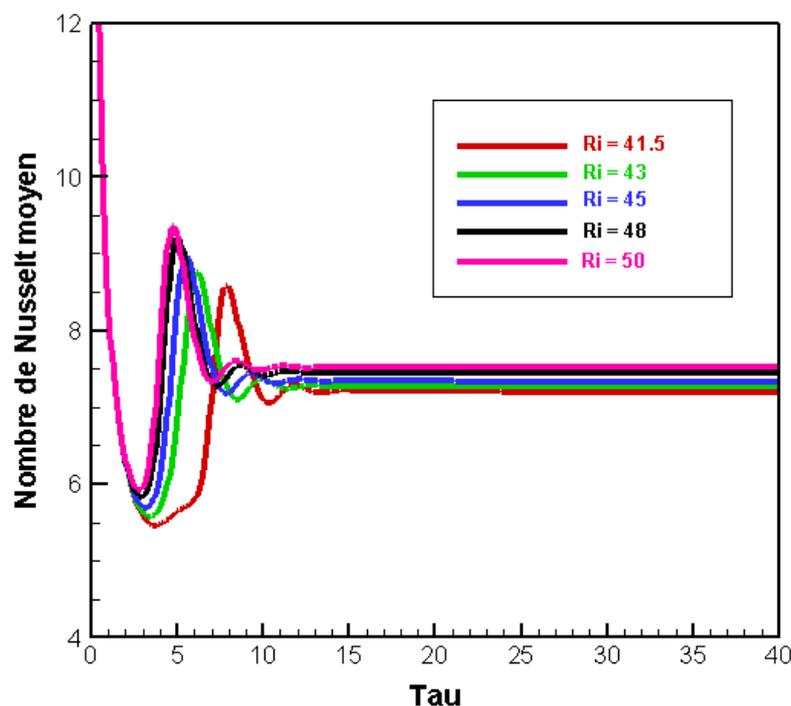
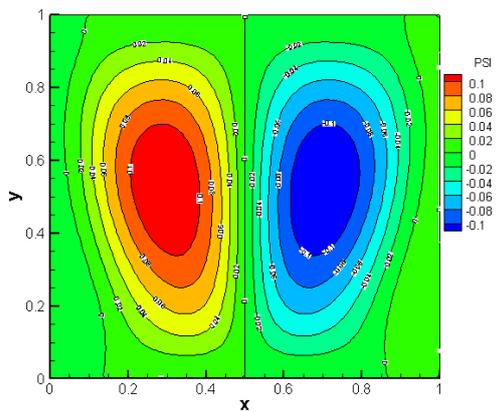


Figure 4.24 : Evolution du nombre de Nusselt moyen dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différents nombres de Richardson.

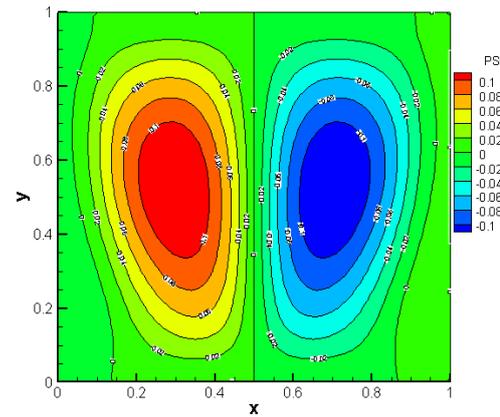
4.3.3 Champs dynamiques

Comme pour les cas précédents nous avons tracé les contours de la fonction de courant caractérisant le comportement de l'écoulement dans la cavité pour les mêmes valeurs de Ri dans la figure (4.25). Cette structure de l'écoulement est très intéressante du point de vue compétition des forces mises en jeu. Lorsque le nombre de Richardson dépasse la valeur limite de 41.5 les forces dues aux gradients de la masse volumique (buoyancy forces) deviennent de plus en plus prédominante au fur et à mesure que le nombre de Richardson augmente. Elles imposent alors la circulation du fluide dans la cavité.

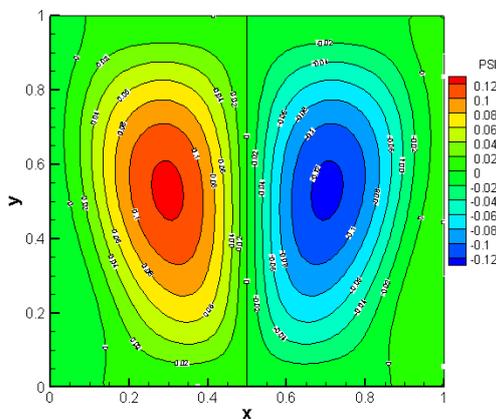
En effet nous constatons que la majeure partie du fluide s'élève le long de la partie chauffée grâce à ces forces, alors les forces dues la viscosité du fluide ne peuvent convecter qu'une infime quantité du fluide à travers deux minces couches adjacentes aux parois latérales. L'épaisseur de ces couches diminue quand le nombre de Richardson augmente.



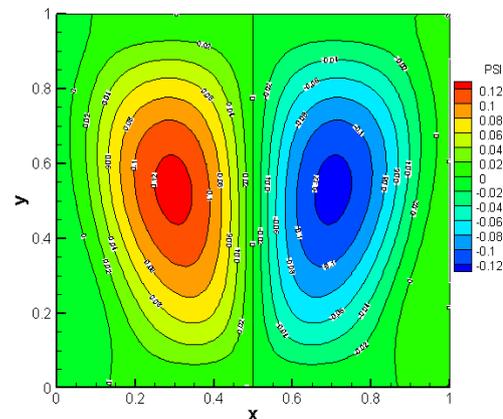
$Ri = 41.5$



$Ri = 42$



$Ri = 43$



$Ri = 44$

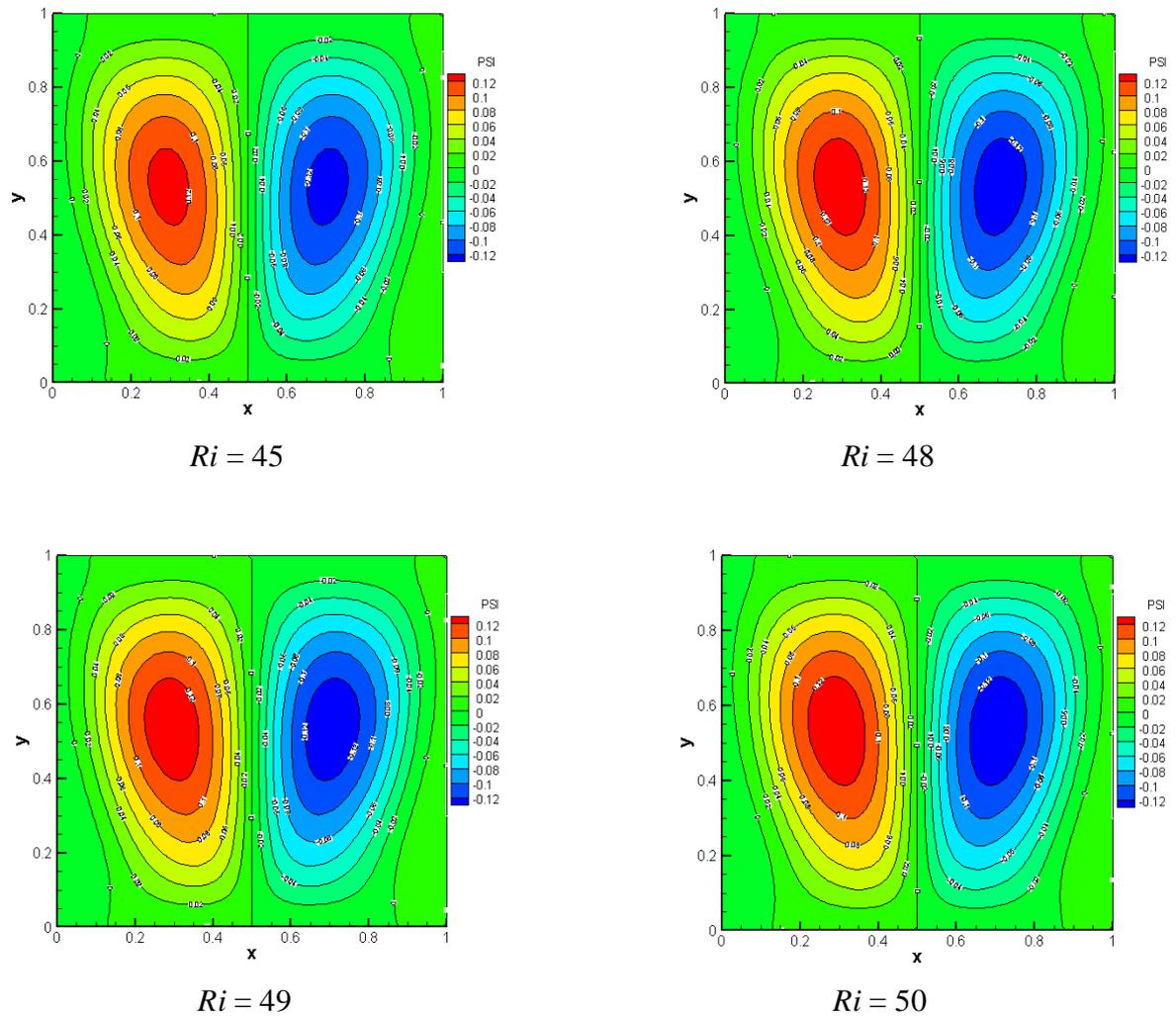
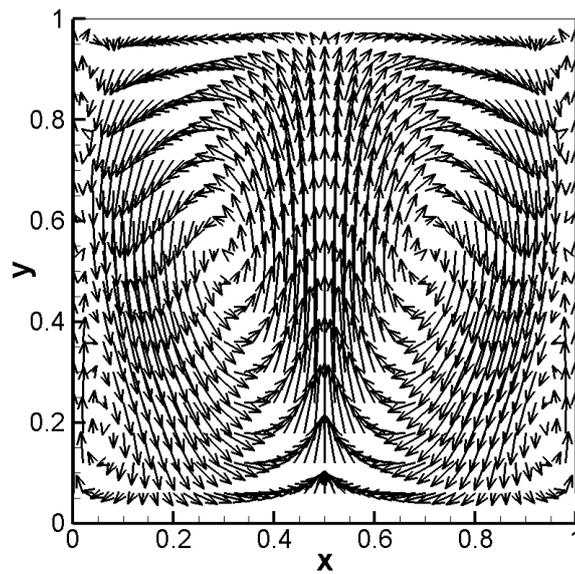


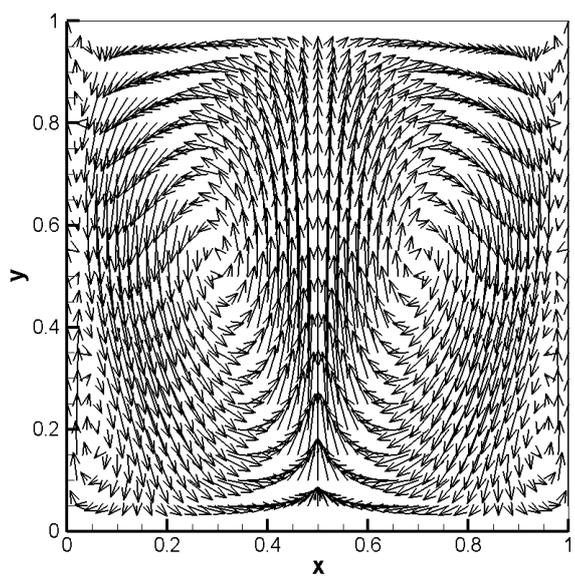
Figure 4.25 : Champ dynamique dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différentes valeurs du nombre de Richardson.

4.3.4 Champ du vecteur de vitesse

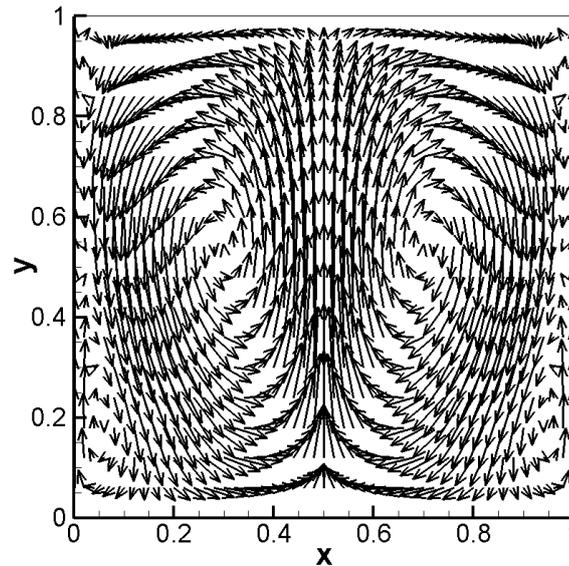
Les champs du vecteur de vitesses sont représentés dans la figure (4.26) pour les valeurs du nombre de Richardson de 41.5 ; 45 et 50. Ces champs montrent la circulation du fluide dans la cavité telle qu'elle est mise en évidence par les fonctions de courant tracées dans la figure précédente. L'intensification de l'écoulement dans ce cas est nettement plus importante que dans les deux cas précédents et elle s'accroît quand le nombre de Richardson augmente.



$Ri = 41.5$



$Ri = 45$



$Ri = 50$

Figure 4.26 : Champ du vecteur de vitesse dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différents nombres de Richardson.

Pour une visualisation quantitative nous avons tracé (figure 4.27) quelques profils de la vitesse verticale " V " à $Y = 0.5$ pour différentes valeurs du nombre de Richardson dans le cas du régime dominé par la convection naturelle. Ces profils montrent que la vitesse verticale " V " croît dans l'axe médian vertical et diminue près des parois latérales expliquant ainsi l'intensification de l'écoulement quand le nombre de Richardson augmente.

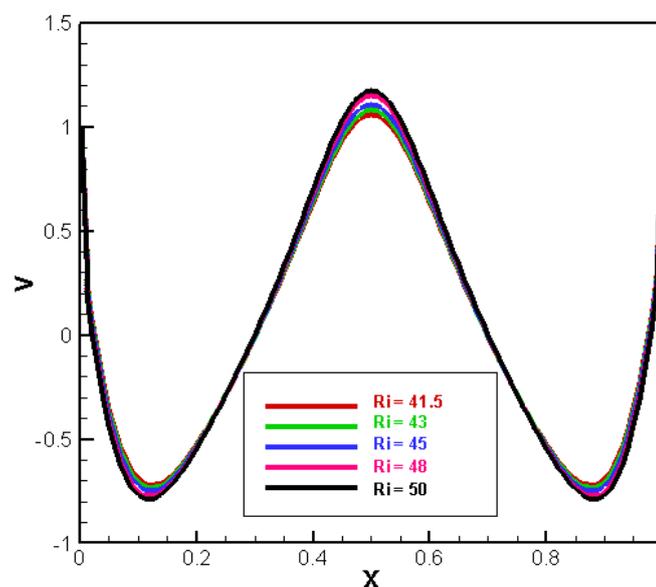


Figure 4.27 : Profils de la vitesse verticale dans le cas du régime dominé par la convection naturelle pour différents nombres de Richardson.

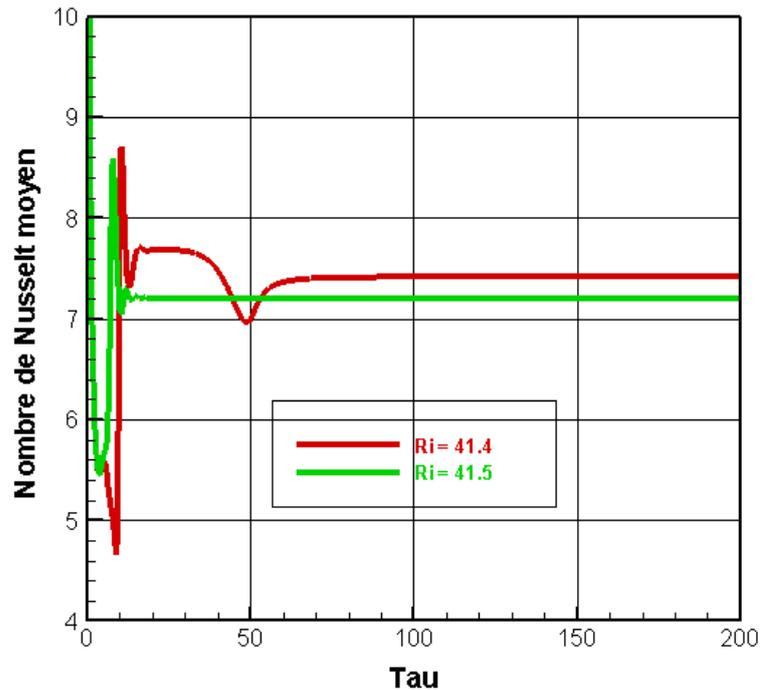


Figure 4.28 : Evolution du nombre de Nusselt moyen pour $Ri = 41.4$ et $Ri = 41.5$.

5. DETAILS DE L'EVOLUTION DES DIFFERENTS ECOULEMENTS

Les tableaux (4.2), (4.3) et (4.4) montrent les instantanés (snapshots) des contours de la fonction de courant (haut) et de la température (bas) pour les trois types d'écoulements, déjà définis précédemment. Le tableau (4.2) montre que, pour un nombre de Richardson $Ri \leq 15.6$, caractérisant le début de la première bifurcation, l'écoulement est constitué de deux cellules symétriques et contrarotatives et cela quel que soit le temps de la simulation. Cependant ces cellules ne cessent de s'intensifier au cours du temps permettant ainsi de soutirer une très faible quantité de chaleur à la source chaude qui se propage le long des parois latérales mobiles. En ce qui concerne les nombres de Richardson dont les valeurs respectives sont 41.4 et 41.5 caractérisant la seconde bifurcation, l'analyse des clichés, indique qu'au tout début ($\tau \leq 2$) l'écoulement est caractérisé par deux cellules contrarotatives générées par le mouvement des parois de la cavité. Le transfert de la chaleur à partir de la partie chauffée est strictement conductif.

Nous constatons, ensuite, l'apparition de deux autres cellules secondaires justes au-dessus de la partie chauffée qui se développent progressivement jusqu'à environ $\tau = 6$. C'est à partir de cet instant que les deux écoulements se distinguent. Pour Ri égale à 41.4 ces deux dernières cellules commencent à se rétracter, sous l'effet des cellules principales

créées par le mouvement des parois latérales pour disparaître entièrement à $\tau = 10$ laissant place au développement de deux cellules symétriques. La chaleur est transférée d'une manière équitable par les parois latérales. Cette symétrie va disparaître progressivement aux environs de $\tau = 25$.

Par contre lorsque " Ri " est égale à 41.5 (soit une augmentation de seulement un dixième de ce paramètre) les deux cellules engendrées par la partie chaude acquièrent une énergie suffisante pour imposer un écoulement caractérisé par deux cellules contrarotatives et symétriques au centre de la cavité. Au fur et à mesure que le temps passe ces deux cellules tendent à confiner les deux autres cellules dues à la convection forcée vers les parois latérales de la cavité. Dans ce cas toute la chaleur de la partie chauffée est transférée symétriquement au centre de la cavité.

Tableau 4.2 : Instantanés de l'écoulement pour $Ri = 15.6$.

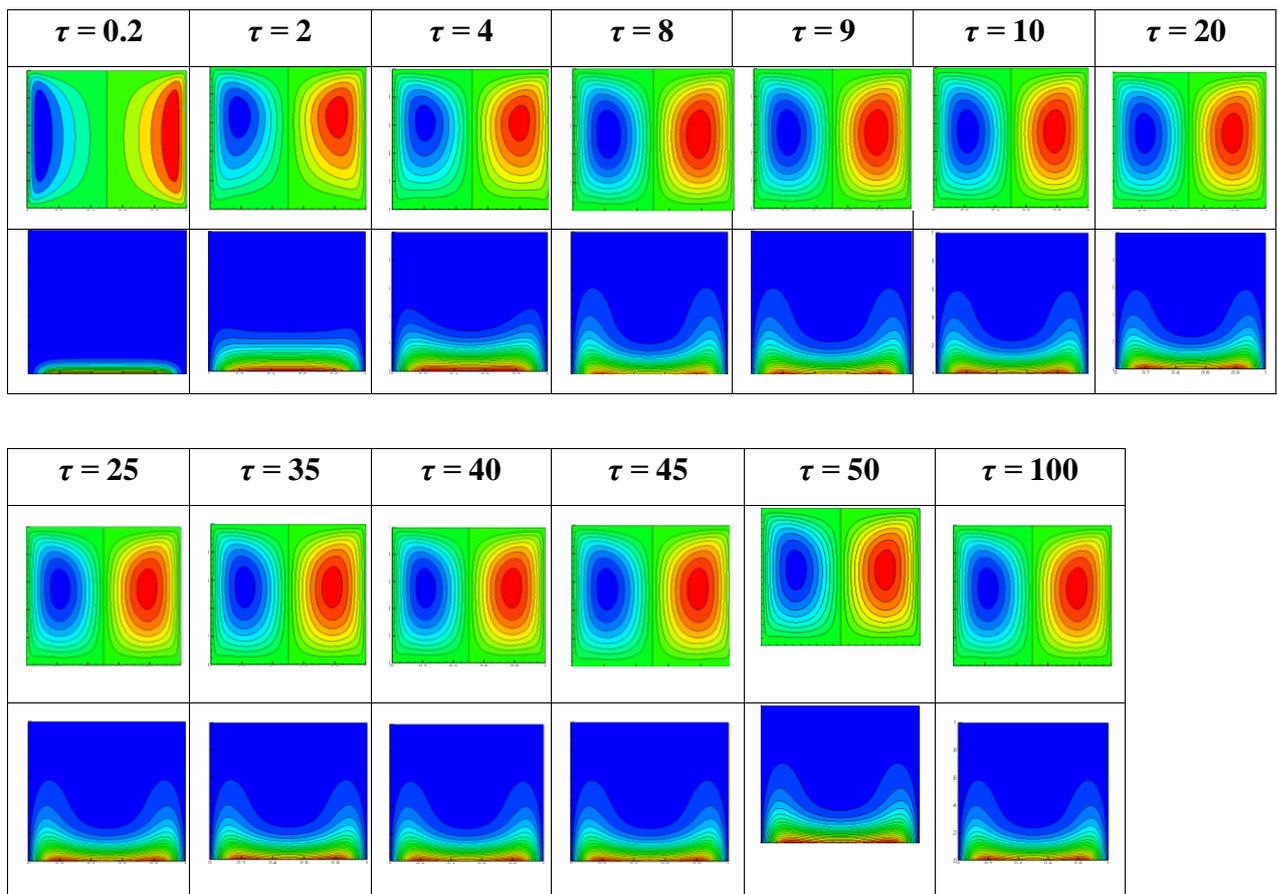


Tableau 4.3 : Instantanés de l'écoulement pour $Ri = 41.4$.

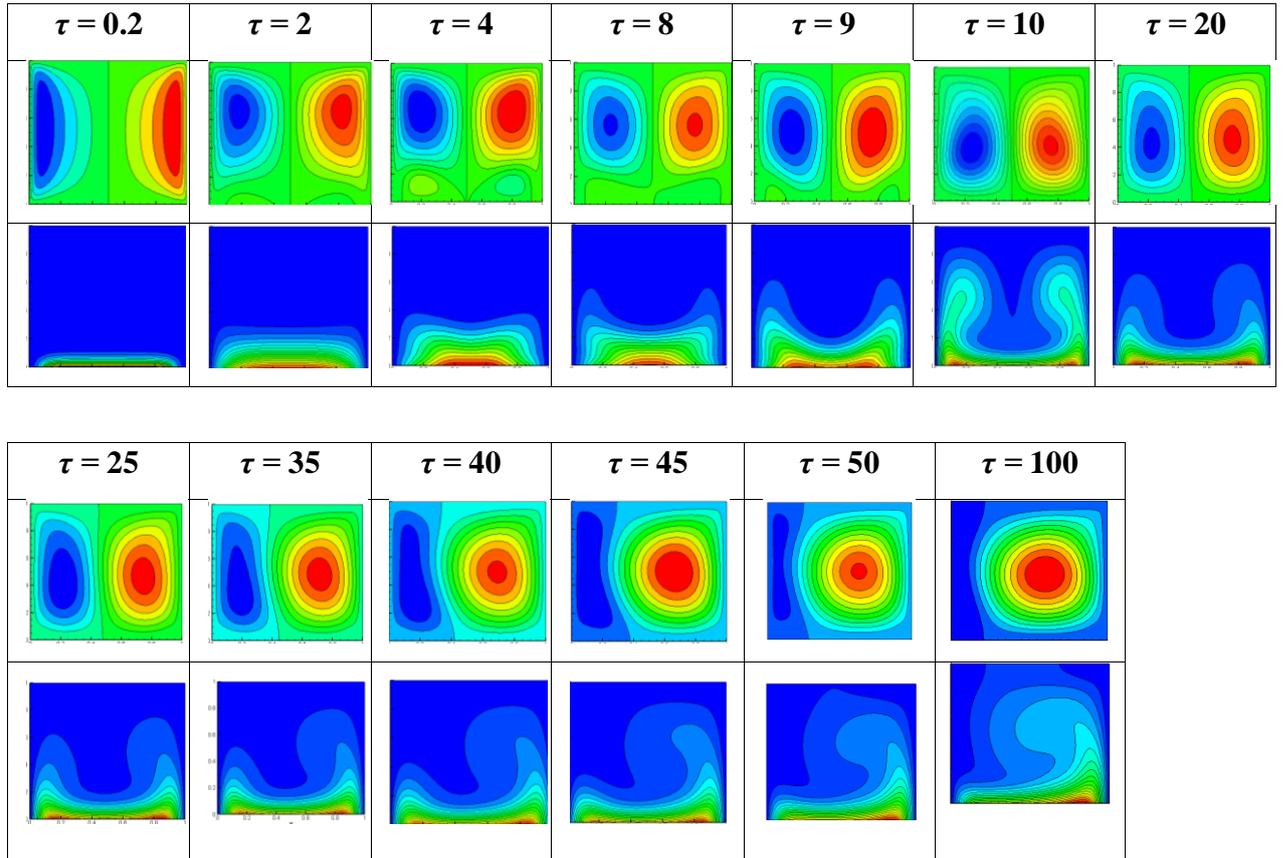
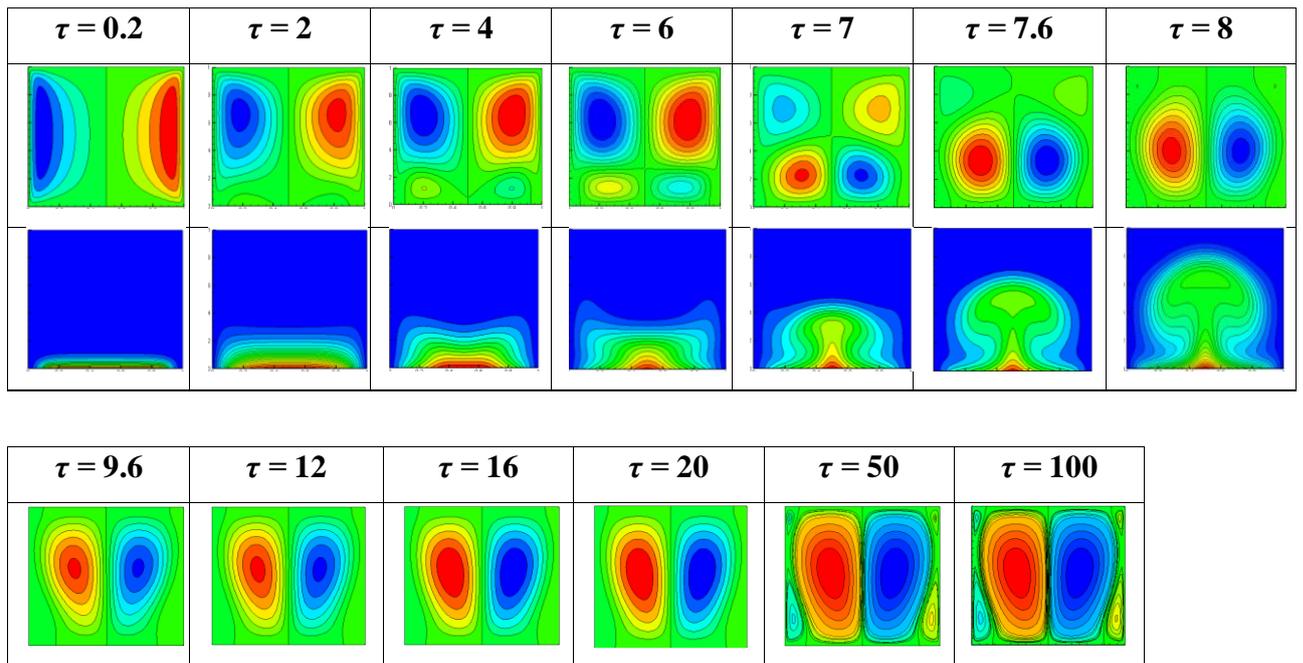
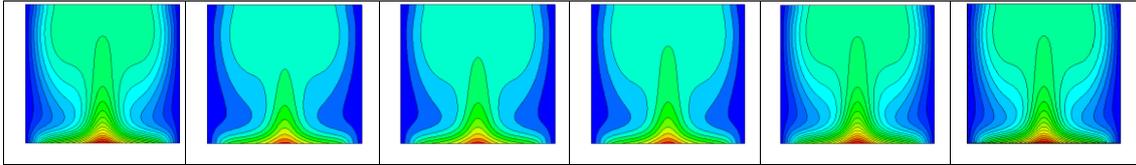


Tableau 4.4 : Instantanés de l'écoulement pour $Ri = 41.5$.





6. CONCLUSION

Ce chapitre a été consacré à la présentation des résultats obtenus lors des simulations numériques faites à l’aide d’un programme établi en langage Fortran. Les champs thermiques et dynamiques ont été déterminés et analysés.

Les résultats obtenus à l’aide de très nombreuses simulations numériques peuvent être résumés par :

- Le tableau (4.5) qui montre l’existence de trois structures d’écoulement totalement différentes en fonction de la valeur du nombre de Richardson qui leurs correspondent.

Tableau 4.5 : Les différents types d’écoulement selon les différents intervalles du nombre de Richardson.

Intervalle du nombre de Richardson	Caractérisation de la structure d’écoulement
$0.1 \leq Ri \leq 15.6$	Convection forcée dominante Deux cellules symétriques
$15.7 \leq Ri \leq 41.4$	Convection mixte dominante Deux cellules non-symétriques
$Ri \geq 41.5$	Convection naturelle dominante Quatre cellules symétriques

- Les tableaux précédents (4.2), (4.3) et (4.4) qui révèlent, à l'aide d'images de l'écoulement prises à des temps choisis, le mécanisme de la formation des différentes cellules de l'écoulement à l'intérieur de la cavité.

Par ailleurs ces résultats montrent clairement que les phénomènes impliquant des forces opposées dans des configurations géométriques où les conditions aux limites sont strictement symétriques (comme c'est le cas ici), peuvent présenter des bifurcations. Dans ces cas, imposer des conditions de symétrie à la géométrie du domaine physique constitue une démarche inappropriée. Plusieurs auteurs, comme par exemple **Pétrone et al.** [108], l'ont déjà signalé ; malheureusement certains auteurs n'ont pas tenu compte [109] et d'autres auteurs continuent de ne pas en tenir compte [110].

CONCLUSION GENERALE

Ce travail constitue une modeste contribution à la maîtrise de la théorie générale et des solutions numériques du phénomène de transfert de la chaleur par convection mixte dans des milieux confinés. La compréhension des caractéristiques de base du transport d'énergie à partir d'une source de chaleur est importante du point de vue fondamental ainsi que des diverses applications techniques et technologiques.

1. PROBLEME CONSIDERE

Le problème considéré dans la présente étude a pour objet l'analyse de la convection mixte laminaire dans une cavité carrée avec des parois latérales verticales refroidies mobiles. Une source de chaleur à flux constant de longueur relative " l " est placée au centre de la paroi inférieure tandis que tous les autres côtés horizontaux de la cavité sont considérés comme adiabatiques.

2. BUT DU TRAVAIL

La résolution d'un écoulement en régime de convection mixte dans des espaces confinés revient à caractériser la structure de l'écoulement en déterminant les champs de vitesses et de températures ainsi que le taux de transfert de chaleur et tenant compte du nombre de Richardson qui mesure l'importance de la convection naturelle par rapport à la convection forcée. Par conséquent, il a été intéressant d'établir le modèle d'écoulement et de prédire les différentes valeurs critiques du nombre de Richardson pour l'apparition de perte de symétrie et de bifurcations présentes dans l'écoulement du fluide dans la configuration géométrique étudiée.

3. INTERET DE L'ETUDE

L'intérêt d'une telle étude est double : premièrement et d'un point de vue théorique, ce travail apportera des éléments, aux connaissances actuelles, permettant de progresser dans la compréhension des phénomènes de bifurcation se produisant dans les écoulements s'impliquant le transfert de la quantité de mouvement et de la chaleur.

Deuxièmement et d'un point de vue pratique, cette étude permettra également de mettre à disposition, d'une façon préliminaire, un outil de dimensionnement et de design pour l'amélioration de la ventilation et du refroidissement de l'appareillage industriel.

4. METHODE DE RESOLUTION

Dans une première étape, nous avons établi le système d'équations gouvernant le phénomène pris en considération dans cette étude. Ce système a été transformé en utilisant la formulation « fonction de courant – vorticité » ($\psi-\omega$) pour éliminer le gradient de pression figurant dans les équations de conservation de la quantité de mouvement et faciliter ainsi sa résolution. Dans une seconde étape nous avons utilisé la méthode numérique basée sur les différences finies pour discrétiser les différents termes des équations du modèle mathématique en utilisant des schémas du quatrième ordre. Dans une troisième étape nous avons développé un programme en langage Fortran pour la résolution des différentes équations discrétisées. Ce code a été validé en comparant nos résultats avec ceux rapportés dans la littérature.

5. PRINCIPAUX RESULTATS

De nombreuses simulations numériques ont été réalisées en considérant le nombre de Richardson comme paramètre d'étude pour caractériser d'une manière complète la structure de l'écoulement en déterminant les champs de vitesses et de températures ainsi que le taux de transfert de chaleur à la paroi chauffée.

Les résultats de ces différentes simulations numériques indiquent clairement l'existence de deux bifurcations se produisant dans la géométrie considérée. La première bifurcation se situe à un nombre de Richardson critique compris entre 15.6 et 15.7 et la seconde bifurcation se situe entre les valeurs 41.4 et 41.5 de ce même nombre. Dans la première bifurcation, le mouvement du fluide résultant consiste en la transition d'un écoulement composé de deux cellules contrarotatives strictement symétriques à un écoulement caractérisé par deux cellules contrarotatives antisymétriques.

Dans la seconde bifurcation, le mouvement du fluide résultant consiste en la transition de l'écoulement caractérisé par deux cellules contrarotatives antisymétriques à un écoulement caractérisé par quatre cellules contrarotatives également symétriques. Une particularité de cette étude est liée à l'absence totale de connaissance a priori de l'existence de bifurcations puisque les conditions aux limites adoptées ici sont parfaitement symétriques.

Ces bifurcations n'auraient pas été révélées, si nous avions considéré la moitié du domaine, avec la condition de symétrie sur l'axe vertical passant par le centre de la cavité et si nous avions utilisé le test classique de convergence de la solution pour arrêter les calculs. Cela aurait conduit à des résultats erronés sur le comportement de l'écoulement du fluide et l'incapacité de trouver les solutions non-symétriques. C'est pour ça que nous pouvons affirmer que dans un écoulement ou la concurrence entre les forces de cisaillement résultant du mouvement des parois latérales combinées aux forces de flottabilité résultant de la source de chaleur peuvent être à l'origine des phénomènes de bifurcation.

6. PERSPECTIVES ET RECOMMANDATIONS

Les résultats présentés dans cette thèse constituent une modeste contribution à l'étude du phénomène de la convection mixte dans des milieux confinés chauffés par le bas (convection mixte du type Bénard). Nous recommandons quelques nouvelles orientations qui pourraient faire l'objet de recherches futures, dont celles-ci :

- D'autres études, impliquant les milieux poreux, les nano fluides et l'influence de champs magnétiques peuvent s'inspirer de ce cas pour être entreprises.
- Les nombres de Reynolds et de Prandtl, figurant dans les équations sans dimensions gouvernant le phénomène étudié, ainsi que le rapport d'aspect de la cavité, peuvent constituer eux aussi d'excellents paramètres d'étude.
- La même configuration géométrique étudiée en trois dimensions et comparée à celle en deux dimensions apporterait sûrement de nouvelles informations sur la structure de l'écoulement.
- La détermination de la valeur limite supérieure du nombre de Richardson pour l'écoulement devient turbulent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1]. **H. Bénard**, "Les tourbillons cellulaires dans une nappe de liquide". *Rev. Gen. Sci. Pures Appl.* Vol. 11, pp. 1261–1271, (1900).
- [2]. **H. Bénard**, "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent." *Ann. Chim. Phys.* Vol. 23, pp. 62–144, (1901).
- [3]. **L. Rayleigh**, "LIX. On convection currents in a horizontal layer of fluid, when the higher temperature is on the underside." *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 32, No. 192, pp. 529–546, (1916).
- [4]. Ch. R. Doering, "Turning up the heat in turbulent thermal convection", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America (PNAS)*, Vol. 117, No. 18, pp. 9671–9673, May 5, (2020).
- [5]. **H. A. Dijkstra, F. W. Wubs, A. K. Cliffe, E. Doedel, I. F. Dragomirescu, B. Eckhardt, A. Y. Gelfgat, A. L. Hazel, V. Lucarini, A. G. Salinger, E. T. Phipps, J. Sanchez-Umbria, H. Schuttelaars, L. S. Tuckerman, U. Thiele**, "Numerical Bifurcation and their Application to Fluid Dynamics: Analysis beyond Simulation", *Comm. Comput. Phys.* Vol. 15, No.1, pp. 1–45, (2014).
- [6]. **S. Mishra, K. Jayaraman**, "Asymmetric Flows in Planar Symmetric Channels with Large Expansion Ratio", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 38, pp. 945–962, (2002).
- [7]. **Y. Guevel, J. M. Cadou, G. Girault**, "Parametric Bifurcation Analysis Coupling the Asymptotic Numerical Method, the Padé Approximants and the Homotopy Technique", *21ème Congrès Français de Mécanique*, Bordeaux, 26 au 30 Août (2013).
- [8]. **N. Ratnadeep, K. Murugesan**, "Numerical study of double diffusive mixed convection in a backward facing step channel filled with Cu-water Nano fluid", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 153–154, pp. 48–63, (2019).

- [9]. **Y. Y. Tsuiand, H. W. Wang**, "Side-wall effects on the bifurcation of the flow through a sudden expansion", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 56, pp. 167–184, (2008).
- [10]. **T. P. Chiang Tony, W. H. Sheu**, "Bifurcations of Flow through Plane Symmetric Channel Contraction", *Journal of Fluids Engineering*. ASME, Vol. 124, No. 2, pp. 444–451, (2002).
- [11]. **A. Quaini, R. Glowinski, S. Čanić**, "Symmetry breaking and Hopf bifurcation for incompressible viscous flow in a contraction-expansion channel", *Numerical Analysis and Scientific Computing Preprint Series*, Department of Mathematics University of Houston October (2014).
- [12]. **G. Pitton, A. Quaini, G. Rozza**, "Computational reduction strategies for the detection of steady bifurcations in incompressible fluid dynamics: Applications to Coanda effect in cardiology", *Journal of Computational Physics*, Vol. 344, pp. 534–557, (2017).
- [13]. **Y. T. Yang, C. F. Hou, Tainan**, "Numerical calculation of turbulent flow in symmetric two-dimensional diffusers", *Acta Mechanica*, Vol. 137, pp. 43–54, (1999).
- [14]. **A. Pellew, R. V. Southwell**, "On maintained convective motion in a fluid heated from below", *Proc. R. Soc. Lond.* Vol. A, No. 176, pp. 312–343, (1940).
- [15]. **S. Chandrasekhar**, "Hydrodynamic and Hydro magnetic Stability", *Oxford University Press*, (1961).
- [16]. **S. H. Davis**, "Convection in a box: linear theory", *J. Fluid Mech.* Vol. 30, pp. 465–478, (1967).
- [17]. **I. Catton**, "Convection in a closed rectangular region: the onset of motion", *ASME J. Heat Trans.* Vol. C, No. 92, pp. 186–188, (1970).
- [18]. **I. Catton**, "The effect of insulating vertical walls on the offset of motion in a heated from below", *Int. J. Heat Mass Transfer Heat Transfer*, Vol. 15, pp. 665–672, (1972).
- [19]. **I. Catton**, "Natural Convection in Enclosures", *Proc. of the 6th Int. Heat Transfer Conference*, Toronto, Canada, Vol. 6, pp. 13–31, (1978).

- [20]. **S. Ostrach**, "Natural Convection in Enclosures", *Advances in Heat Transfer*, Vol. 8, pp. 161–227, (1972).
- [21]. **S. Ostrach**, "Natural Convection in Enclosures", *J. Heat Transfer*, Vol. 110, pp. 1175–1190, (1988).
- [22]. **W. L. Heitz, J. W. Westwater**, "Critical Rayleigh numbers for natural convection of water confined in square cells with L/D from 0.5 to 8", *ASME, J. Heat Trans.* Vol. C, No. 93, pp. 188–196, (1971).
- [23]. **B. Gebhart**, "Natural Convection Flows and Stability", *Advances in Heat Transfer*, Vol. 9, pp. 273–348, (1973).
- [24]. **L. Robillard, C. H. Wang, P. Vasseur**, "Multiple steady states in a confined porous medium with localized heating from below", *Numerical Heat Transfer*, Vol. 13, pp. 91–110, (1988).
- [25]. **M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur**, "Natural convection heat transfer in rectangular cavities partially heated from below". *Journal of Thermo physics and Heat Transfer*, Vol. 6, pp. 255–264, (1992).
- [26]. **M. Mamou, P. Vasseur**, "Thermosolutal Bifurcation Phenomena in Porous Enclosures Subject to Vertical Temperature and Concentration Gradients", *J. Fluid Mech.*, Vol. 395, pp. 61–87, (1999).
- [27]. **Z. Alloui, H. Beji, P. Vasseur, L. Robillard**, "Convection thermo-solutale générée dans une cavité poreuse par une source discrète de chaleur et de masse. www.sft.asso.fr > dir > documents > actes > congres, (2008).
- [28]. **Z. Allouia, L. Dufau, H. Beji, P. Vasseur**, "Multiple steady states in a porous enclosure partially heated and fully salted from below", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 48, No. 3, pp. 521–534, (2009).

- [29]. **V. Erenburg, A. Yu. Gelfgat, E. Kit, P. Z. Bar-Yoseph, A. Solan**, "Multiple states, stability and bifurcations of natural convection in a rectangular cavity with partially heated vertical walls", *J. Fluid Mech.* Vol. 492, pp.63–89, (2003).
- [30]. **A. Y. Gelfgat, P. Z. Bar-Yoseph**, "Multiple solutions and stability of confined convective and swirling flows a continuing challenge", *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 14, No. 2, pp. 213–241, (2004).
- [31]. **A. Y. Gelfgat**, "Three-dimensional instability of axisymmetric flows: Solution of benchmark problems by a low-order finite volume method", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 54, pp. 269–294, (2007).
- [32]. **A. Y. Gelfgat**, "Stability of convective flows in cavities: Solution of benchmark problems by a low-order finite volume method", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, Vol. 53, pp. 485–506, (2007).
- [33]. **A. Y. Gelfgat**, "Computational Modelling of Bifurcations and Instabilities in Fluid Dynamics", *Computational Methods in Applied Sciences*, Springer, (2019).
- [34]. **J. Pallarès, I. Cuesta, F. X. Grau, F. Giralt**, "Natural convection in cubical cavity heated from below at low Rayleigh numbers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 39, pp. 3233–3247, (1996).
- [35]. **J. Pallares, F. X. Grau, F. Giralt**, "Flow Transitions in Laminar Rayleigh-Bénard Convection in a Cubical Cavity at Moderate Rayleigh Numbers", *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 753–769, (1999).
- [36]. **J. Pallares, M. P. Arroyo, F. X. Grau, F. Giralt**, "Experimental laminar Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh and Prandtl numbers", *Experiments in fluids*, Vol. 31, pp. 208–218, (2001).
- [37]. **J. Pallares, I. Cuesta, F. X. Grau**, "Laminar and turbulent Rayleigh-Bénard convection in a perfectly conducting cubical cavity", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 23, pp. 346–358, (2002).

- [38]. **L. Valencia, J. Pallares, I. Cuesta, F. X. Grau**, "Rayleigh-Bénard convection of water in a perfectly conducting cubical cavity: effects of temperature-dependent physical properties in laminar and turbulent regimes", *Numerical Heat Transfer A*, vol. 47, pp. 333–352, (2005).
- [39]. **L. Valencia, J. Pallares, I. Cuesta, F. X. Grau**, "Turbulent Rayleigh-Bénard convection of water in cubical cavities: A numerical and experimental study". *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 50, No. 15, pp. 3203–3215, (2007).
- [40]. **A. Baïri, E. Zarco-Pernia, J. M. García de María**, "A review on natural convection in enclosures for engineering applications. The particular case of the parallel rectangular cavity". *Applied Thermal Engineering*, Vol. 63, pp. 304–322, (2014).
- [41]. **A. H. Hussein, M. M. Awad, L. Kolsi, F. Fathinia, I. Adegun**, "A comprehensive review of transient natural convection flow in enclosures", *J. Basic Appl. Sci. Res.* Vol. 4, pp. 17–27, (2014).
- [42]. **H. F. Öztop, P. Estellé, W. M. Yan, K. Al-Salem, J. Orfi, O. Mahian**, "A brief review of natural convection in enclosures under localized heating with and without Nano fluids", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 60, pp.37–44, (2015).
- [43]. **A. Soman, P. Anu Nair, R. Babu, P. K. Sambath Kiran, V. S. Sumesh**, "Study on Natural Convection Heat Transfer In an Enclosure – A review", *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering (IOSR-JMCE)*, Vol. 13, pp. 26–30, (2016).
- [44]. **S. Arun, A. Satheesh, C. G. Mohan, P. Padmanathan, D. Santhoshkumar**, "A review on natural convection heat transfer problems by Lattice Boltzmann Method", *Journal of Chemical and Pharmaceutical Sciences (JCPS)*, Vol. 10, pp. 635–645, (2017).
- [45]. **D. Angeli, P. Levoni, G. S. Barozzi**, "Numerical predictions for stable buoyant regimes within a square cavity containing a heated horizontal cylinder", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 51, pp. 553–565, (2008).

- [46]. **D. Angeli, A. Pagano, M. A. Corticelli, A. Ficherab, G. S. Barozzi**, "Bifurcations of natural convection flows from an enclosed cylindrical heat source", *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, Vol. 2, No. 023003, (2011).
- [47]. **D. Angeli, A. Pagano**, "Nonlinear dynamics of a confined buoyant flow", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 68, pp. 20–31, (2013).
- [48]. **D. Angeli¹, A. Pagano, M. A. Corticelli, A. Fichera, G. S. Barozzi**, "Analysis of the bifurcating orbits on the route to chaos in confined thermal convection", *Chaotic Modeling and Simulation (CMSIM)*, Vol. 2, pp. 289–296, (2013).
- [49]. **D. Angeli, M. A. Corticelli, A. Fichera, A. Pagano**, "Appearance of quasi periodicity within a period doubling route to chaos of a swaying thermal plume", *Journal of Physics: Conference Series*, Vol. 501, No. 012022, (2014).
- [50]. **A. Pagano, D. Angeli**, "On the bimodal nature of a confined buoyant plume. Part I: A topological and analytical insight", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 99, pp. 195–203, (2016).
- [51]. **A. Abdulkadhim, K. Al-Farhany, A. M. Abed, H. Sh. Majdi**, "Comprehensive Review of Natural Convection Heat Transfer in Annulus Complex Enclosures", *Al-Qadisiyah Journal for Engineering Sciences*, Vol. 13, pp. 80–90, (2020).
- [52]. **A. Rahimi, A. Dehghan Saei, A. Kasaeipoor, E. Hasani Malekshah**, "A comprehensive review on natural convection flow and heat transfer: the most practical geometries for engineering applications", *International Journal of Numerical Methods in Heat & Fluid Flow*, Vol. 29, pp. 834–877, (2018).
- [53]. **K. E. Torrance, L. Orloff, J. A. Rockett**, "Experiments on natural convection in enclosures with localized heating from below", *J. Fluid Mech.* Vol. 36, pp. 21–31, (1969).
- [54]. **K. E. Torrance, J. A. Rockett**, "Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below—creeping flow to the onset of laminar instability", *J. Fluid Mech.* Vol. 36, pp. 33–54, (1969).

[55]. **K. E. Torrance**, "Natural convection in thermally stratified enclosures with localized heating from below", *J. Fluid Mech.* Vol. 95, pp. 477–495, (1979).

[56]. **O. Aydin, W-J. Yang**, "Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides", *International Journal of Numerical Methods for heat and fluid flow*, Vol. 10, No. 5, pp. 518–529, (2000).

[57]. **B. Calcagni, F. Marsili, M. Paroncini**, "Investigation of the effects of the dimension of a localized heat source on the natural convection in square cavities", *Computational Methods and Experimental Measurements XII, WIT Transactions on Modelling and Simulation*, Vol. 41, pp. 727–735, (2005).

[58]. **B. Calcagni, F. Marsili, M. Paroncini**, "Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below", *Applied Thermal Engineering*, Vol. 25, pp. 2522–2531, (2005).

[59]. **F. Corvaro, M. Paroncini**, "Experimental analysis of natural convection in square cavities heated from below with 2D-PIV and holographic interferometry techniques", *Experimental Thermal and Fluid Science*, (2006).

[60]. **F. Corvaro, M. Paroncini**, "The Natural Convective Heat Transfer in a Partially Divided Enclosure: A Study on the Influence of the Source Position", *Journal of Thermodynamics*, Vol. 2009, Article ID 792370, 10 pages.

[61]. **F. Zouiri, M. A. Oulmane, N. Labsi, Y. K. Benkahla, A. Boutra**, "Convection naturelle au sein d'une cavité carrée munie d'une source chauffante placée sur sa paroi inférieure", *23^{ème} Congrès Français de Mécanique*, Lille, 28 Août au 1er Septembre, (2017).

[62]. **Md. Mamun Molla, S. C. Saha, M. A. I. Khan**, " Natural convection flow in a porous enclosure heating from below", *JP Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 6, pp. 1–16, (2012).

- [63]. **Md. Noor-A-Alam Siddiki**, "Free convective heat transfer in a square cavity with heated from below and Symmetrically cooling from the sides", *International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, Vol. 2, pp. 1041–1045, (2015).
- [64]. **T. Naffouti, R. Djebali**, "Natural Convection Flow and Heat Transfer in Square Enclosure Asymmetrically Heated from Below: A Lattice Boltzmann Comprehensive Study", *CMES*, Vol. 88, pp. 211–227, (2012).
- [65]. **G. Saha, S. Saha, M. Q. Islam, M. A. R. Akhanda**, "Natural convection in enclosure with discrete isothermal heating from below", *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, Vol. 4, pp.1–13, (2007).
- [66]. **M. T. Nguyen, A. M. Aly, S. W. Lee**, "Unsteady natural convection heat transfer in a Nanofluid-filled square cavity with various heat source conditions", *Advances in Mechanical Engineering*, Vol. 8, pp. 1–18, (2016).
- [67]. **A. Bouhelal, S. Lebbihi, N. Benrachi, A. Smaili**, "Simulation de la convection naturelle autour d'une source de chaleur localisée au fond d'une enceinte remplie de nano fluide", *CFD & Tech*, Vol. 2016, CRND-Draria, Alger, 02 – 03 Mai, (2016).
- [68]. **A. Kasaeian, R. D. Azarian, O. Mahian, L. Kolsi, A. J. Chamkha, S. Wongwises, I. Pop**, "Nano fluid flow and heat transfer in porous media: A review of the latest developments", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 107, pp. 778–791, (2017).
- [69]. **A. Raisi**, "Natural Convection of Non-Newtonian Fluids in a Square Cavity with a Localized Heat Source", *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 62, No. 10, pp. 553–564, (2016).
- [70]. **M. Corcione**, "Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above". *International Journal of Thermal Sciences*, Vol.42, No. 2, pp. 199–208, (2003).

- [71]. **T. Basak, S. Roy, A. R. Balakrishnan**, "Effects of thermal boundary conditions on natural convection flows within a square cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 49, pp. 4525–4535, (2006).
- [72]. **T. Basak, Ali J. Chamkha**, "Heatline analysis on natural convection for Nano fluids confined within square cavities with various thermal boundary conditions", *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Vol. 55, pp. 5526–5543, (2012).
- [73]. **Aswatha, C. J. G. Gowda, S. N. Sridhara, K. N. Seetharamu**, "Effect of convective boundary conditions at bottom wall on natural convection in a square cavity", *Journal of Engineering Science and Technology*, Vol. 8, No. 2, pp. 141–164, (2013).
- [74]. **N. S. Gibanov, M. A. Sheremet**, "Effect of the buoyancy force on natural convection in a cubical cavity with a heat source of triangular cross-section", *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* Vol. 124, No. 012057, Tomsk, Russia, (2016).
- [75]. **N. S. Bondareva, M. A. Sheremet**, "Numerical simulation of natural convection melting in 2D and 3D enclosures", *Journal of Thermal Engineering*, Vol. 5, pp. 51–61, (2019).
- [76]. **D. S. Loenko, A. Shenoy, M. A. Sheremet**, "Natural Convection of Non-Newtonian Power-Law Fluid in a Square Cavity with a Heat-Generating Element", *Energies*, Vol. 12, No. 2149, (2019).
- [77]. **W. Aich**, "3D Buoyancy Induced Heat Transfer in Triangular Solar Collector Having a Corrugated Bottom Wall", *Engineering, Technology & Applied Science Research*, Vol. 8, pp. 2651–2655, (2018).
- [78]. **Krishne Gowda B. Mote Gowda, Madurai S. Rajagopal, Aswatha & Kankanhalli N. Seethramu**, "Numerical Studies on Natural Convection in a Trapezoidal Enclosure With Discrete Heating", *Heat Transfer Engineering*, Vol. 41, pp. 595–606, (2020).

- [79]. **A. Bouras, D. Taloub, A. Beghidja, Z. Driss**, "Laminar Natural Convection Study in a Horizontal Half-Elliptical Enclosure Using Heater on Horizontal Wall", *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, Vol. 53, pp. 223–233, (2019).
- [80]. **G. E. Ovando Chacón, S. L. Ovando Chacón**, "Forced and natural convection heat transfer in a lid-driven cavity", *Memorias Del 14 Congreso Internacional Anual de la Somim*, 17 al 19 de Septiembre, Puebla, México, (2008).
- [81]. **B. Dahdi, O. Kholai, S. Boudebous, M. Mamou, Z. Nemouchi**, "Multiple Solutions of Mixed Convection in a Cavity Locally Heated From Below With Moving Sidewalls", *19th Annual Conference of the CFD Society of Canada*, in Montreal, April 27–29, (2011).
- [82]. **N. Biswas, N. K Manna**, "Transport phenomena in a sidewall-moving bottom-heated cavity using heat lines", *Indian Academy of Sciences, Sadhana*, Vol. 42, No. 2, pp. 193–211, (2017).
- [83]. **S. Eutamene, S. Boudebous Saadoun, F. Berrahil, O. Kholai, B. Dahdi, A. Filali**, "Unsteady Mixed Convection in a Cubic Lid-Driven Cavity Partially Heated from the Bottom", *Journal of Advanced Research in Fluid Mechanics and Thermal Sciences*, Vol. 57, pp. 275–287, (2019).
- [84]. **O. Aydin, W-J. Yang**, "Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls", *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 37, pp. 695–710, (2000).
- [85]. **G. Guo, M. A. R. Sharif**, "Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 43, pp. 465–475, (2004).
- [86]. **Ali Khaleel Kareem Al-Khafaji**, "Mixed Convection Heat Transfer Enhancement in Lid-Driven Cavities Filled with Nano fluids", *Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy at the University of Leicester*, June (2018).

- [87]. **A. Kareem, S. Gao**, "CFD Investigation of Turbulent Mixed Convection Heat Transfer in a Closed Lid- Driven Cavity", *International Journal of Civil, Environmental, Structural, Construction and Architectural Engineering*, Vol. 9, pp. 1546–1551, (2015).
- [88]. **A. K. Kareem, S. Gao, A. Q. Ahmed**, "Unsteady simulations of mixed convection heat transfer in a 3D closed lid-driven cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 100, pp. 121–130, (2016).
- [89]. **A. K. Kareem, S. Gao**, "Computational study of unsteady mixed convection heat transfer of Nano fluids in a 3D closed lid-driven cavity", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 82, pp. 125–138, (2017).
- [90]. **M. A. S. Mustafa, H. M. Hussain, A. A. Abtan, L. J. Habeeb**, "Review on Mixed Convective Heat Transfer in Different Geometries of Cavity with Lid Driven", *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, Vol. 43, pp. 12–25, (2020).
- [91]. **L. Yang, K. Du**, "A comprehensive review on the natural, forced, and mixed convection of non-Newtonian fluids (Nano fluids) inside different cavities", *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, Vol. 140, pp. 2033–2054, (2020).
- [92]. **S. Izadi, T. Armaghani, R. Ghasemiasl, A. J. Chamkha, M. Molana**, "A comprehensive review on mixed convection of Nano fluids in various shapes of enclosures", *Powder Technology*, Vol. 343, pp. 880–907, (2019).
- [93]. **R. B. Bird, W. E. Stewart, E.N. Lightfoot**, "Transport Phenomena", *John Wiley & Sons*, New York, (2006).
- [94]. **J. Padet**, "Fluides en écoulement, Méthodes et modèles", *Société Française de Thermique*, 2 ème Edition, (2011).
- [95]. **J. Boussinesq**, "Theorie analytique de la chaleur", Vol. 2. Gauthier-Villars, Paris, (1903).

- [96]. **A. Oberbeck**, "Ueber die warmeitung der flussigkeiten beiberucksichtigung derstromungen in folge von temperature differenzen". *Annalen der physic und Chemie*, Vol. 243, No. 6, pp. 271–292, (1879).
- [97]. **M. Roy, S. Roy, T. Basak**, "Analysis of entropy generation on mixed convection in square enclosures for various horizontal or vertical moving wall(s)", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 68, pp. 258–266, (2015).
- [98]. **M. BELHI**, "Etude Numérique de la Convection Naturelle dans une Cavité Ayant Plusieurs Entrées". *Mémoire de Magister en Génie Mécanique Option : Thermo-Fluide*, Département de génie mécanique, Faculté des sciences de l'ingénieur, Université des Frères Mentouri, Constantine, (2006).
- [99]. **N. Ozisik**, "Finite Difference Methods in Heat Transfer", *CRC Press*, (1994).
- [100]. **J. W. Thomas**, "Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods", *Springer-Verlag*, New York, Inc. (1998).
- [101]. **H. K. Versteeg, W. Malalasekera**, "An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method", *Ed. Longman*, England, (1995).
- [102]. **S. V. Patankar**, "Numerical heat transfer and fluid flow", *Hemisphere*, Washington DC, (1980).
- [103]. **Eric B Becker, Graham F Carey, J Tinsley Oden**, "Finite Elements – An Introduction", *Englewood Cliffs*, N. J.: Prentice-Hall, (1981).
- [104]. **Robert D. Cook, David S. Malkus, Michael E. Plesha, Robert J. Witt**, "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", *John Wiley & Sons*, (1989).
- [105]. **J. P. Lamoitier**, "Exercices de programmation en fortran IV", *BORDAS*, Paris, pp. 82, (1977).

- [106]. **L. Thielen, H. J. J. Jonker, K. Hanjalic**, "Symmetry breaking of flow and heat transfer in multiple impinging jets", *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 24, pp. 444–453, (2003).
- [107]. **R. H. Hernandez**, "Natural convection in thermal plumes emerging from a single heat source", *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 98, pp. 81–89, (2015).
- [108]. **G. Pétrone, E. Chénier, G. Lauriat**, "Solutions multiples et bifurcations des écoulements bidimensionnels de convection naturelle dans une cavité annulaire horizontale", *Mécanique & Industries*, Vol. 4, pp. 531–536, (2003).
- [109]. **S. H. Anilkumar, B. T. Kuzhiveli**, "Numerical Study of Natural Convective Heat Transfer in a Two-Dimensional Cavity With Centrally Located Partition Utilizing Nanofluids", *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*, Vol. 1, No. 3: 031004, (2009).
- [110]. **S. Parvin, A. Siddiqua, Md. Elias**, "Effect of Reynold's Number for Mixed Convection Flow of Nanofluid in a Double Lid Driven Cavity with Heat Generating Obstacle", *Heat and Mass Transfer Research Journal*, Vol. 1, No. 1, (2017).

ANNEXE A

A. COMMENT ON OBTIENT L'ÉQUATION DE LA VORTICITE

A.1 Equations de quantité de mouvement

A.1.1 Suivant la direction X

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

A.1.2 Suivant la direction Y

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \theta \quad (\text{A.2})$$

En dérivant l'équation (A.1) par rapport à Y et l'équation (A.2) par rapport à X, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial Y} + U \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial U}{\partial Y} \times \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial V}{\partial Y} \times \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{Re} \times \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial X} + U \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \times \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial X} + \frac{\partial V}{\partial X} \times \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{1}{Re} \times \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \times \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (\text{A.4})$$

La soustraction de l'équation (A.3) de l'équation (A.4) nous donne :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \partial X} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial Y} \right) + U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \right) + V \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial X} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \\ &= -\frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} \\ &+ \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right\} \\ &- \left\{ \frac{\partial U}{\partial X} \times \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \times \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial X} \times \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial Y} \times \frac{\partial U}{\partial Y} \right\} + \frac{Gr}{Re^2} \times \frac{\partial \theta}{\partial X} \end{aligned}$$

En réorganisant les termes convectifs et en tenant compte de l'équation de continuité, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \times \frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \quad (A.5)$$

D'autre part la vorticité est défini par : $\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$ et le nombre de Richardson est : $Ri = \frac{Gr}{Re^2}$

En substituant par ses formules dans l'équation (A.5), nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X}}$$

$$\frac{\Delta X_{i-1}}{SMX_i \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-2} - \left\{ \frac{SMX_i}{\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} + \frac{2\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_{i-1} \\ + \left\{ \frac{(SMX_i + \Delta X_{i-1})}{SMX_i \times \Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1}$$

$$\checkmark \text{ Nous avons pour } U > 0 : \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U>0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{centrale} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{arri\grave{e}re} \right]$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U>0} = \frac{\Delta X_{i-1}}{3SMX_i \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-2} - \left\{ \frac{SMX_i}{3\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} + \frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_{i-1} \\ + \left\{ \frac{(SMX_i + \Delta X_{i-1})}{3SMX_i \times \Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1}$$

$$\checkmark U < 0 : i+2, i+1, i, i-1 :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{avant} = -\frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{SPX_i \times \Delta X_i} \varphi_i + \frac{SPX_i}{\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+1} - \frac{\Delta X_i}{SPX_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+2} \\ 2 \times \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{centrale} = \frac{-2\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1} \end{array} \right.$$

$$\frac{-2\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \left\{ \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} - \frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{SPX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_i \\ + \left\{ \frac{SPX_i}{\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_{i+1} - \frac{\Delta X_i}{SPX_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+2}$$

$$\checkmark \text{ Nous avons pour } U < 0 : \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U<0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{centrale} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{avant} \right]$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U<0} = -\frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \left\{ \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} - \frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{3SPX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_i \\ + \left\{ \frac{SPX_i}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_{i+1} - \frac{\Delta X_i}{3SPX_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+2}$$

B.6 Récapitulation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{U_{pwind}}^{U>0} = ai(i)\varphi_{i-2} + bpi(i)\varphi_{i-1} + cpi(i)\varphi_i + dpi(i)\varphi_{i+1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{U_{pwind}}^{U<0} = bmi(i)\varphi_{i-1} + cmi(i)\varphi_i + dmi(i)\varphi_{i+1} + ei(i)\varphi_{i+2}$$

Avec :

$$ai(i) = \frac{\Delta X_{i-1}}{3SMX_i \times \Delta X_{i-2}}$$

$$bpi(i) = - \left\{ \frac{SMX_i}{3\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} + \frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$cpi(i) = \left\{ \frac{(SMX_i + \Delta X_{i-1})}{3SMX_i \times \Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$dpi(i) = \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i}$$

$$bmi(i) = - \frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}}$$

$$cmi(i) = \left\{ \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} - \frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{3SPX_i \times \Delta X_i} \right\}$$

$$dmi(i) = \left\{ \frac{SPX_i}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \right\}$$

$$ei(i) = - \frac{\Delta X_i}{3SPX_i \times \Delta X_{i+1}}$$

B.7 Points près des parois

Pour les points près des parois nous allons établir un schéma Upwind du premier ordre comme suit :

✓ $U > 0 : i-1, i :$

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta X_{i-1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{arrière}} = -\frac{1}{\Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{1}{\Delta X_{i-1}} \varphi_i \\ 2 \times \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} = -\frac{2\Delta X_i}{S X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{S X_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1} \end{array} \right.$$

$$-\left\{ \frac{1}{\Delta X_{i-1}} + \frac{2\Delta X_i}{S X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_{i-1} + \left\{ \frac{1}{\Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{S X_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1}$$

✓ Nous avons pour $U > 0$: $\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U>0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{arrière}} \right]$

Nous obtenons alors :

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U>0} = -\left\{ \frac{1}{3\Delta X_{i-1}} + \frac{2\Delta X_i}{3S X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_{i-1} + \left\{ \frac{1}{3\Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3S X_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1}}$$

✓ $U < 0 : i+1, i :$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta X_i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{avant}} = -\frac{1}{\Delta X_i} \varphi_i + \frac{1}{\Delta X_i} \varphi_{i+1} \\ 2 \times \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} = \frac{-2\Delta X_i}{S X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{S X_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1} \end{array} \right.$$

$$-\frac{2\Delta X_i}{S X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \left\{ -\frac{1}{\Delta X_i} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \left\{ \frac{1}{\Delta X_i} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{S X_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_{i+1}$$

✓ Nous avons pour $U < 0$: $\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U < 0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{avant}} \right]$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U < 0} = -\frac{2\Delta X_i}{3S X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \left\{ -\frac{1}{3\Delta X_i} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \left\{ \frac{1}{3\Delta X_i} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3S X_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_{i+1}$$

B.8 Récapitulation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U > 0} = bpi(i) \varphi_{i-1} + cpi(i) \varphi_i + dpi(i) \varphi_{i+1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U < 0} = bmi(i) \varphi_{i-1} + cmi(i) \varphi_i + dmi(i) \varphi_{i+1}$$

Avec :

$$bpi(i) = -\left\{ \frac{1}{3\Delta X_{i-1}} + \frac{2\Delta X_i}{3S X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$cpi(i) = \left\{ \frac{1}{3\Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$dpi(i) = \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i}$$

$$bmi(i) = -\frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}}$$

$$cmi(i) = \left\{ -\frac{1}{3\Delta X_i} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$dmi(i) = \left\{ \frac{1}{3\Delta X_i} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \right\}$$

B.9 Récapitulation

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{j=2}^{V>0} = b_{pj}(j)\varphi_{j-1} + c_{pj}(j)\varphi_j + d_{pj}(j)\varphi_{j+1}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{j=2}^{V<0} = b_{mj}(j)\varphi_{j-1} + c_{mj}(j)\varphi_j + d_{mj}(j)\varphi_{j+1}$$

Avec :

$$b_{pj}(j) = -\left\{ \frac{1}{3\Delta Y_{j-1}} + \frac{2\Delta Y_j}{3SY_j \times \Delta Y_{j-1}} \right\}$$

$$c_{pj}(j) = \left\{ \frac{1}{3\Delta Y_{j-1}} + \frac{2(\Delta Y_j - \Delta Y_{j-1})}{3\Delta Y_j \times \Delta Y_{j-1}} \right\}$$

$$d_{pj}(j) = \frac{2\Delta Y_{j-1}}{3SY_j \times \Delta Y_j}$$

$$b_{mj}(j) = -\frac{2\Delta Y_j}{3SY_j \times \Delta Y_{j-1}}$$

$$cmj(j) = \left\{ -\frac{1}{3\Delta Y_j} + \frac{2(\Delta Y_j - \Delta Y_{j-1})}{3\Delta Y_j \times \Delta Y_{j-1}} \right\}$$

$$dmj(j) = \left\{ \frac{1}{3\Delta Y_j} + \frac{2\Delta Y_{j-1}}{3\Delta Y_j \times \Delta Y_{j-1}} \right\}$$

B.10 Généralisation

$$\text{On pose : } U = \begin{cases} U_p = \frac{1}{2}(U + |U|) \\ U_n = \frac{1}{2}(U - |U|) \end{cases}$$

$$U \frac{\partial \varphi}{\partial X} = U_p ai(i)\varphi_{i-2} + [U_p bpi(i) + U_n bmi(i)]\varphi_{i-1} + [U_p cpi(i) + U_n cmi(i)]\varphi_i \\ + [U_p dpi(i) + U_n dmi(i)]\varphi_{i+1} + U_p ei(i)\varphi_{i+2}$$

Nous utilisons les mêmes étapes pour la discrétisation du terme convectif $\left(V \frac{\partial \varphi}{\partial Y}\right)$ suivant la direction Y .

ANNEXE C

C. DISCRETISATION DU TERME DIFFUSIF $\left(\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right); \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2}\right)\right)$

Considérons le développement en séries de Taylor d'une variable dépendante φ négligeant les termes d'ordre supérieur à quatre. Le but d'augmenter l'ordre de dérivée est :

$$\varphi_{i+2} = \varphi_i + SPX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} + \frac{SPX_i^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4} \quad (C.1)$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\Delta X_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} + \frac{\Delta X_i^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4} \quad (C.2)$$

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{\Delta X_{i-1}^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} + \frac{\Delta X_{i-1}^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4} \quad (C.3)$$

$$\varphi_{i-2} = \varphi_i - SMX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SMX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} + \frac{SMX_i^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4} \quad (C.4)$$

Pour arriver à l'expression donnant la discrétisation du terme diffusif, trois étapes sont indispensables. L'étape de départ, pour but d'éliminer la dérivée quatrième $\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}\right)$, le second est l'élimination de la dérivée troisième $\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3}\right)$ et la dernière étape pour éliminer la dérivée première $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)$.

C.1 L'élimination de la dérivée quatrième $\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}\right)$

Multipliant l'équation (C.1) par $-(\Delta X_i^4)$ et l'équation (C.2) par (SPX_i^4) , nous allons :

$$\begin{cases} -\Delta X_i^4 \varphi_{i+2} = -\Delta X_i^4 \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_i^4 \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^4}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3 \times \Delta X_i^4}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \\ SPX_i^4 \varphi_{i+1} = SPX_i^4 \varphi_i + SPX_i^4 \times \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^4 \times \Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^4 \times \Delta X_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{cases}$$

$$\boxed{-\Delta X_i^4 \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \varphi_{i+1} = \left(SPX_i^4 - \Delta X_i^4\right) \varphi_i + SPX_i \times \Delta X_i \left(SPX_i^3 - \Delta X_i^3\right) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2}{2!} \left(SPX_i^2 - \Delta X_i^2\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3 \times \Delta X_i^3}{3!} \left(SPX_i - \Delta X_i\right) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \quad (I)}$$

De la même façon pour (C.1) et (C.3) : Multipliant l'équation (C.1) par $-(\Delta X_{i-1})^4$ et l'équation (C.2) par $(SPX_i)^4$, nous allons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta X_{i-1}^4 \varphi_{i+2} = -\Delta X_{i-1}^4 \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_{i-1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^4}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^3 \times \Delta X_{i-1}^4}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \\ + \\ SPX_i^4 \varphi_{i-1} = SPX_i^4 \varphi_i - SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{array} \right.$$

$$\boxed{-\Delta X_{i-1}^4 \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \varphi_{i-1} = (SPX_i^4 - \Delta X_{i-1}^4) \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_{i-1} (SPX_i^3 + \Delta X_{i-1}^3) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^4 - SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^3 \times \Delta X_{i-1}^4 - SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \quad (II)}$$

Pour les deux équations (C.1) et (C.4) : Multipliant l'équation (C.1) par $(-SMX_i)^4$ et l'équation (C.4) par $(SPX_i)^4$, nous allons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -SMX_i^4 \varphi_{i+2} = -SMX_i^4 \varphi_i - SPX_i \times SMX_i^4 \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{SPX_i^2 \times SMX_i^4}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^3 \times SMX_i^4}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \\ + \\ SPX_i^4 \varphi_{i-2} = SPX_i^4 \varphi_i - SPX_i^4 \times SMX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^4 \times SMX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^4 \times SMX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{array} \right.$$

$$\boxed{-SMX_i^4 \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \varphi_{i-2} = (SPX_i^4 - SMX_i^4) \varphi_i - SPX_i \times SMX_i (SPX_i^3 + SMX_i^3) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^2 \times SMX_i^4 - SPX_i^4 \times SMX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^3 \times SMX_i^4 - SPX_i^4 \times SMX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \quad (III)}$$

C.2 L'élimination de la dérivée troisième $(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3})$

Afin d'obtenir les trois équations mentionner (I), (II) et (III), par la suite, éliminant la dérivée troisième $(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3})$:

Multipliant l'équation (I) par $[\Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1})]$ et l'équation (II) par $[\Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i)]$; nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta X_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \varphi_{i+1} = \\ \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \varphi_i + SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1}^3}{2!} (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \\ + \\ -\Delta X_{i-1}^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i-1} = \\ \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_{i-1}^4) (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_{i-1} \times \Delta X_i^3 (SPX_i^3 + \Delta X_{i-1}^3) (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_i^3}{2!} (SPX_i^2 - \Delta X_{i-1}^2) (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & -\Delta X_i^3 \times \Delta X_{i-1}^3 [\Delta X_i (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_{i-1} (SPX_i - \Delta X_i)] \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times \\ & \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \varphi_{i+1} + SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i-1} = \\ & [\Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_{i-1}^4) (SPX_i - \Delta X_i)] \varphi_i + \\ & SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i-1} [\Delta X_{i-1}^2 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) - \Delta X_i^2 (SPX_i^3 + \\ & \Delta X_{i-1}^3) (SPX_i - \Delta X_i)] \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} [\Delta X_{i-1} (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \\ & \Delta X_i (SPX_i^2 - \Delta X_{i-1}^2) (SPX_i - \Delta X_i)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \quad (A) \end{aligned}$$

De la même façon pour les équations (I) et (III) : Multipliant l'équation (I) par $[SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i)]$ et l'équation (III) par $[\Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i)]$; nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta X_i^4 SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i) \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i) \varphi_{i+1} = \\ SMX_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i + SMX_i) \varphi_i + SPX_i \times \Delta X_i \times SMX_i^3 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i + SMX_i) \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times SMX_i^3}{2!} (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + SMX_i) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \\ + \\ -SMX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i-2} = \\ \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - SMX_i^4) (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_i - SPX_i \times SMX_i \times \Delta X_i^3 (SPX_i^3 + SMX_i^3) (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ + \frac{SPX_i^2 \times SMX_i^2 \times \Delta X_i^3}{2!} (SPX_i^2 - SMX_i^2) (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta X_i^3 SMX_i^3 [\Delta X_i (SPX_i + SMX_i) + SMX_i (SPX_i - \Delta X_i)] \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times SMX_i^3 (SPX_i + \\
& SMX_i) \varphi_{i+1} + SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 SPX_i - \Delta X_i \varphi_{i-2} = SMX_i^3 SPX_i^4 - \Delta X_i^4 SPX_i + SMX_i + \Delta X_i^3 \\
& SPX_i^4 - SMX_i^4 SPX_i - \Delta X_i \varphi_i + SPX_i \times \Delta X_i \times SMX_i SMX_i^2 SPX_i^3 - \Delta X_i^3 SPX_i + SMX_i - \Delta X_i^2 \\
& SPX_i^3 + SMX_i^3 SPX_i - \Delta X_i \partial \varphi \partial X + SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times SMX_i^2 2! [SMX_i SPX_i^2 - \Delta X_i^2 SPX_i + SMX_i \\
& + \Delta X_i SPX_i^2 - SMX_i^2 SPX_i - \Delta X_i] \partial^2 \varphi \partial X^2
\end{aligned}$$

(B)

C.3 L'élimination de la dérivée première $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)$

Finalement l'élimination de la dérivée première rend le terme diffusif.

$$(A) \Rightarrow ap2\varphi_{i+2} + ap1\varphi_{i+1} + am1\varphi_{i-1} = ao\varphi_i + a \frac{\partial \varphi}{\partial X} + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}$$

Avec:

$$ap2 = -\Delta X_i^3 \times \Delta X_{i-1}^3 [\Delta X_i (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_{i-1} (SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$ap1 = SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1})$$

$$am1 = SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i)$$

$$ao = [\Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_{i-1}^4) (SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial X} = SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i-1} [\Delta X_{i-1}^2 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) - \Delta X_i^2 (SPX_i^3 + \Delta X_{i-1}^3) (SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} [\Delta X_{i-1} (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_i (SPX_i^2 - \Delta X_{i-1}^2) (SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$(B) \Rightarrow bp2\varphi_{i+2} + bp1\varphi_{i+1} + bm2\varphi_{i-2} = bo\varphi_i + b\frac{\partial\varphi}{\partial X} + b\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}$$

Avec:

$$bp2 = -\Delta X_i^3 SMX_i^3 [\Delta X_i (SPX_i + SMX_i) + SMX_i (SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$bp1 = SPX_i^4 \times SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i)$$

$$bo = [SMX_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i + SMX_i) + \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - SMX_i^4) (SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$bm2 = SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i)$$

$$b\frac{\partial\varphi}{\partial X} = SPX_i \times \Delta X_i \times SMX_i [SMX_i^2 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i + SMX_i) - \Delta X_i^2 (SPX_i^3 + SMX_i^3) (SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$b\frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} = \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times SMX_i^2}{2!} [SMX_i (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + SMX_i) + \Delta X_i (SPX_i^2 - SMX_i^2) (SPX_i - \Delta X_i)]$$

Multipliant l'équation (A) par $(b\frac{\partial\varphi}{\partial X})$ et l'équation (B) par $(-a\frac{\partial\varphi}{\partial X})$, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} ap2 \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_{i+2} + ap1 \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_{i+1} + am1 \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_{i-1} = ao \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_i + a \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} \frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} \\ -bp2 \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_{i+2} - bp1 \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_{i+1} - bm2 \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_{i-2} = -bo \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_i - b \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X} \frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2} \end{array} \right.$$

$$[ap2 \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} - bp2 \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X}] \varphi_{i+2} + [ap1 \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} - bp1 \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X}] \varphi_{i+1} + am1 \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_{i-1} -$$

$$bm2 \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X} \varphi_{i-2} = [ao \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} - bo \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X}] \varphi_i + [a \times b\frac{\partial\varphi}{\partial X} - b \times a\frac{\partial\varphi}{\partial X}] \frac{\partial^2\varphi}{\partial X^2}$$

$$\Rightarrow \left[a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = [ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}] \varphi_{i+2} + [ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}] \varphi_{i+1} - [ao \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bo \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}] \varphi_i + am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-1} - bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \Big|_i = \frac{1}{\left[a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right]} \left\{ \begin{array}{l} [ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}] \varphi_{i+2} \\ + [ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}] \varphi_{i+1} \\ - [ao \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bo \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}] \varphi_i \\ + am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-1} \\ - bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-2} \end{array} \right.$$

C.4 Récapitulation

$$\text{Prenant : } d2cx = a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \Big|_i = d2xp2(i) \varphi_{i+2} + d2xp1(i) \varphi_{i+1} + d2xo(i) \varphi_i + d2xm1(i) \varphi_{i-1} + d2xm2(i) \varphi_{i-2}$$

Avec :

$$d2xp2(i) = \frac{ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

$$d2xp1(i) = \frac{ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

$$d2xo(i) = \frac{bo \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} - ao \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

$$d2xm1(i) = \frac{am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

$$d2xm2(i) = \frac{-bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

La même chose pour la direction (Y), nous avons donc :

$$d2cy = a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \right|_j = d2yp2(j)\varphi_{j+2} + d2yp1(j)\varphi_{j+1} + d2yo(j)\varphi_j + d2ym1(j)\varphi_{j-1} \\ + d2ym2(j)\varphi_{j-2}$$

Avec :

$$d2yp2(j) = \frac{ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$d2yp1(j) = \frac{ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$d2yo(j) = \frac{bo \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - ao \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$d2ym1(j) = \frac{am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$d2ym2(j) = \frac{-bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$\begin{aligned}
(2\Delta X_i + \Delta X_{i+1})SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i+1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \\
-\Delta X_i^3 \varphi_{i+2} + SPX_i^3 \varphi_{i+1} - (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) \varphi_i - \frac{\Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1}}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}
\end{aligned} \quad (I)$$

De même pour les deux équations (D.3) et (D.4), multipliant l'équation (D.3) par (SMX_i^3) l'équation (D.4) par $(-\Delta X_{i-1}^3)$; nous avons :

$$\begin{cases}
SMX_i^3 \varphi_{i-1} = SMX_i^3 \varphi_i - SMX_i^3 \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^3 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \\
+ \\
-\Delta X_{i-1}^3 \varphi_{i-2} = -\Delta X_{i-1}^3 \varphi_i + SMX_i \times \Delta X_{i-1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^3}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta X_{i-1}^3 \varphi_{i-2} + SMX_i^3 \varphi_{i-1} = (SMX_i^3 - \Delta X_{i-1}^3) \varphi_i + SMX_i \times \Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1}^2 - \\
SMX_i^2) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^3 - 12 \Delta X_{i-1}^3}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2\Delta X_{i-1} + \Delta X_{i-2})SMX_i \times \Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2} \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \Delta X_{i-1}^3 \varphi_{i-2} - SMX_i^3 \varphi_{i-1} + \\
(SMX_i^3 - \Delta X_{i-1}^3) \varphi_i + \frac{SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2}}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}
\end{aligned} \quad (II)$$

D.2 L'élimination de la dérivée seconde $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right)$

Afin d'obtenir les deux équations mentionner (I) et (II), par la suite, éliminant la dérivée seconde $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right)$:

Multipliant l'équation (I) par $[SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2}]$ et l'équation (II) par $[\Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1}]$; nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i+1} (2\Delta X_i + \Delta X_{i+1}) \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \\ \quad - SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times \Delta X_i^3 \varphi_{i+2} \\ \quad + SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times SPX_i^3 \varphi_{i+1} \\ \quad - SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) \varphi_i \\ \quad + \\ \Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1} \times SMX_i \times \Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2} (2\Delta X_{i-1} + \Delta X_{i-2}) \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \\ \quad \Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1} \times \Delta X_{i-1}^3 (2\Delta X_{i-1} + \Delta X_{i-2}) \varphi_{i-2} \\ \quad - \Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1} \times SMX_i^3 \varphi_{i-1} \\ \quad + \Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1} (SMX_i^3 - \Delta X_{i-1}^3) \varphi_i \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & [SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} (2\Delta X_i + \Delta X_{i+1}) SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i+1} + SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \\ & \Delta X_{i+1} (2\Delta X_{i-1} + \Delta X_{i-2}) SMX_i \times \Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}] \frac{\partial \varphi}{\partial X} = SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i+1} \times \\ & \Delta X_{i-1}^3 (2\Delta X_{i-1} + \Delta X_{i-2}) \varphi_{i-2} - \Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1} \times SMX_i^3 \varphi_{i-1} + [SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \\ & \Delta X_{i+1} (SMX_i^3 - \Delta X_{i-1}^3) - SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times (SPX_i^3 - \Delta X_i^3)] \varphi_i + SMX_i^2 \times \\ & \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times SPX_i^3 \varphi_{i+1} - SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times \Delta X_i^3 \varphi_{i+2} \end{aligned}$$

Prenant : $d1cx = SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} (2\Delta X_i + \Delta X_{i+1}) SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i+1} +$
 $SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i+1} (2\Delta X_{i-1} + \Delta X_{i-2}) SMX_i \times \Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}$

Nous avons :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_i = d1xm2(i) \varphi_{i-2} + d1xm1(i) \varphi_{i-1} + dox(i) \varphi_i + d1xp1(i) \varphi_{i+1} + d1xp2(i) \varphi_{i+2}$$

Avec :

$$d1xm2(i) = \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^3 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i+1} (2\Delta X_{i-1} + \Delta X_{i-2})}{d1cx}$$

$$d1xm1(i) = \frac{-SMX_i^3 \times SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i+1}}{d1cx}$$

$dox(i)$

$$= \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i+1} (SMX_i^3 - \Delta X_{i-1}^3) - SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times (SPX_i^3 - \Delta X_i^3)}{d1cx}$$

$$d1xp1(i) = \frac{SPX_i^3 \times SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2}}{d1cx}$$

$$d1xp2(i) = \frac{-SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times \Delta X_i^3}{d1cx}$$

La même chose pour la discrétisation de la dérivée première suivant la direction (Y), nous avons donc :

$$\begin{aligned} d1cy &= SMY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^2 \times \Delta Y_{j-2} (2\Delta Y_j + \Delta Y_{j+1}) SPY_j \times \Delta Y_j \times \Delta Y_{j+1} \\ &\quad + SPY_j^2 \times \Delta Y_j^2 \times \Delta Y_{j+1} (2\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_{j-2}) SMY_j \times \Delta Y_{j-1} \times \Delta Y_{j-2} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right|_j = d1ym2(j)\varphi_{j-2} + d1ym1(j)\varphi_{j-1} + doy(j)\varphi_j + d1yp1(j)\varphi_{j+1} + d1yp2(j)\varphi_{j+2}$$

Avec :

$$d1ym2(j) = \frac{SPY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^3 \times \Delta Y_j^2 \times \Delta Y_{j+1} (2\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_{j-2})}{d1cy}$$

$$d1ym1(j) = \frac{-SMY_j^3 \times SPY_j^2 \times \Delta Y_j^2 \times \Delta Y_{j+1}}{d1cy}$$

$doy(j)$

$$= \frac{SPY_j^2 \times \Delta Y_j^2 \times \Delta Y_{j+1} (SMY_j^3 - \Delta Y_{j-1}^3) - SMY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^2 \times \Delta Y_{j-2} \times (SPY_j^3 - \Delta Y_j^3)}{d1cy}$$

$$d1yp1(j) = \frac{SPY_j^3 \times SMY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^2 \times \Delta Y_{j-2}}{d1cy}$$

$$d1yp2(j) = \frac{-SMY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^2 \times \Delta Y_{j-2} \times \Delta Y_j^3}{d1cy}$$

CONVECTION MIXTE DANS UNE CAVITE A PAROIS LATERALES MOBILES ET DONT UNE PARTIE DE LA PAROI INFERIEURE EST SOUMISE A UN FLUX DE CHALEUR FIXE

S. KACHI¹, S. BOUDEBOUS²

¹Faculté de Génie des Procédés, Département de Génie Chimique, Université de Constantine 3, 25000, kachi.sacia@gmail.com

²Faculté de Génie des Procédés, Département de Génie Chimique, Université de Constantine 3, 25000, s_boudebous@yahoo.fr

RÉSUMÉ

Dans la présente étude, nous nous intéressons à la simulation numérique de l'écoulement d'air en convection mixte laminaire, dans une cavité carrée, dont une partie du fond est soumise à un flux de chaleur constant. Les parois latérales de cette cavité se déplacent avec une vitesse fixée vers le haut, et sont soumises à une température froide. Les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques. Un modèle mathématique reposant sur l'approche vorticité-fonction du courant ($\omega - \psi$), est utilisé. Les équations régissant ce phénomène ont été résolues par une approche numérique basée sur la méthode des différences finies, en considérant un maillage non uniforme.

Mots Clés : convection mixte, cavité carrée, méthode des différences finies, maillage non uniforme.

NOMENCLATURE

Symboles :

g	accélération de pesanteur, $m.s^{-2}$.
Gr	nombre de Grashof.
L	hauteur dimensionnelle de la cavité, m .
Nu	nombre de Nusselt local.
\overline{Nu}	nombre de Nusselt moyen.
p	pression, Pa .
p_0	pression de référence, Pa .
P	pression adimensionnelle.
Pr	nombre de Prandtl.
q''	densité de flux de chaleur, $W.m^{-2}$.
Re	nombre de Reynolds.
Ri	nombre de Richardson.
x, y	coordonnées d'espace dimensionnelles, m .
t	temps, s .
T	température, K .
T_F	température des parois latérale, K .
u, v	composantes des vitesses, $m.s^{-1}$.

U, V	composantes adimensionnelles des vitesses.
V_0	vitesse des parois latérale, $m.s^{-1}$.
x, y	coordonnées d'espace dimensionnelles, m .
X, Y	coordonnées d'espace adimensionnelles.

Lettres grecques :

ε	longueur adimensionnelle de la partie chauffée.
α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$.
β	coefficient d'expansion thermique à pression
θ	température adimensionnelle $\theta = (T - T_F)/\Delta T$.
ν	viscosité cinématique, $m^2.s$.
λ	conductivité thermique de l'air, $W.m^{-1}.K^{-1}$.
ψ	fonction de courant adimensionnelle.
ω	vorticité adimensionnelle.
τ	temps adimensionnel $\tau = t.V_0/L$.
ρ	masse volumique, $Kg.m^{-3}$.
ΔT	différence de température, $^{\circ}C$.

Indices/ Exposants :

F	froide.
-----	---------

1. INTRODUCTION

L'étude du mouvement d'un fluide en convection mixte dans les cavités est fréquemment rencontrée dans la nature et dans différents systèmes industriels. Ce mouvement résulte des interactions complexes au sein de ce milieu (fluide) ou entre différents milieux dès qu'il y a un gradient de température. Une grande variété d'écoulements de fluides, avec ou sans transfert de chaleur et de masse, sont régis par des systèmes d'équations différentielles non linéaires établis à partir des principes généraux de conservation de la physique. Ces systèmes d'équations non-linéaires contiennent de

nombreux paramètres qui sont susceptibles d'être la cause de nombreux phénomènes de changements du comportement de l'écoulement du fluide (bifurcation). De nombreuses études numériques et expérimentales concernant ce phénomène de changement de la nature même de l'écoulement dans différentes configurations géométriques en régime de convection naturelle, forcée ou mixte ont été rapportées dans la littérature. Les premiers modèles traitent du problème classique de la convection naturelle de Rayleigh-Bénard dans des espaces confinés et sont largement disponibles dans la littérature comme par exemple ceux d'Erenburg et al. [1], Venturi et al. [2] et Angelia et al. [3]. Dans les cavités l'interaction entre l'écoulement cisailé créée par le mouvement de la paroi et celui engendré par la convection naturelle reste jusqu'à présent un champ fondamental de la recherche. Aydin et Yang [4]; Guo et Sharif [5] ont présenté des études numériques de la convection mixte laminaire dans une cavité 2D dont la paroi supérieure est adiabatique et les parois verticales qui se déplacent vers le bas à une vitesse et une température froide constantes. Une source de chaleur est placée au centre de la paroi inférieure. Aydin et Yang [4] considèrent une température fixe, tandis que Guo et Sharif [5] imposent un flux de chaleur constant. L'effet de la longueur de la source de chaleur et le nombre de Richardson ont été étudiés. Dans ces deux cas, les effets des forces causées par la convection mixte de la partie chauffée et le déplacement des parois latérales de la cavité, étant coopératifs aucune rupture de la symétrie n'a été observée. Mais lorsque nous considérons le même problème que celui de Guo et Sharif [5], en inversant le sens du déplacement des parois latérales pour créer une compétition entre ces deux forces, nous constatons une perte de symétrie et un changement radical de l'écoulement à l'intérieur de la cavité.

2. MODELE MATHEMATIQUE

La géométrie du problème considéré est illustrée dans la figure 1. Il s'agit d'une cavité carrée remplie d'air dont les parois latérales sont maintenues à une température constante froide T_f et qui se déplacent vers le haut avec une vitesse fixée V_0 . Une source de chaleur est située au milieu de la paroi inférieure de la cavité ayant une longueur l égale au quatre cinquième de celle de la cavité L et soumise à un flux de chaleur constant q'' . Les autres parois sont supposées adiabatiques.

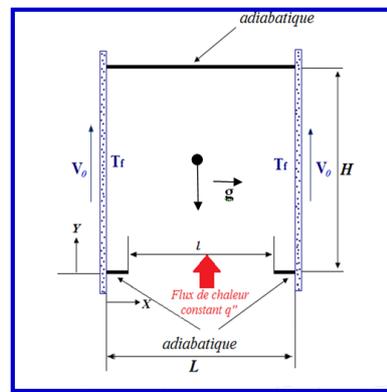


Figure 1. Domaine physique étudié

L'écoulement est bidimensionnel, laminaire et stationnaire, sans génération interne de chaleur. Les équations de conservation (continuité, énergie, vorticité, fonction de courant et composant de vitesse) sous forme adimensionnelle, bas es sur la formulation vorticité-fonction du courant ($\omega-\psi$), régissant le phénomène de la convection mixte sont donn es par les expressions suivantes :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re.Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (4)$$

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \text{ et } V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (5)$$

Les variables réduites utilisées pour normaliser les équations gouvernantes sont :

$$X = \frac{x}{L}; Y = \frac{y}{L}; \tau = t \cdot \frac{V_0}{L}; U = \frac{u}{V_0}; V = \frac{v}{V_0}; \theta = \frac{T - T_f}{\Delta T} \text{ avec } \Delta T = q'' \cdot \frac{L}{\lambda}$$

Les paramètres de contrôle du problème Gr , Re , Pr et Ri dénotent, respectivement, les nombres de Grashof, de Reynolds, de Prandtl et de Richardson et sont définis par les relations suivantes :

$$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot L^3}{\nu^2}; Re = V_0 \cdot \frac{L}{\nu}; Pr = \frac{\nu}{\alpha}; Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

Les conditions aux limites associées aux équations de conservation sont :

Paroi supérieure : $U = V = 0$ pour: $0 < X < 1$; $Y = 0$ et $Y = 1$

Paroi gauche et droite : $\theta = 0$; $U = 0$ et $V = +1$ pour: $\begin{cases} X = 0 \\ X = 1 \end{cases}$ et $0 < Y < 1$

Paroi inférieure : $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = -1$ et $U = V = 0$ pour: $\frac{1 - \varepsilon}{2} \leq X \leq \frac{1 + \varepsilon}{2}$ et $Y = 0$

Et : $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0$ et $U = V = 0$ pour: $\begin{cases} 0 < X < \frac{1 - \varepsilon}{2} \\ \frac{1 + \varepsilon}{2} < X < 1 \end{cases}$ et $Y = 0$

Nombre de Nusselt moyen :

Le transfert de chaleur à partir de la paroi chaude est exprimé par le nombre de Nusselt moyen défini

comme suit : **Partie chauffante :** $\overline{Nu} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon Nu(X) dX$

$Nu(X)$: est le nombre de Nusselt local défini par : $Nu(X) = \frac{h \cdot L}{\lambda} = \frac{1}{\theta_w(X)}$

L'intégrale donnant le nombre de Nusselt moyen a été déterminée numériquement par la méthode de Simpson.

3. PROCÉDURE NUMÉRIQUE

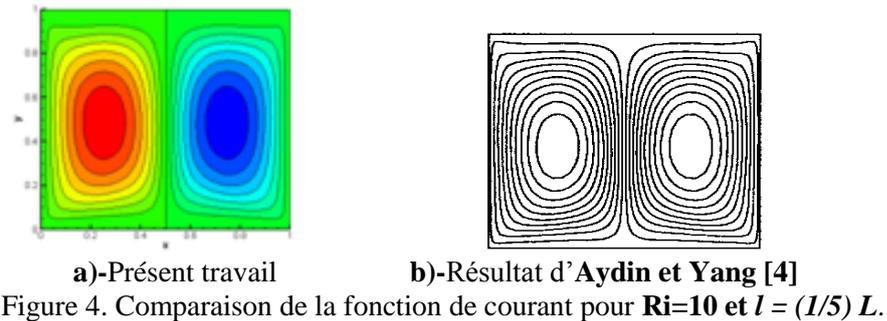
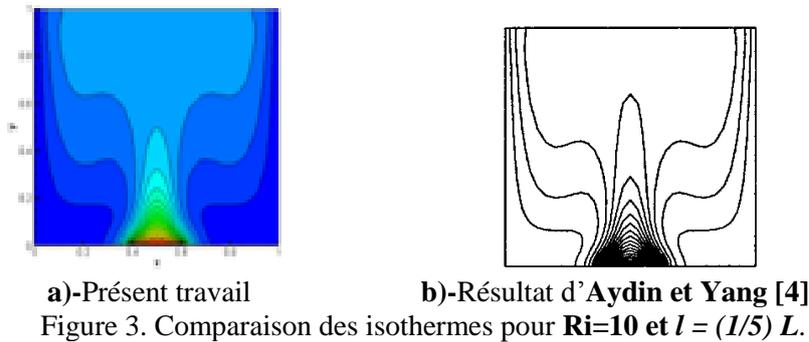
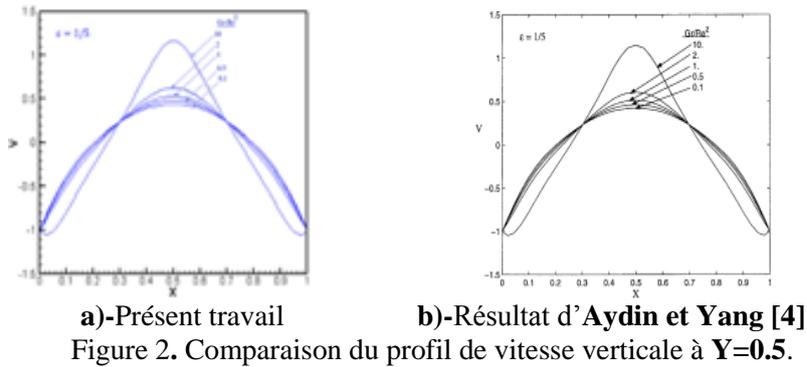
Afin de résoudre numériquement les équations gouvernantes (1-5) aux dérivées partielles, nous allons procéder à leurs discrétisations dans le but d'obtenir un système d'équations algébriques dont la résolution nous permet de déterminer les champs de toutes les variables du problème considéré. La méthode de différences finies a été adoptée pour accomplir cette discrétisation. La discrétisation du terme temporel est assurée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (RK4). Les termes diffusifs, ainsi que les dérivées partielles du premier ordre (terme source de l'équation de la conservation de l'énergie et les vitesses), sont discrétisés en utilisant le schéma centré du 4ème ordre. Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma Upwind du 3ème ordre [7]. L'équation de la fonction de courant est résolue par la méthode itérative de sur relaxation N.L.O.R. (Non Linear Over Relaxation), et sa convergence est obtenue à chaque pas du temps [8]. Nous avons opté pour un maillage non uniforme dans les deux directions, horizontal et vertical X et Y , ainsi que le langage FORTRAN a été élaboré comme un programme de calcul, pour un critère de convergence égale à 10^{-5} .

Choix du maillage :

Afin de rendre la solution numérique indépendante des valeurs des pas, nous avons procédé des différentes simulations, en comparant les valeurs du nombre de Nusselt moyen. Nous avons constatés un écart plus faible entre les valeurs du nombre de Nusselt moyen, déterminées avec un maillage de 81x81, 101x101, 161x161 et de 201x201. Ces comparaisons nous permettent le choix du maillage (101x101) car il fournit un bon compromis entre la durée du temps de calcul et la précision de ces calculs.

Validation du code de calcul :

De manière à vérifier l'exactitude des résultats numériques obtenus dans le présent travail, une validation du code a été faite en prenant en compte certaines études numériques disponibles dans la littérature. Les résultats d'Aydin et Yang [4], obtenus dans le cas d'une cavité rectangulaire contenant de l'air, ont été utilisés pour tester notre code numérique.



4. RÉSULTATS

Toutes les simulations ont été réalisées en considérant l'air comme fluide, le nombre de Prandtl est fixé à 0.71 et le nombre de Reynolds à 100. La longueur adimensionnelle ϵ de la partie chauffée est égale à 0.8, avec un pas du temps adimensionnel fixé à 10^{-4} .

La bifurcation du régime de l'écoulement en convection mixte a été mise en évidence pour des nombres de Richardson égaux à 41.4 et 41.5.

Les résultats sont présentés sous formes de contours de température, de la fonction de courant et de l'évolution du nombre de Nusselt moyen.

Champs dynamiques :

Ces champs sont représentés sous forme d'iso-courants dans la figure 2 pour les deux valeurs du nombre de Richardson considérées. L'écoulement est constitué de deux cellules principales mais dissymétriques pour la valeur de 41.4 du nombre de Richardson. Une bifurcation vers un régime d'écoulement symétrique caractérisé par l'apparition brusque de quatre cellules principales est mise en évidence quand la valeur de ce même paramètre augmente juste de 0.1 ($Ri = 41.5$). Les deux cellules contrarotatives au centre de la cavité sont principalement entretenue par les forces de flottabilité par contre des deux autres cellules pincées situées près des parois verticales en mouvement sont entretenues par les forces de viscosité.

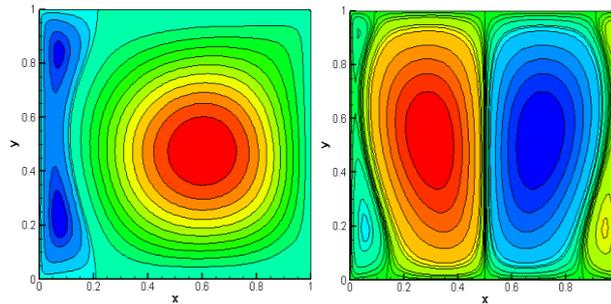


Figure 5. Champs dynamiques pour $Ri = 41.4$ à gauche et $Ri = 41.5$ à droite

Champs thermiques :

Ces champs sont représentés dans la figure 3 sous forme d'isothermes. La chaleur récupérée à partir de la partie chauffée de la cavité est transportée par convection essentiellement par la paroi droite de la cavité pour $Ri = 41.4$ alors que pour $Ri = 41.5$ celle-ci est évacuée symétriquement vers le haut au milieu de la cavité par la paire de cellules au centre. C'est ce qui explique les températures relativement élevées dans la partie centrale de la cavité.

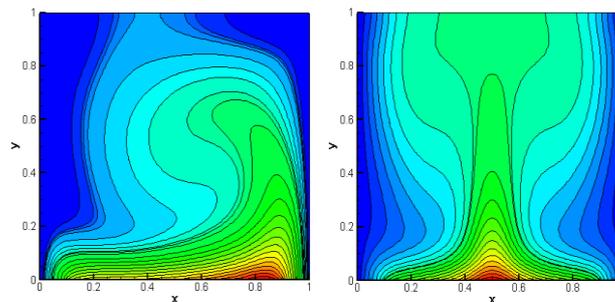


Figure 6. Champs thermiques pour $Ri = 41.4$ à gauche et $Ri = 41.5$ à droite

Nombre de Nusselt moyen :

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur la figure 4 (a) et (b). La valeur de ce nombre présente d'importantes fluctuations pendant un temps adimensionnel τ compris entre 0 et 15 (figure 4 (a)). Cette valeur diminue régulièrement, comme le montre la figure 4 (b), pour se stabiliser à une valeur fixe ($\overline{Nu} = 7.20$) pour $Ri = 41.5$, alors qu'elle présente une diminution brusque ($\overline{Nu} = 6.9645$) à $\tau = 48.7$ avant de se stabiliser ($\overline{Nu} = 7.41$) pour $Ri = 41.4$.

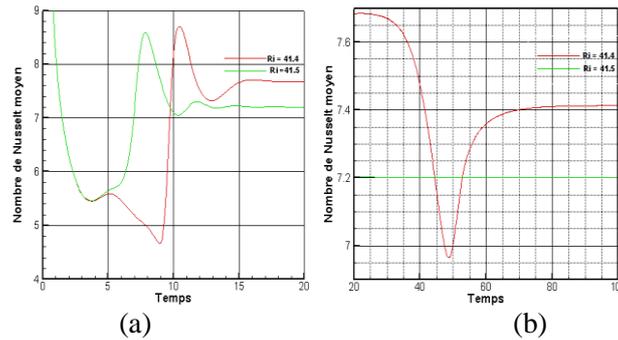


Figure 7. Evolution du nombre de Nusselt moyen : (a) $0 \leq \tau \leq 20$ et (b) $20 \leq \tau \leq 100$

5. CONCLUSIONS

La convection mixte dans une cavité carrée a été étudiée numériquement, tel que on a considéré l'écoulement laminaire et le transfert thermique d'air dus aux forces de flottabilité à l'intérieur de cette cavité bidimensionnelle avec le chauffage localisé à la paroi inférieure par le flux de chaleur constant et les parois latérales refroidies iso-thermiquement, alors que les autres parties sont considérées adiabatiques. Les résultats obtenus mettent en évidence l'existence du nombre de Richardson. Le passage de la première structure vers la deuxième se traduit d'une manière brusque pour une valeur bien déterminée de ce même nombre et conduit à une bifurcation d'un régime constitué de deux cellules à un autre constitué de quatre cellules.

REFERENCES

- [1] V. Erenburg, A. Yu. Gelfgat, E. Kit, P. Z. Bar-Yoseph and A. Solan, Multiple States, Stability and Bifurcations of Natural Convection in a Rectangular Cavity with Partially Heated Vertical Walls. *J. Fluid Mech.* Vol. 492, 63-89, 2003.
- [2] D. Venturi, X. Wan and G. Emkarniadakis, Stochastic Bifurcation Analysis of Rayleigh-Bénard Convection. *J. Fluid Mech.* Vol. 650, 391-413, 2010.
- [3] D. Angelia, A. Paganob, M. A. Corticellia, A. Ficherab, G. S. Barozzia, Bifurcations of Natural Convection Flows from an Enclosed Cylindrical Heat Source. *Frontiers in Heat and Mass Transfer (FHMT)*, 2, 023003, 2011.
- [4] O. Aydin, and W.J Yang, Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 36, 695-710, 2000.
- [5] G. Guo, and M.A.R. Sharif, Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall. *International Journal of Thermal Sciences* 43, 465-475, 2004.
- [6] T.S. Cheng, Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers. *International Journal of Thermal Sciences*, 2010.
- [7] T. Kawamura, H. Takamiet K. Kuwahara. New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations, *Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics*, Vol. 218, 291-295, 1985.
- [8] B. Carnahan, H. A. Luther, and J. O. Wilkes. *Applied Numerical Methods*. Copyright by John Wiley & Sons. Inc, 1969.

Effect of Richardson Number on Unsteady Mixed Convection in a Square Cavity Partially Heated from Below

Sacia Kachi^{1*}, Fatima-zohra Bensouici¹, Nawel Ferroudj¹ and Saadoun Boudebous²

Abstract: The objective of the present study is to analyze the laminar mixed convection in a square cavity with a side length L and moving cooled vertical sidewalls. A constant flux heat source with relative length l is placed in the center of the lower wall and all the other horizontal sides of the cavity are considered adiabatic. The numerical method used is based on a finite difference technique where the spatial partial derivatives and boundary conditions of the phenomenon governing equations are discretized using a high order scheme, and time advance is dealt with by the fourth order Runge Kutta method. The Richardson number (Ri), which represents the relative importance of the natural and forced convection, is chosen as the bifurcation parameter. The effect of the Richardson number on the behavior of the fluid flow and the heat transfer has been analyzed. Although the geometry and boundary conditions concerning the velocity and the temperature are symmetrical relative to the vertical axis passing through the center of the cavity, analysis of the results allowed us to detect the existence of symmetric and asymmetric structures of the flow, completely different, depending on the value of the Richardson number.

Keywords: Richardson number, mixed convection, square cavity, finite difference method, bifurcation.

Nomenclature

g	gravitational acceleration, $m.s^{-2}$
Gr	Grashof number ($= g\beta q'' L^4 / kv^2$)
k	thermal conductivity, $W.m^{-1}.K^{-1}$
l	length of the heat source, m
L	length of the square cavity, m
n	normal direction
$Nu(x)$	dimensionless local Nusselt number
Nu_{av}	dimensionless average Nusselt number

¹Faculty of Process Engineering, University Salah Boubnider Constantine 3, Algeria.

²Faculty of Sciences and Applied Sciences, University Larbi Ben M'hidi, Oum el Bouaghi, Algeria.

*Corresponding Author: Sacia Kachi. Email: kachi.sacia@gmail.com.

Pr	Prandtl number, ($= \nu/\alpha$)
q''	Thermal flux density, W.m^{-2}
Re	Reynolds number, ($= V_0L/\nu$)
Ri	Richardson number ($= Gr/Re^2$)
t	time, s
T	absolute temperature, K
T_0	sidewall temperature, K
U	horizontal dimensionless velocity component
V_0	sidewall velocity, m.s^{-1}
V	vertical dimensionless velocity component
x, y	dimensional Cartesian coordinates, m
X, Y	dimensionless Cartesian coordinates ($X=x/L$, $Y=y/L$)

Greek symbols

α	thermal diffusivity, $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
β	thermal expansion coefficient, K^{-1}
ε	dimensionless length of the heat source
Θ	dimensionless temperature
ν	kinematic viscosity, $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
τ	dimensionless time
ψ	stream function, $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
Ψ	dimensionless stream function
ω	vorticity, s^{-1}
Ω	dimensionless vorticity

1. Introduction

Heat transfer by natural and mixed convection in confined spaces has attracted attention in recent years because of its importance, not only in the field of scientific academic research but also in industrial processes, as for example in cooling of electronic devices, heat exchangers, chemical reactors design, solar collectors, thermal storage system and many other applications. Numerous studies of natural and mixed convection within enclosures have been reported extensively in the literature that we can all mentioned here. Therefore, we focus on the convective flows in cavities partially or fully heated from below, with the particularity that the boundary conditions are strictly symmetric about the

vertical axis through the center of the cavity. Most of these studies have revealed that dynamic and thermal behavior of the convective flows in such configurations are strongly dependent on both the enclosure geometry, the boundary conditions and the variation of several parameters including Reynolds, Prandtl and Rayleigh (or Grashof) numbers. It is well known that this high dependence can exhibit, in some cases, a large diversity of complex dynamical and thermal behavior such as instability, symmetry breaking, bifurcation and chaos. A detailed review of the existing literature, in connection with the topic of this present study, can be subdivided into two categories, natural convection and forced/mixed convection.

In the first category the studies mentioned in the literature have concentrated, for the most part, on cavities heated partially or fully from below and cooled from above. The heated part is maintained either at a constant temperature or at a constant heat flux and all remaining boundaries are specified as adiabatic walls. Among these investigations, [Robillard, Wang and Vasseur (1988)] and [Hasnaoui, Bilgen and Vasseur (1992)] demonstrated the existence of a large number of steady-state solutions depending on the aspect ratio, Rayleigh number, and dimensionless length of the heated segment. [Corcione (2003)] investigated the effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls and noticed that the number of cells of the flow field increases as the width-to-height aspect ratio of the enclosure increases. [D’Orazio, Cianfrini and Corcione (2004)] studied the effect of the aspect ratio of the cavity and the Rayleigh number on the behavior of the fluid flow. They show that as the Rayleigh number increases, the flow model evolves successively from a stable cell to two stable cells, then to one to three periodic cells and finally to three periodic cells. This evolution leads to abrupt or smooth changes in the Nusselt number. [Venturi, Wan and Karniadakis (2010)] used different stochastic modeling approaches to study the bifurcation and stability process for specific values of the Rayleigh and Prandtl number. They conclude that this method captures accurately the onset of convective instability as well as multiple convection patterns corresponding to random initial flow states. [Ngo, Il and Byon (2015)] also consider the same cavity configuration as previously. Their work indicates that loss of symmetry can occur for all values of the heated part when the Rayleigh number is greater than 10^4 . More recently, [Bouabdallah et al. (2016)] reported the numerical results of the natural Rayleigh-Benard convection in the rectangular cavities. Five bifurcation modes were detected, all dependent on the value of the Rayleigh number and the aspect ratio of the cavity. It should be noted that some authors have examined other geometric forms of cavities, such as isosceles triangular enclosures [Ridouane and Campo (2006); Varol, Oztop, and Koca (2008)], prismatic enclosures [Aich, Hajri and Omri (2011); Saha and Gu (2015)], and trapezoidal enclosures [Tracy and Crunkleton (2012); Esfe et al. (2016)]. However, it is also possible to obtain, by studying natural convection in the similar geometric configurations, perfectly stable flows, without loss of symmetry and without bifurcations. [Aydin and Yang (2000-a), Saha et al. (2007) and Sharif and Mohammad (2005)] studied numerically the natural convection in a square enclosure with centrally localized heating from below and symmetrical cooling from the sides. The bottom surface, except for the heated section, and the upper wall are considered adiabatic. The dimensionless length of the heat source investigated are $1/5$, $2/5$, $3/5$ and $4/5$ and the Rayleigh number is varied from 10^1 to 10^6 . [Calcagni, Marsili and Paroncini (2005),

Corvalo and Paroncini (2008)] investigated the same problem experimentally by using real-time and double-exposure holographic interferometry and numerically by using the commercial finite volumes code Fluent. More recently [Raisi (2016)] examined the natural convection in a square cavity filled with a non-Newtonian power-law fluid and used the numerical finite difference method based on the control volume formulation and SIMPLE algorithm. Certain studies have also been devoted to natural convection in other geometric configurations: [Tzeng, Liou and Jou (2005)] considered a triangular enclosure, [Basak et al. (2009)] treated a trapezoid enclosure, while [Ahmanache and Zeraibi (2013), Alam et al. (2016)] examined a prismatic enclosure.

In this first category, relating to natural convection all studies cited above show that if the sidewalls of the cavity are adiabatic, instabilities, loss of symmetry and bifurcation phenomena have been found to depend mainly on Rayleigh numbers, aspect ratio and vertex angles of the enclosure. In contrast, when the sidewalls are isotherm the fluid flow does not exhibit any instability, loss of symmetry or bifurcations.

In the second category (mixed convection) when a difference in temperature is imposed the effect of the flow due to the buoyancy and displacement of the wall makes the analysis even more complex. The interaction of the sheared flow due to the movement of the wall and the flow of the natural convection due to the buoyancy effect is up to now a fundamental field of research and requires a complete analysis to understand the physics of the resulting flow and heat transfer. [Aydin and Yang (2000-b)], and Guo and Sharif (2004)] considered the numerical studies of the laminar mixed convection in a 2D cavity with an adiabatic upper wall and cold vertical walls moving downward at a constant velocity. A heat source is placed in the center of the lower wall. [Guo and Sharif (2004)] imposed a constant heat flux whereas [Aydin and Yang (2000-b)] considered a fixed temperature wall and the remaining part of this wall is supposed to be adiabatic. The effects of the length of the heat source and the Richardson number were studied. In these two cases the effects of the forced and natural convection being co-operating, neither instabilities nor rupture of symmetry or bifurcation were observed.

The present study differs from [Aydin and Yang (2000-b)] and [Guo and Sharif (2004)] in that here the direction of the displacement of the sidewalls are reversed thus creating a competition between the forced convection and the natural Rayleigh-Bénard convection. Therefore, it is interesting to establish the flow pattern and to predict the various critical values of the Richardson number for the occurrence of loss of symmetry and bifurcations, if these are indeed present in the fluid flow.

2. Model description

The physical model considered is depicted in Fig. 1. A square cavity whose sidewalls are maintained at fixed cold temperature T_0 and move upwards with a fixed velocity V_0 . A heat source maintained at constant heat flux q'' and has a length l equal to $4/5$ of L is placed in the center of the lower wall. All the other parts of the cavity are adiabatic. The flow in the cavity is induced by the force of shearing resulting from the movement of the side walls combined with the buoyancy force resulting from the heat source.

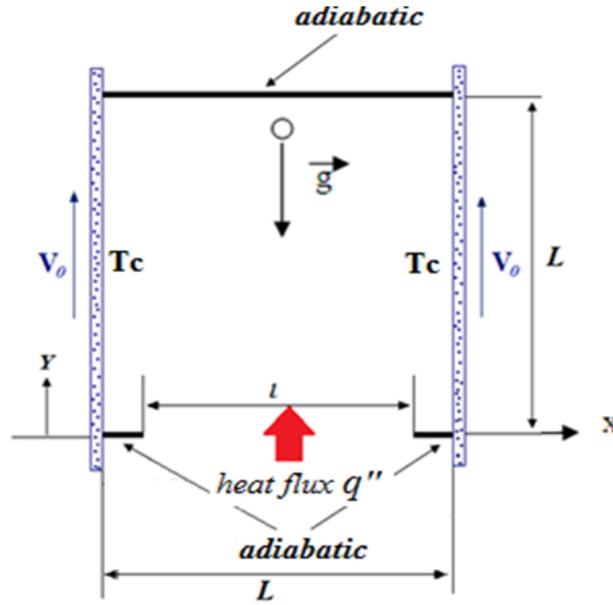


Figure 1: Schematic diagram of the physical model

3. Equations and Mathematical Expressions

The mixed convection phenomena to be investigated here are described by the complete Navier-Stokes and energy equations for two-dimensional laminar incompressible flow. The viscous dissipation term in the energy equation is neglected and the classical Boussinesq approximation is invoked for the buoyancy induced body force term in the momentum equation. The 2-D governing equations are transformed into stream function-vorticity (Ψ - Ω) formulation and can be written in non-dimensional forms:

3.1. Energy Transport Equation

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{RePr} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right] \quad (1)$$

3.2. Vorticity Transport Equation

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] + Ri \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (2)$$

3.3. Stream Function Equation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (3)$$

3.4. Components of the Velocity

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (4)$$

The dimensionless vorticity is defined by:

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$$

Where Re , Pr and Ri denote, respectively, Reynolds, Prandtl and Richardson numbers. They are defined as:

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

The Grashof number Gr is expressed by:

$$Gr = \frac{g \beta q'' L^4}{k \nu^2}$$

Here ν is the kinematic viscosity, α is the thermal diffusivity, β is the thermal expansion coefficient of the fluid and g represents the gravity acceleration and k is the thermal conductivity. The ratio Gr/Re^2 (Richardson number Ri) is a measure of the relative strength of the natural convection and forced convection and plays an important part to indicate the modes of convection. Dimensionless variables are given by the following expressions:

$$x = \frac{x}{L} \quad y = \frac{y}{L} \quad U = \frac{u}{V_0} \quad V = \frac{v}{V_0} \quad \tau = t \frac{V_0}{L} \quad \Theta = \frac{k(T-T_0)}{q'' L} \quad \Omega = \frac{L}{V_0} \omega \quad \Psi = \frac{\psi}{LV_0}$$

The numerical resolution of the previous equations is based on the following initial and boundary conditions:

➤ The initial conditions ($\tau = 0$) are :

$$0 < Y < 1 \quad \& \quad 0 < X < 1: \quad \Theta = 0 \quad \Psi = 0 \quad \Omega = 0$$

➤ The boundary conditions ($\tau > 0$) are :

$$\left. \begin{array}{l} X=0 \\ X=1 \end{array} \right\} \& \quad 0 \leq Y \leq 1 \Rightarrow U = \Theta = \Psi = 0 \quad V = 1. \quad (5a)$$

$$Y=0 \quad \& \quad 0 \leq X \leq (1-\varepsilon)/2 \quad \& \quad (1+\varepsilon)/2 \leq X \leq 1 \quad (5b)$$

$$\Rightarrow U = V = \Psi = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0$$

$$Y=0 \quad \& \quad (1-\varepsilon)/2 \leq X \leq (1+\varepsilon)/2 \quad (5c)$$

$$\Rightarrow U = V = \Psi = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = -1.$$

$$Y=1 \quad \& \quad 0 \leq X \leq 1 \Rightarrow U = V = \Psi = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \quad (5d)$$

Where $\varepsilon = l/L$ is the dimensionless length of the heat source.

Wall vorticity is evaluated by the development of first order Taylor series, which is a function of the stream function and the walls velocity. The expressions are:

$$\begin{aligned}\Omega_{i,w}^{bottom} &= \frac{2}{\Delta Y_0^2} (\Psi_{i,w} - \Psi_{i,w+1}) \\ \Omega_{i,w}^{top} &= \frac{2}{\Delta Y_0^2} (\Psi_{i,w} - \Psi_{i,w-1}) \\ \Omega_{w,j}^{left} &= \frac{2}{\Delta X_0^2} (\Psi_{w,j} - \Psi_{w+1,j} - \Delta X_0) \\ \Omega_{w,j}^{right} &= \frac{2}{\Delta X_0^2} (\Psi_{w,j} - \Psi_{w-1,j} + \Delta X_0)\end{aligned}$$

Where index w denotes the node located just on the wall, i and j are node locations in the X and Y directions, respectively. The first grid spacing in the X and Y directions are denoted by ΔX_0 and ΔY_0 , respectively.

4. Numerical Method

4.1. Discretization

The system of Eqs. (1-4), together with the boundary conditions Eq. (5a-d) have been discretized and solved using the finite difference method. For solving nonlinear systems of differential partial equations, the fourth-order Runge-Kutta method is known to be quite effective compared to other methods. The convective terms in Eqs. (1-2) are discretized using the accurate third order upwind scheme of [Kawamura et al. (1985)] taking into account the sign of the velocity. A fourth-order centered scheme was adopted for the discretization of the diffusive terms, the source term in Eq. (2), and the explicit evaluation of the U and V components of the velocity vector in Eq. (4). The mirror-point technique due to [Leonard (1979)] was used to maintain the fourth-order centered scheme of the first and second spatial partial derivatives in the grid points adjacent to the walls. An iterative procedure based on successive Non Linear Over Relaxation method (NLOR) was used to solve the discretized stream function Eq. (3) in each time step of Runge-Kutta procedure. The iterative procedure is stopped when the maximum relative change in stream function between two consecutive iterations is less than 10^{-6} .

The dimensionless local and average Nusselt numbers of the bottom wall are defined, respectively, by:

$$Nu(X) = \frac{1}{\Theta_w(X)} ; Nu_{av} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon Nu(X) dX$$

The average Nusselt number (Nu_{av}) is integrated using Simpson's rule.

4.2. Grid Independence Test

Grid independence tests were carried out. Computed results of the average Nusselt number with $Ri = 10$, $Re = 100$ and $Pr = 0.71$ obtained using different grid sizes are given in Tab. 1. As a compromise between accuracy and CPU time, it was decided to use a non-uniform grid with 101×101 grid points for subsequent calculations.

Table 1: Comparison of the average Nusselt number for various grid arrangements

Grid size	Average Nusselt number	Relative error in %
201×201	5.68913	-----
161×161	5.68334	0.10
101×101	5.66724	0.49
81×81	5.65734	0.56

4.3. Code Validation

The computer code developed with Fortran language has been validated by considering the geometric configuration investigated by [Aydin and Yang (2000)]. We report in Fig. 2 and Fig. 3 a comparison of the average Nusselt number Nu_{av} of the heat source and the dimensionless vertical velocity profiles, at the horizontal mid-plane respectively. As can be noticed from these figures the obtained results show a good agreement between both models.

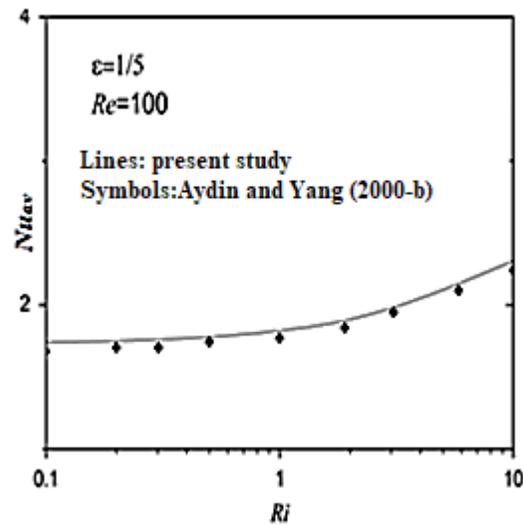


Figure 2: Comparison of the average Nusselt number Nu_{av} with results of Aydin and Yang (2000-b)

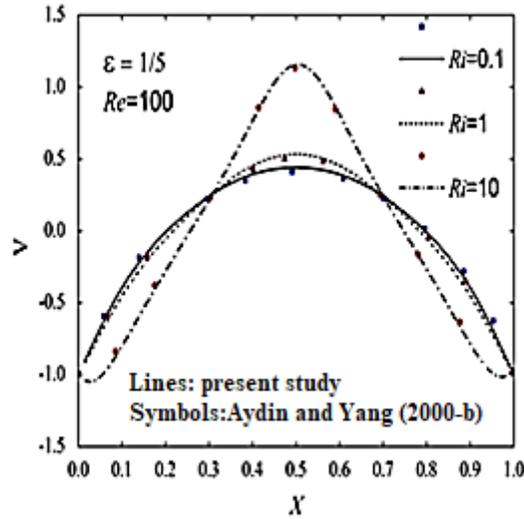


Figure 3: Comparison of the vertical component velocity V at $Y = 0.5$ with results of Aydin and Yang (2000-b)

5. Results and Discussion

In this study, the fluid flow and heat transfer phenomena are investigated for a wide range of Richardson numbers to detect various behaviors of the fluid flow in the cavity. Air was the working fluid with a constant Prandtl number of 0.71. The Reynolds number was fixed at 10^2 and the value of the Grashof number is between $5 \cdot 10^3$ and 10^6 depending on the value of the Richardson number.

5.1. Effect of Richardson number

The results of the effect of increasing the Richardson number on the average Nusselt number for the different simulations are shown in Figure 4. It can be observed that the average Nusselt number along the bottom heated wall of the cavity increases continuously with increasing Ri . However, three different behaviors of the fluid flow may be observed from this figure. To show these two bifurcations, stream functions (above the curve) and isotherms contours (below the curve) are plotted on the same figure for Richardson numbers equal to 10, 35 and 45. A first bifurcation is located at point B while a second is located at point C. Point B marks the transition from a flow characterized by two perfectly symmetrical cells to a flow characterized by two asymmetrical cells, and point C indicates the passage of the previous flow to a flow characterized by two pairs of perfectly identical cells. It should be noted that some results concerning this second bifurcation are detailed and reported in [Kachi, S. and Boudebous, S. (2016)].

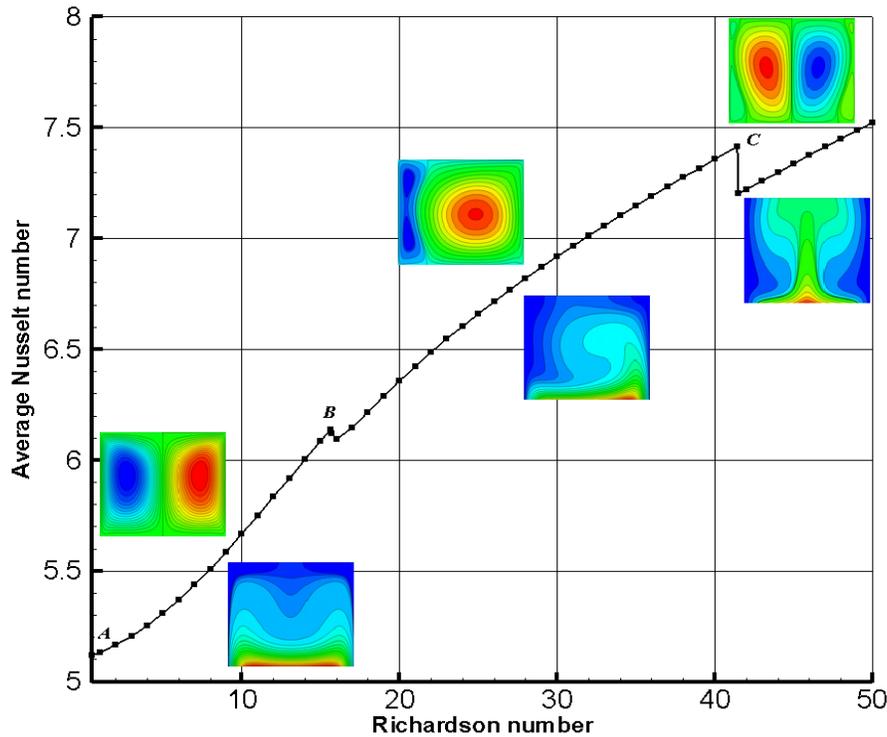


Figure 4: Variation of the average Nusselt number Nu_{av} with Richardson number Ri

5.2. First Bifurcation

The first bifurcation occurs at point B (Fig. 4), when the Richardson number Ri increases from 15.6 to 15.7 and the Nu_{av} decreases abruptly from 6.14 to 6.12. Visual examination of the streamlines indicated in Fig. 5 shows a slight difference of the flow behavior before and after the first bifurcation. However, a slightly more pronounced asymmetry was observed in the isotherms shown in Fig. 6. In each case, we note that thermal stratification exists near the heated part. The ascending movement of the sidewalls leads upwardly adjacent fluid layers to the walls by viscous forces; we also note that the cold temperature prevails in the whole upper part of the cavity. In fact, the low heat flow recovered by the fluid from the heat source is directly discharged through the lower portion of the vertical walls.

Therefore, the temperature distribution is not affected by the increase of Ri ; this justifies the dominance of shear forces with respect to buoyancy forces. Moreover, it is also visible in Fig. 5 (b) and Fig. 9 (a) that the right cell becomes progressively larger than the left, probably because the thermal boundary condition effect begins to generate a loss of symmetry of the fluid flow in the cavity. It is interesting to note that this asymmetry of the flow regime becomes more noticeable with the increase in Ri until it reaches the limit value of 41.4.

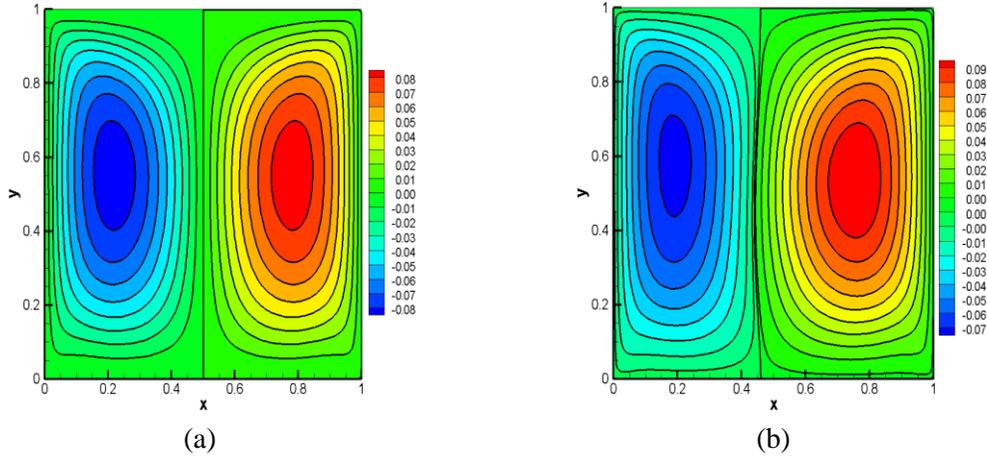


Figure 5: Streamlines for $Ri = 15.6$ (a) and $Ri = 15.7$ (b)

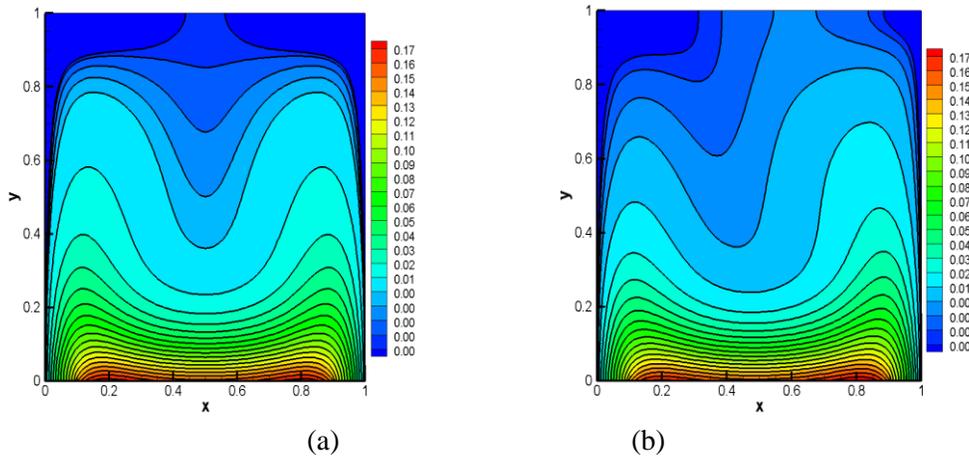


Figure 6: Isotherms for $Ri = 15.6$ (a) and $Ri = 15.7$ (b)

The change in the flow behavior in this first bifurcation is depicted more clearly in Fig. 7, which shows the evolution of the Nu_{av} along the hot surface (Fig. 7 (a)) and the temperature at the center of the cavity (Fig. 7 (b)). We can see that the value of the Nu_{av} remains constant and equal to 6.14 at $Ri = 15.6$, while for $Ri = 15.7$ the value of the same number begins to decrease gradually at $\tau = 12.5 \cdot 10^3$ and becomes stable and equal to 6.12 at $\tau = 22.5 \cdot 10^3$. At the same time, the temperature computed at the center of the cavity increases gradually from $3.2 \cdot 10^{-3}$ to $4.2 \cdot 10^{-3}$. It is obvious that if the standard test of convergence is applied to stop the calculations, the solution would have converged at $\tau = 15$, but the results obtained in the figure 7, for $Ri = 15.7$, indicates that the change in fluid flow begins to occur at $\tau = 12.5 \cdot 10^3$ to be stabilized at $\tau = 22.5 \cdot 10^3$. It took a calculation time of between 2 and 3 days for each numerical simulation, while the Richardson number Ri is between 15 and 16, on a "HP Z820 Workstation" to detect this first

bifurcation. In this case the corresponding number of iterations can reach about 225 million with a time step $\Delta\tau$ equal to 10^{-4} .

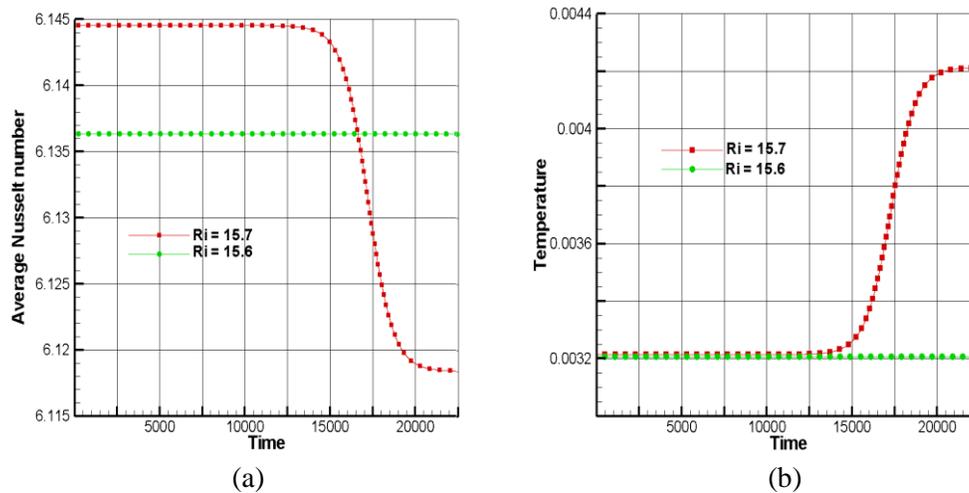


Figure 7: Evolution of the Nu_{av} (a) and the temperature at the center of the cavity (b) for $Ri = 15.6$ and 15.7

5.3. Second Bifurcation

The second bifurcation occurs at point C (Fig. 4), when the Richardson number Ri increases from 41.4 to 41.5 the number of Nusselt decreases suddenly from 7.42 to 7.20. Fig. 8 and Fig. 9 show the dynamic and thermal fields for Richardson numbers equal to 41.4 and 41.5 respectively. It is interesting to observe that before and after this second bifurcation, the behavior of the flow in the cavity becomes radically different. Indeed, it goes from a state characterized by two unbalanced cells to a state characterized by two pairs of cells perfectly symmetrical. The pair of contra rotating cells in the center of the cavity is mainly managed by the buoyancy forces and viscous forces maintain the pair of clamped cells close to vertical moving walls (Fig. 8 (b)). In this flow regime, the heat recovered from the heat source is conveyed by convection, in the form of a thermal plume, to the top of the cavity by the pair of cells in the center. This is what explains the relatively high temperatures in the central portion of the cavity. The heat is dissipated fairly through the two sidewalls (Fig. 9 (b)).

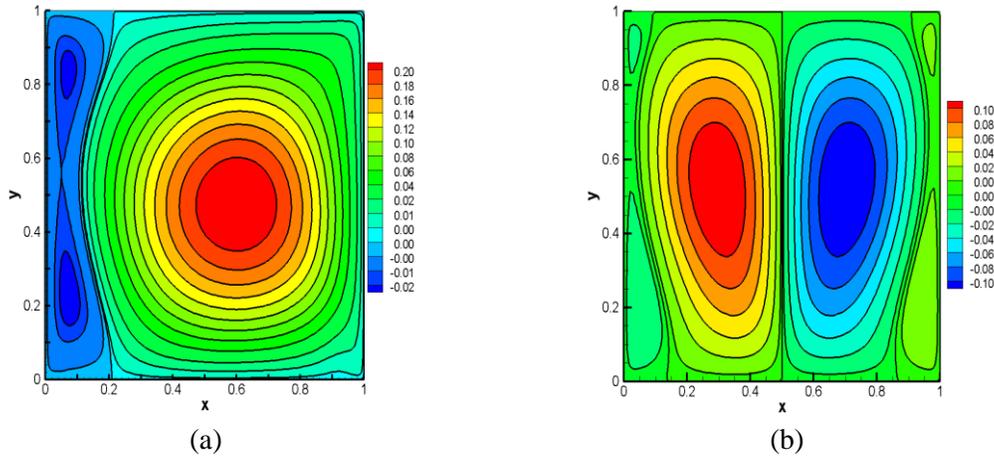


Figure 8: Streamlines for $Ri = 41.4$ (a) and $Ri = 41.5$ (b)

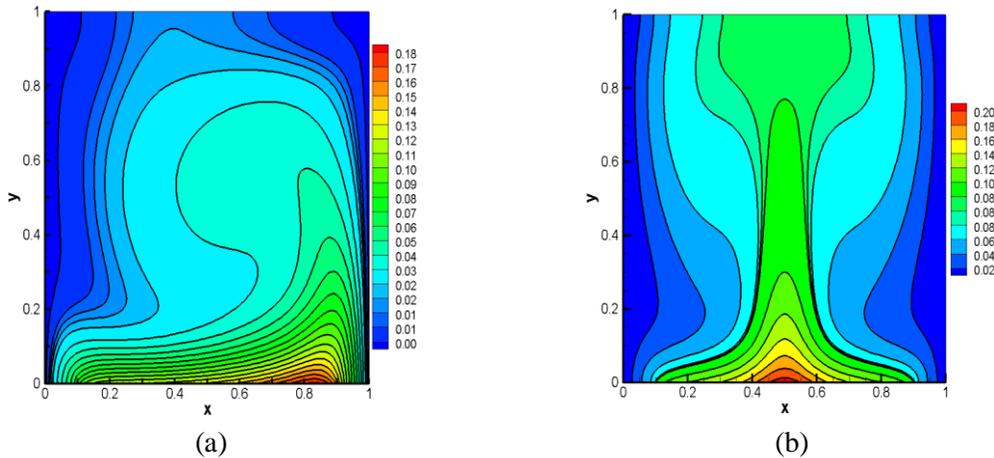


Figure 9: Isotherms for $Ri = 41.4$ (a) and $Ri = 41.5$ (b)

The evolution of the average Nusselt number and the component U of the velocity at the center of the cavity are shown in Fig. 10 and Fig. 11 respectively. The value of the average Nusselt number (Fig. 10) fluctuates during the first instants ($\tau < 20$) and then decreases progressively to be stabilized at a fixed value equal to 7.20 for $Ri = 41.5$, while for $Ri = 41.4$, it presents an oscillation between $\tau = 30$ and $\tau = 70$ before being stabilized at a fixed value equal to 7.41. Unlike the first bifurcation, we found it useful to highlight the asymmetry of the fluid flow, not considering the temperature computed at the center of the cavity, but by plotting in Fig. 11 the quantitative evolution of the horizontal component U of the velocity computed at the same point ($X=0.5, Y=0.5$). A closer examination of this figure reveals that for $Ri = 41.5$ the U component remains constant equal to 0 indicating no fluid passing through the vertical center plane, while for $Ri = 41.4$ it fluctuates, then increases, afterwards gradually decreases to be stabilized at a

negative value equal to -0.7 . As expected from Fig. 8 (a) more fluid is transferred from the right side of the cavity to its left side.

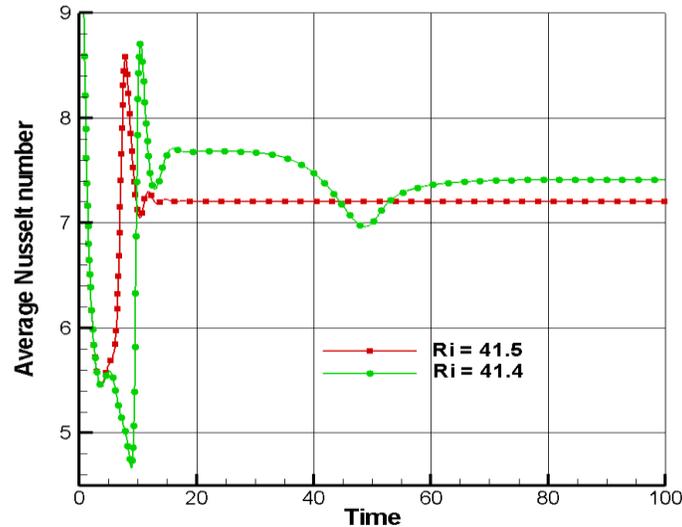


Figure 10: Evolution of the average Nusselt number for $Ri = 41.4$ and 41.5

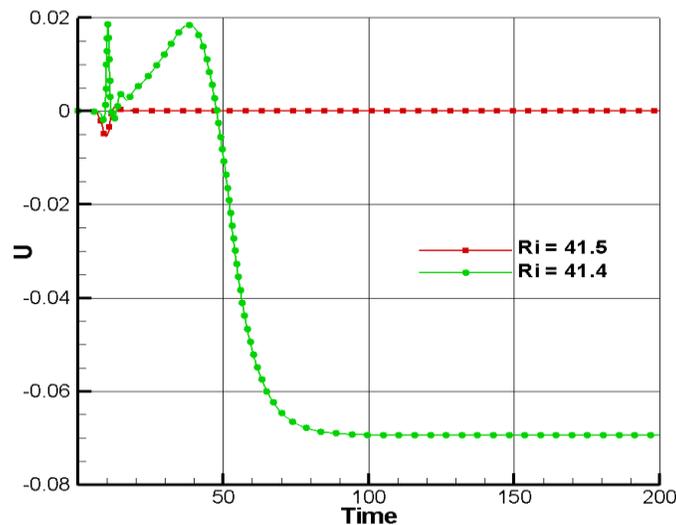


Figure 11: Evolution of the component U of the velocity at the center of the cavity for $Ri = 41.4$ and 41.5

6. Conclusion

This study investigates numerical unsteady laminar mixed convection in a square cavity with constant heat flux applied on a part of the bottom wall. The sidewalls of the cavity are subjected to a constant cold temperature and a fixed upward velocity. The other parts of the cavity are considered adiabatic. The finite difference method was used to discretize the equations governing the studied phenomenon. The numerical results are obtained for

different values of the Richardson number. Reynolds and Prandtl numbers are kept constant at values equal to 100 and 0.71 respectively.

In the confined flow, a competition between the shearing forces resulting from the movement of the sidewalls combined with the buoyancy forces resulting from the heat source may be at the origin of the bifurcation phenomena. The results of different numerical simulations carried out clearly indicate the existence of two bifurcations occurring in the given geometry. The first bifurcation is located at a Richardson number between 15.6 and 15.7 and the second bifurcation is between the values 41.4 and 41.5 of the same number. In the first bifurcation, the resulting flow consists of the transition from two symmetric counter-rotating vortices to two asymmetric counter-rotating vortices. In the second bifurcation, the resulting flow consists of the transition from two asymmetric counter-rotating vortices to four symmetrical counter-rotating vortices.

A particular feature in this study is related to the total absence of an a priori knowledge of the existence of bifurcations since the boundary conditions adopted here are perfectly symmetrical. These bifurcations would not have been revealed, if we had considered half the domain, with the symmetry condition on the vertical axis passing through the center of the cavity and if we had used the classic test of convergence of the solution to stop the calculations. This would have led to erroneous conclusions about the behavior of the fluid flow and the inability to find the non-symmetric solutions.

Acknowledgement: The authors like to express their thankfulness to the Laboratory of micro-systems and instrumentation, University of Mentouri brothers Constantine, for providing computer facility during this work.

References:

- Ahmanache, A.; Zeraibi, N.** (2013): Numerical Study of Natural Melt Convection in Cylindrical Cavity with Hot Walls and Bottom Sink. *Thermal Science*, vol. 17, pp. 853–864.
- Aich, W.; Hajri, I.; Omri, A.** (2011): Numerical Analysis of Natural Convection in a Prismatic Enclosure, *Thermal Science*, vol. 15, pp. 437–446.
- Alam, M. S.; Rahman M. M.; Parvin, S.; and Vajravelu K.** (2016): Finite Element Simulation for Heat Line Visualization of Natural Convective Flow and Heat Transfer Inside a Prismatic Enclosure. *Int. J. Heat and Technology*, vol. 34, pp. 391–400.
- Aydin, O.; Yang, W. J.** (2000-a): Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 10, pp. 518–529.
- Aydin, O.; Yang, W. J.** (2000-b): Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 36, pp. 695–710.
- Basak, T.; Roy, S.; Singh, A.; Balakrishnan A.R.** (2009): Natural convection flows in porous trapezoidal enclosures with various inclination angles. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 52, pp. 4612–4623.

- Bouabdallah,S; Ghernaout,B.; Tegggar,M.; Benchatti, A.; Benarab, F.Z.** (2016): Onset of Natural Convection and Transition Laminar-Oscillatory Convection Flow in Rayleigh-Bénard Configuration. *Int. J. Heat and Technology*, vol. 34, pp. 151–157.
- Calcagni,B. ; Marsili, F. ; Paroncini, M.** (2005) : Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, *Applied Thermal Engineering*, vol. 25, pp. 2522–2531.
- Corcione, M.** (2003): Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 42, pp. 199–208.
- Corvalo, F.; Paroncini, M.** (2007): Experimental analysis of natural convection in square cavities heated from below with 2D-PIV and holographic interferometers techniques, *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 31, pp. 721–739.
- Corvalo, F.; Paroncini, M.** (2008): A numerical and experimental analysis on the natural convective heat transfer of a small heating strip located on the floor of a square cavity, *Applied Thermal Engineering*, vol. 28, pp. 25–35.
- D’Orazio, M.C.; Cianfrini, C.; Corcione, M.** (2004): Rayleigh-Bénard convection in tall rectangular enclosures. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 43, pp. 135–144.
- Esfe, M.H.; Arani, A.A.A.; Yan, W.M.; Ehteram, H.; Aghaie, A.; Afrand, M.** (2016): Natural convection in a trapezoidal enclosure filled with carbon nano tube–EG–water Nano fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 92, pp. 76–82.
- Guo, G.; Sharif, M.A.R.** (2004): Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 43, pp. 465–475.
- Hasnaoui, M. ; Bilgen, E. ; Vasseur, P.** (1992): Natural convection heat transfer in rectangular cavities partially heated from below. *J. of Thermophysics and Heat Transfer*, vol. 6, pp. 255–264.
- Kachi. S.; Boudebous, S.** (2016): Convection Mixte dans une Cavité à Parois Latérales Mobiles et dont une Partie de la Paroi Inférieure est Soumise à un Flux de Chaleur Fixé. *Third International Conference on Energy, Materials, Applied Energetics and Pollution (ICEMAEP2016)*, Constantine, Algeria, pp.230–235.
- Kawamura, T.; Takami, H.; Kuwahara, K.** (1985): New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations. *Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics*, vol. 218, pp. 291–295.
- Leonard, B.P.** (1979): A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* vol. 19, pp. 58–98.
- Ngog, IL; Byon C.** (2015): Effects of heater location and heater size on the natural convection heat transfer in a square cavity using finite element method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, pp. 2995–3003.
- Raisi, A.** (2016): Natural convection of non-newtonian fluids in a square cavity with a localized heat source. *Journal of Mechanical Engineering*, vol. 4, pp. 553–564.

- Ridouane, E.H.; Campo, A.** (2006): Formation of a pitchfork bifurcation in thermal convection flow inside an isosceles triangular cavity. *Physics of Fluids*, vol. 18, pp. 074102–1–8.
- Robillard, L.; Wang, C. H.; Vasseur, P.** (1988): Multiple steady states in a confined porous medium with localized heating from below. *Numerical Heat Transfer*, vol. 13, pp. 91–110.
- Saha, G.; Saha, S. ; Islam, M.Q ; Akhanda, M. A.R.** (2007): Natural convection in enclosure with discrete isothermal heating from below. *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, vol. 4, pp. 1–13.
- Saha, S.C.; Gu, Y.T.** (2015): Natural convection in a triangular enclosure heated from below and non-uniformly cooled from top. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 80, pp.529–538.
- Sharif, M.A.R.; Mohammad, T.R.** (2005): Natural convection in cavities with constant flux heating at the bottom wall and isothermal cooling from the sidewalls. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 44, no. 9, pp. 865–878.
- Tracy, N.I.; Crunkleton, D.W.** (2012): Oscillatory natural convection in trapezoidal enclosures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, pp. 4498–4510.
- Tzeng, S. C.; Liou J. H.; Jou, R. Y.** (2005): Numerical Simulation-Aided Parametric Analysis of Natural Convection in a Roof of Triangular Enclosures. *Heat Transfer Engineering*, vol. 26, pp. 69–79.
- Varol, Y.; Oztop, H.F.; Koca, A.** (2008): Entropy production due to free convection in partially heated isosceles triangular enclosures. *Applied Thermal Engineering*, vol. 28, pp. 1502–1513.
- Venturi, D.; Wan, X.; Karniadakis, G.E.** (2010): Stochastic bifurcation analysis of Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.*, vol. 650, pp. 391–413.

3rd International Conference on

Fluid Dynamics & Aerodynamics

October 25-26, 2018 | Berlin, Germany

Mixed convection in a square cavity with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall

Sacia Kachi¹ and Saadoun Boudebous²¹University Salah Boubnider Constantine3, Algeria²University Larbi Ben M'hidi, Oum el Bouaghi, Algeria

In the present study, we are interested in the numerical simulation of the air flow in mixed laminar convection, in a two-dimensional square cavity with a side length L while the isothermal sidewalls are moving simultaneously with an upward constant velocity in the vertical direction and subjected to a cold temperature. A constant flux heat source with relative length l is placed in the center of the lower wall. The other parts of this cavity are considered adiabatic. A mathematical model based on the stream function-vorticity (ψ - ω) formulation is used. Discretization of the governing equations is achieved through a finite difference method considering a non-uniform mesh where the spatial partial derivatives and boundary conditions of the phenomenon governing equations are discretized using a high order scheme, and time advance is dealt with by the fourth order Runge Kutta method. The Richardson number (R_i), which represents the relative importance of the natural and forced convection, is chosen as the bifurcation parameter. Although the geometry and boundary conditions for velocity and temperature are symmetrical with respect to the vertical axis passing through the center of the cavity, the analysis of the first results made it possible to detect the existence of a radical change of the flow for values of the Richardson number between 15.6 and 15.7.

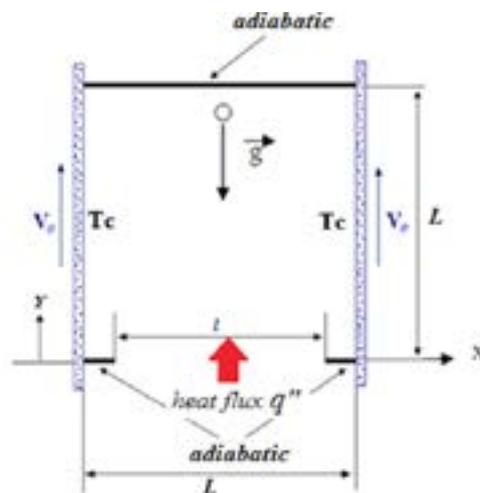


Figure 1: Schematic diagram of the physical model.

Biography

Sacia Kachi completed her Master 2 Diploma in 2011 from Kasdi Merbah University- Ouargla, under a final project titled: Studies of techniques for improving distillation by solar energy in Renewable Energy Laboratory of the Faculty of Science and Technology in the same university. She registered in her PhD in Chemical Engineering in November in the same year in Salah Boubnider- Constantine 3 University. She taught numerical analysis and chemical kinetics modules in the years 2014 and 2015 in Process Engineering Faculty. She has published some national and international publications.

kachi.sacia@gmail.com

Notes:

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L'INFLUENCE DU NOMBRE DE PRANDLT SUR LA GÉNÉRATION D'ENTROPIE DANS UNE ENSEINTE CARRÉE CHAUFFÉE PAR LE BAS

FERROUDJ NAWAL^{#1}, KACHI SACIA^{*2}, BOUDEBOUS SAADOUN^{#3}

^{#1} *Laboratoire de Biotechnologie, École Nationale Supérieure de Biotechnologie (ENSB), Constantine, Algérie*
Ville universitaire Ali Mendjeli, BP E66 25100, Constantine, Algérie

¹n.ferroudj@ensbiotech.edu.dz

²kachi.sacia@gmail.com

²*Génie des procédés, Université de Constantine3, Algérie*

³s_boudebous@yahoo.fr

^{#3} *Université de Larbi Ben M'hidi O.E.B*
Algérie

Abstract— Dans ce travail nous nous intéressons à une étude numérique du phénomène de la génération d'entropie en convection mixte laminaire dans une cavité carrée. Les parois latérales de la cavité, soumises à une température froide, se déplacent vers le haut avec une vitesse constante. Une source de chaleur est placée au milieu de la paroi inférieure. Toutes les autres parois de la cavité sont considérées adiabatiques. Les équations générales de conservation, formulées par un modèle mathématique basé sur l'approche « fonction de courant-vorticité (ψ, ω) », sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les résultats obtenus présentent l'influence du nombre de Prandtl pour différentes valeurs du nombre de Richardson sur les caractéristiques des champs de la génération d'entropie.

Keywords— Génération d'entropie, convection mixte, Différences Finies, Nombre de Prandtl, Cavité Carrée.

décrites dans plusieurs ouvrages de Bejan [3, 4]. Les concepts fondamentaux de l'énergie, de l'entropie et de leurs applications dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques ont été bien détaillés par Dincer et Cengel [5]. De nombreux travaux sur la génération d'entropie dans différents processus ont déjà été rapportés par Oztop et Al-Salem [6] et plus récemment par Oztop et al. [7]. L'étude de la littérature montre qu'aucune attention particulière n'a été accordée à la convection mixte dans la configuration géométrique considérée dans ce travail. Cette contribution vise à étudier l'influence des nombres de Prandtl et de Richardson sur la distribution de la génération de l'entropie et du nombre de Bejan en régime de convection mixte dans la dite configuration géométrique.

I. INTRODUCTION

Les écoulements des fluides dans des espaces confinés avec transfert de chaleur se rencontrent dans de très nombreux domaines de la science et de la technologie tels que par exemple, le refroidissement des composants électroniques, le chauffage et climatisation, les processus biotechnologiques etc. La résistance thermique et le frottement sont des mécanismes qui génèrent une irréversibilité lors des écoulements de fluide présents dans tout processus de transfert de chaleur. Cependant, la première et la deuxième loi de la thermodynamique indiquent que ces irréversibilités entraînent une perte de travail utile (génération d'entropie) dans les processus de transfert de chaleur. L'un des principaux défis de l'ingénierie thermique est de minimiser la génération d'entropie d'un système pour collecter le maximum de travail utile et améliorer ainsi l'efficacité énergétique du système [1, 2]. Les études théoriques les plus importantes de la production d'entropie dans les processus de transfert de chaleur ont été

II. DESCRIPTION DU PROBLEME

La géométrie considérée dans cette étude est une cavité carrée illustrée sur la figure 1. Elle contient une source de la chaleur sur la paroi inférieure soumise à une température constante T_c , les parois verticales se déplacent vers le haut avec une vitesse fixée V_0 , et sont maintenues à une température froide constante T_f . Les autres parois sont supposées adiabatiques. Nous supposons que l'écoulement est laminaire et bidimensionnel, le fluide newtonien et incompressible et qu'il satisfait l'hypothèse de Boussinesq.

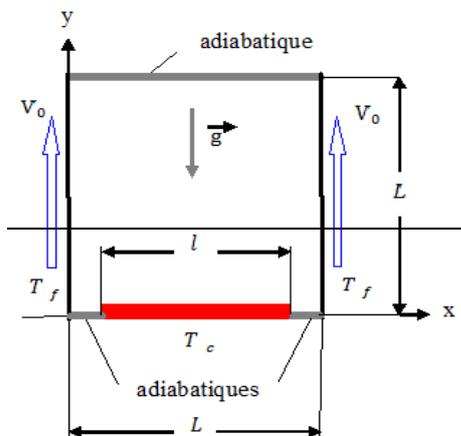


Figure 1. Configuration géométrique

Le modèle mathématique, basé sur la formulation fonction du courant-vorticité ($\psi-\omega$), régissant le phénomène de la convection mixte est donné par les équations adimensionnelles suivantes :

A. Equation d'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (1)$$

B. Equation de la vorticité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (2)$$

C. Equation de la fonction de courant :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (3)$$

D. Composantes de vitesses :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad , \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4)$$

Les paramètres figurant dans ces équations sont, respectivement, les nombres de Reynolds, de Prandtl et de Richardson et sont définis par les relations suivantes :

$$\text{Re} = \frac{V_0 L}{\nu} \quad , \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad , \quad \text{Ri} = \frac{Gr}{\text{Re}^2} \quad ,$$

$$Gr = \frac{g \beta (T_c - T_f) L^3}{\nu^2} \text{ est le nombre de Grashof.}$$

Les variables primitives et les variables sans dimensions sont reliés par les expressions suivantes :

$$X = \frac{x}{L} \quad , \quad Y = \frac{y}{L} \quad , \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_c - T_f} \quad , \quad U = \frac{u}{V_0} \quad , \quad V = \frac{v}{V_0} \quad , \quad \tau = t \frac{V_0}{L} \quad , \quad P = \frac{p - p_0}{\rho V_0^2}$$

Dans ces relations x et y sont les coordonnées cartésiennes ; u et v sont les composantes de la vitesse ; g est l'accélération terrestre, T est la température, t est le temps et p est la pression. ν , α , et β désignent, respectivement, la viscosité, la diffusivité thermique et le coefficient d'expansion thermique.

La résolution des équations précédentes est basée sur les conditions aux limites figurant sur la figure 1.

L'équation permettant la détermination du champ de la génération dans le domaine considéré est donnée par l'expression suivante [2] :

$$S_{gen} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right]}_{S_\theta} + \underbrace{\varphi \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]}_{S_\psi} \quad (6)$$

Dans cette formule S_θ est la génération d'entropie thermique, S_ψ la génération d'entropie visqueuse et

$$\varphi = \frac{\mu V_0^2}{k \Delta T^2} \text{ est le coefficient de distribution d'irréversibilité.}$$

Le nombre de Bejan (Be) local qui exprime le rapport entre la génération d'entropie thermique et la génération d'entropie totale est défini par :

$$Be = \frac{S_\theta}{S_\theta + S_\psi} \quad (7)$$

L'intégration numérique, des équations (6) et (7), sur toute la surface de la cavité (Voir l'équation (8)) nous permet de calculer la génération de l'entropie moyenne et le nombre moyen de Bejan.

$$\overline{S_{gen}} = \int_0^1 \int_0^1 (S_\theta + S_\psi) dXdY \quad \overline{Be} = \int_0^1 \int_0^1 Be dXdY \quad (8)$$

III. PROCEDURE NUMERIQUE

Le système d'équation (1-4) avec les conditions aux limites (5a-5d) a été discrétisé par la méthode des différences finies. La discrétisation suivant le temps est assurée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma Upwind du 3^{ème} ordre, alors que les termes diffusifs et les termes sources sont traités par un schéma de différences centrales du 4^{ème} ordre. L'équation de la fonction de courant est résolue par la méthode itérative de sur relaxation N.L.O.R. (Non Linear Over Relaxation). Une fois les champs thermique et hydrodynamique déterminés les équations (6 et 7) sont résolues pour obtenir, respectivement, les champs de la génération de l'entropie et le nombre local de Bejan. Une série de simulations préalables nous a permis d'opter pour un maillage non uniforme de 100×100 nœuds suivant chaque direction. Un code de résolution a été établi en

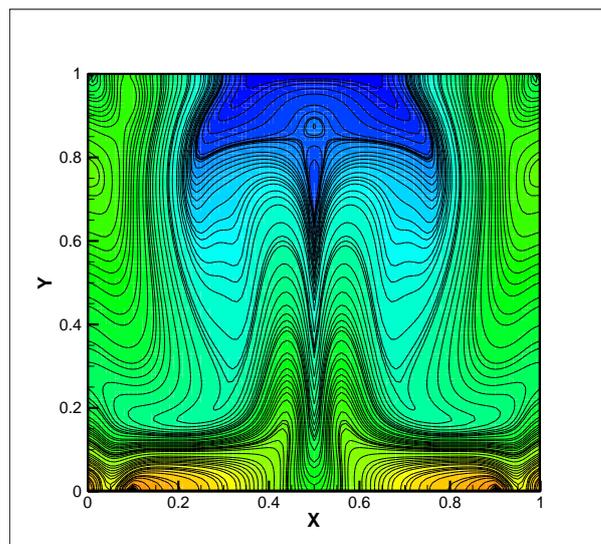
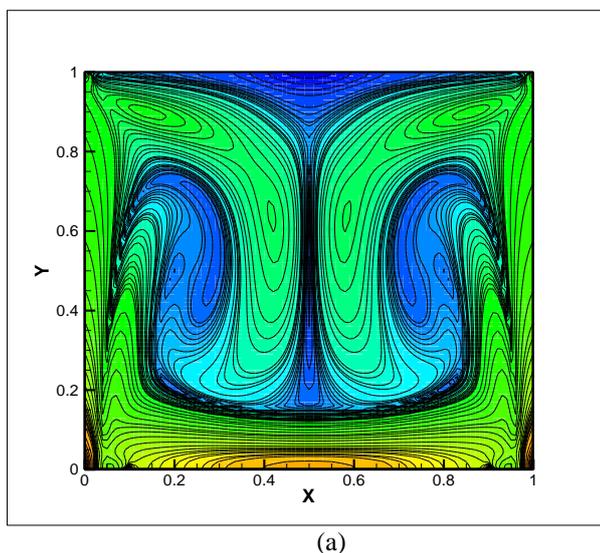
langage Fortran et a été validé en considérant le travail d'Aydin et Yang [8].

VI. RESULTATS

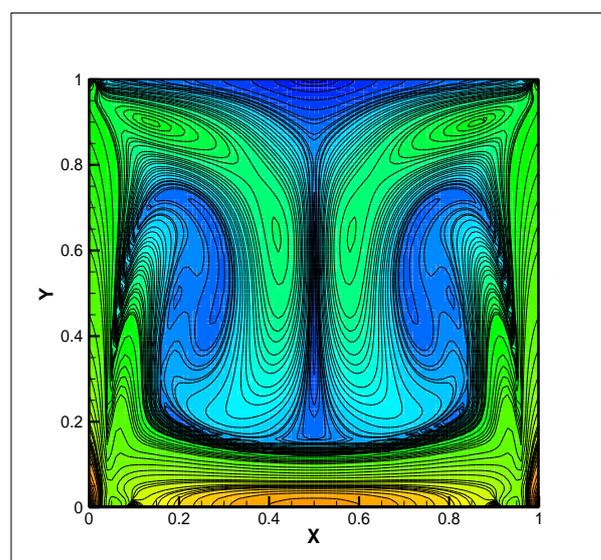
Les simulations numériques ont été effectuées pour un nombre de Reynolds fixé à 100, une longueur adimensionnelle de la partie chauffée ε égale à 0.8 et un coefficient de distribution d'irréversibilité φ égal à 10^{-4} . Trois valeurs du nombre de Prandtl (0.0198, 0.71 et 3.02) caractérisant, respectivement, le mercure, l'air et l'eau ont été considérées pour étudier leur influence sur les champs de la génération d'entropie et du nombre de Bejan et l'évolution de leur moyenne en régime de convection naturelle dominante ($Ri=15$).

A. Les champs de la génération d'entropie totale

Les contours de la génération d'entropie totale sont montrés par la figure 2 pour les différents fluides considérés. Nous constatons que la génération totale d'entropie augmente en fonction du nombre de Prandtl. Aux faibles valeurs de ce nombre, la variation de l'entropie totale ne varie pas beaucoup car le mécanisme de conduction domine et que le gradient de température et le champ d'écoulement sont si réduits ; mais pour les valeurs élevées de ce nombre, l'augmentation de la production totale d'entropie est plus importante, ce qui peut s'expliquer par l'augmentation de l'intensité de l'écoulement du fluide et des gradients de la température. En outre cette génération de l'entropie devient de plus en plus significative et se développe sur les parois latérales et la partie chauffée de la paroi inférieure.



(b)

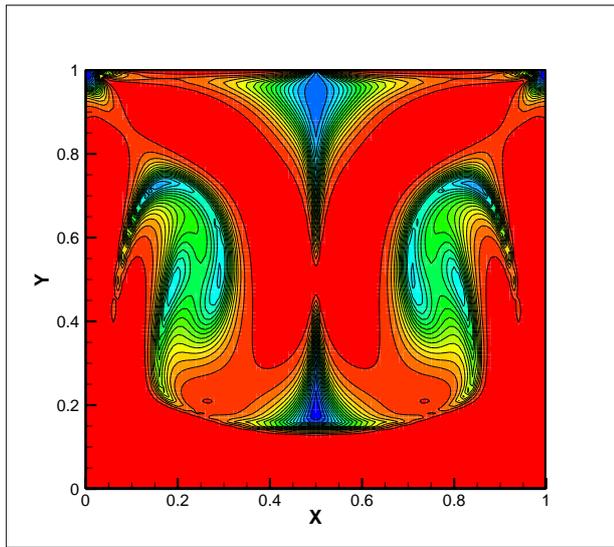


(c)

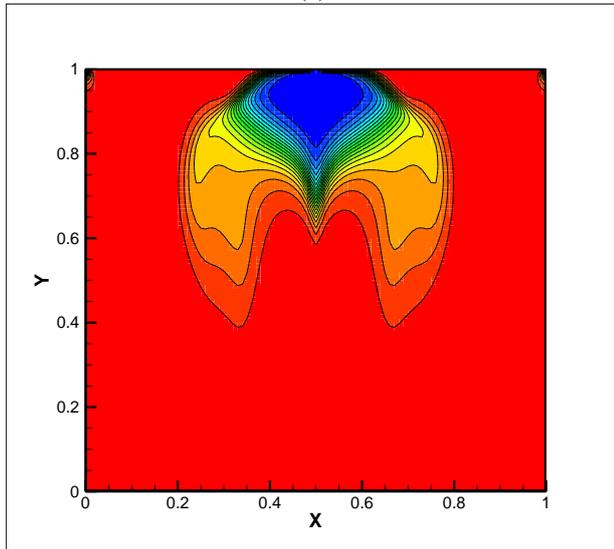
Figure 2. Génération d'entropie totale (a) Mercure $Pr=0.0198$, (b) Air $Pr=0.71$ et (c) Eau $Pr=3.02$

B. Les champs du nombre de Bejan

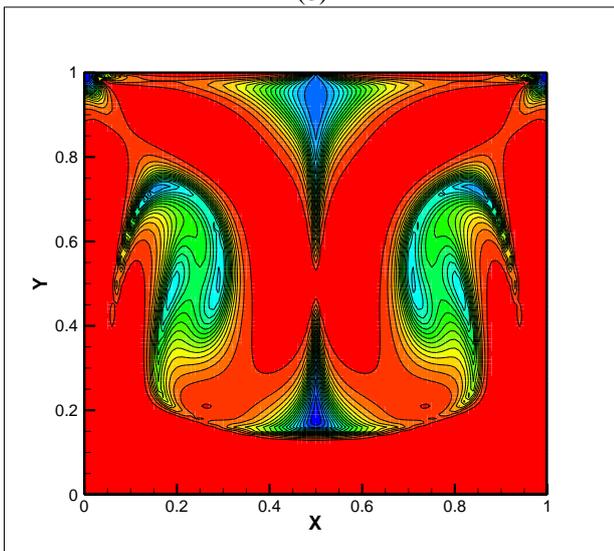
Les contours du nombre local de Bejan sont montrés dans la figure 3 pour les différents fluides considérés. Des valeurs maximales de ce nombre sont obtenues presque dans toute la cavité, sauf dans une partie médiane située sur la paroi supérieure qui se rétrécit au fur et à mesure que le nombre de Prandtl augmente.



(a)



(b)

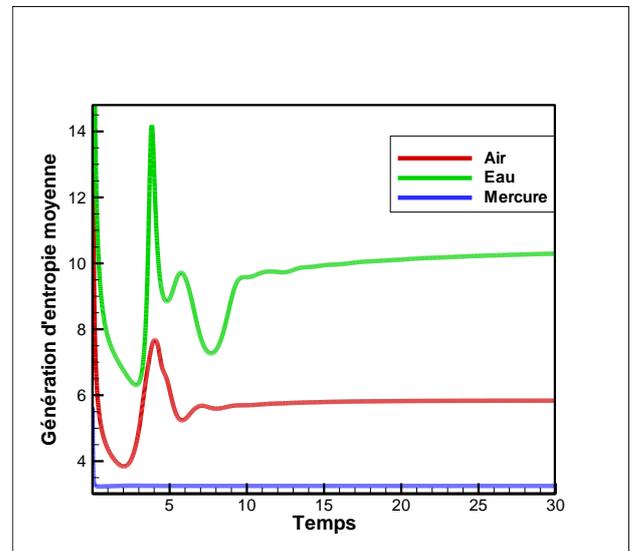


(c)

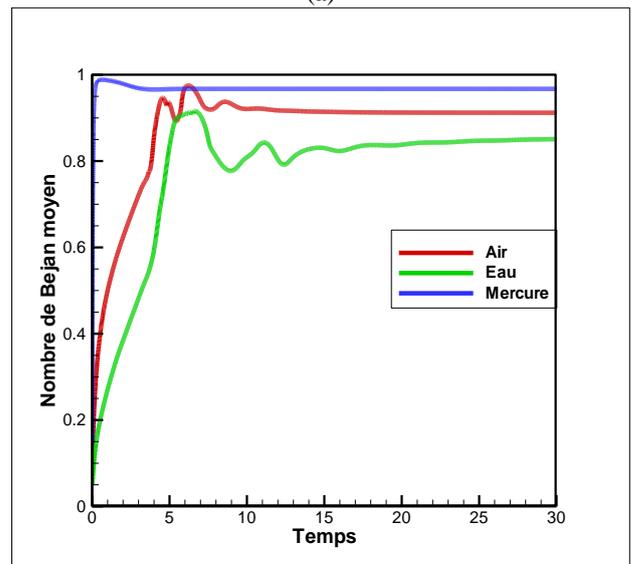
Figure 3. Nombre de Bejan (a) Mercure $Pr=0.0198$, (b) Air $Pr=0.71$ et (c) Eau $Pr=3.02$

C. Evolution de la génération d'entropie moyenne et du nombre de Bejan moyen

L'évolution de la génération d'entropie moyenne et du nombre de Bejan moyen est montrée, respectivement, dans la figure 4 (a) et (b). Cette évolution présente des fluctuations dans les premiers instants avant de se stabiliser à des valeurs constantes. Ces valeurs confirment les résultats précédents à savoir que la génération de l'entropie totale augmente au fur et à mesure que le nombre de Prandtl augmente. Le nombre moyen de Bejan de l'air est légèrement inférieur que ceux du mercure et de l'eau.



(a)



(b)

Figure 4. Evolution de la génération d'entropie (a) et du nombre de Bejan (b)

IV. CONCLUSIONS

Dans cette étude numérique nous avons considéré l'influence du nombre de Prandtl sur la génération d'entropie de l'écoulement d'un fluide où la convection naturelle est dominante ($Ri=16$). La configuration géométrique explorée est une cavité carrée chauffée par le bas et dont les parois latérales froides se déplacent vers le haut avec une vitesse constante. Toutes les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques. Les résultats préliminaires montrent:

- Une augmentation significative de la génération d'entropie moyenne quand le nombre de Prandtl augmente.
- Le nombre de Bejan moyen, pour tous les fluides considérés, est supérieur à 0.5 confirmant que la génération de l'entropie est essentiellement produite par les gradients de température.

REFERENCES

- [1] A. Bejan, Second law analysis in heat transfer. *Energy*, 1980, 5, 720–732.
- [2] A. Bejan. *Entropy Generation Minimization*, CRC Press, 1996.
- [3] A. Bejan. *Entropy Generation through Heat and Fluid Flow*. New York: Wiley Interscience, 1982.
- [4] Bejan A., *Advanced Engineering Thermo-dynamics*, John Wiley and Sons, New York 1988.
- [5] Ibrahim Dincer, Yunus A., Cengel, *Energy, Entropy and Exergy Concepts and Their Roles in Thermal Engineering*, *Entropy* 2001, Vol. 3, 116-149.
- [6] Öztop, H.F.; Al-Salem, K. A review on entropy generation in natural and mixed convection heat transfer for energy systems. *Renew. Sustain. Energy Rev.* 2012, Vol.16, pp. 911–920.
- [7] Öztop, H.F, Estellé, P, Yan, W.M, Al-Salem, K, Orfi, J, Mahian, O, A brief review of natural convection in enclosures under localized heating with and without nanofluids, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2015, Vol. 60, 2015, pp. 37-44
- [8] Aydın, O., Yang, W. J. *Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls*. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2000, Vol. 36, pp. 695–710.



Nom et Prénom : Sacia KACHI

Titre : Convection Mixte dans une Cavité à Parois Latérales Mobiles et dont
une Partie de la Paroi Inférieure est Soumise à un Flux de Chaleur Fixé

Thèse en vue de l'Obtention du Diplôme de Doctorat en
3^{ème} Cycle (LMD) en Génie Chimique

Résumé

Dans la présente étude, nous nous intéressons à la simulation numérique de la convection mixte laminaire d'écoulement d'air, dans une cavité carrée. Une source de chaleur à flux constant de longueur relative " l " est placée au centre de la paroi inférieure de cette cavité. Les parois latérales sont maintenues à une température froide constante " T_f " et se déplacent vers le haut avec une vitesse fixe " V_0 ", tandis que, toutes les autres parties de la cavité sont considérées comme adiabatiques. Un modèle mathématique basé sur la formulation fonction de courant-vorticité ($\Psi-\Omega$) est utilisé. Les équations régissant ce phénomène sont discrétisées par la méthode des différences finies en considérant un maillage non uniforme. La géométrie et les conditions aux limites de vitesse et de température sont symétriques par rapport à l'axe vertical passant par le centre de la cavité. Le nombre de Richardson (Ri), qui représente l'importance relative de la convection naturelle et forcée, est choisi comme paramètre de bifurcation.

Les résultats obtenus sont présentés sous forme de champs thermiques et dynamiques, avec l'évolution temporelle des nombres de Nusselt moyens. L'analyse de ces résultats a permis de détecter l'existence de deux changements radicaux sur la structure d'écoulement pour les deux valeurs critiques du nombre de Richardson 15.6 et 41.5 (phénomène de bifurcation), alors que, l'analyse des résultats obtenus met en évidence l'existence de trois structures d'écoulements complètement différentes en fonction de la valeur du nombre de Richardson. Dans une première phase, l'écoulement est constitué de deux cellules parfaitement symétriques. Une bifurcation vers un régime d'écoulement asymétrique caractérisé par l'apparition brusque de deux cellules principales mais dissymétriques est mise en évidence pour la deuxième phase, alors que, la dernière phase est caractérisée par la naissance de quatre cellules symétriques. Le passage de la 2^{ème} phase vers la 3^{ème} phase, provoque une diminution soudaine et importante du nombre de Nusselt moyen.

Mots clés : Convection mixte, méthode des différences finies, nombre de Richardson, phénomène de bifurcation

Directeur de thèse : Saadoun BOUDEBOUS - Université Larbi Ben M'hidi Oum el Bouaghi

Année Universitaire : 2020-2021