



Université de Constantine 3
Faculté de Génie des Procédés
Département de Génie Chimique

ETUDE DE LA CONVECTION MIXTE DANS UN MILIEU POREUX CONFINE
DANS UNE CAVITE CHAUFFEE PAR LE BAS

THESE

Présentée pour l'Obtention du
Diplôme de Doctorat en Sciences en Génie des Procédés
en Génie Chimique

Par
Dalila MENACER

Année Universitaire
2021-2022



Université de Constantine 3
Faculté de Génie des Procédés
Département de Génie Chimique

N° de Série :

N° d'Ordre :

ETUDE DE LA CONVECTION MIXTE DANS UN MILIEU POREUX CONFINE
DANS UNE CAVITE CHAUFFEE PAR LE BAS

THESE

Présentée pour l'Obtention du
Diplôme de Doctorat en Sciences en Génie des Procédés
en Génie Chimique

Par

Dalila MENACER

Devant le Jury Composé de :

Saadoun Boudebous	Directeur de thèse	Professeur	Université Larbi Ben M'hidi
Salim Bousbaa	Président	MCA	Université Constantine 3
Samah ZERMANE	Encadreur Administratif	MCA	Université Constantine 3
Lakhdar BAHI	Examineur	Professeur	Université Constantine 1
Samia BENATTALLAH	Examineur	MCA	Université Constantine 1
Ouacil SAOULI	Examineur	MCA	Ecole National Polytechnique- Université Constantine 3
Hassina BEZAZE	Examineur	MCA	Université Constantine 3

Année Universitaire

2021-2022

REMERCIEMENTS

L'obtention d'un diplôme de doctorat est l'affaire d'une seule personne mais plusieurs personnes contribuent au succès du travail et leur contribution mérite très certainement d'être soulignée.

Je tiens, tout d'abord, à exprimer toute ma sincère gratitude à Monsieur Saâdoun BOUDEBOUS, Professeur à la Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées, à l'Université Larbi Ben M'hidi- Oum El Bouaghi, en tant que directeur de recherche, pour son encadrement, sa grande disponibilité, son solide appui, ses conseils éclairés et ses encouragements lors de toutes les années de thèse.

Je souhaiterai également témoigner de ma cordiale reconnaissance à Madame Samah ZERMANE, Maître de Conférences à la Faculté de Génie des Procédés à l'Université Salah Boubnider- Constantine 3 pour avoir accepté le rôle de co-directeur de thèse.

Mes profonds remerciements s'adressent également aux membres de jury Samia BENATTALAH, Maitre de conférences à l'Université de Constantine1, Hassina BEZAZE, Maitre de conférences à la Faculté de Génie des Procédés à l'Université Salah Boubnider-Constantine 3, Ouassil SAOULI, Maitre de conférences à l'Ecole Nationale Polytechnique de l'Université de Constantine 3, et Mr Lakhdar BAHI, Professeur à l'Université de Constantine 1 qui m'ont fait le plaisir de poser un regard critique sur ces travaux en assurant la charge d'examineur. Leur présence m'a permis de soutenir ma thèse, ainsi que Mr Salim BOUSBAA, Maitre de conférences à la Faculté de Génie des Procédés à l'Université Salah Boubnider- Constantine 3 qui m'a fait l'honneur de présider ce jury.

DEDICACE

Un très grand remerciement à mon seigneur Allah qui m'a donné le courage d'achever ce manuscrit. Dieu Merci.

Je me dois de saluer au passage tous mes collègues du Laboratoire de Physique Energétique de l'Université de Constantine 1. Vous avez rendu mon passage au Laboratoire très agréable et j'ai bien apprécié vous côtoyer à tous les jours. Je remercie donc Chahrazed ZAATER, Hassiba BEKKOUCHE et Amel Labed pour tous les bons moments partagés !

Je n'oublie pas tous mes proches, plus particulièrement ma famille et de manière nominative mes parents pour leur irremplaçables et inconditionnellement soutien.

J'adresse aussi mes vifs et sincères remerciements à mon frère et mes sœurs pour leurs encouragements et leur soutien indéfectible afin de soutenir la fondation de cet édifice qui s'achève aujourd'hui.

A vous tous, je dédie cette thèse.

TABLE DES MATIERES

	Page
LISTE DES FIGURES	iii
LISTE DES TABLEAUX	vi
LISTE DES ABREVIATIONS	vii
RESUME	ix
ABSTRACT	x
ملخص	xi
INTRODUCTION GENERALE.....	1
CHAPITRE I	
GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE	3
1. GENERALITES SUR LES MILIEUX POREUX	3
1.1. Introduction	3
1.1.1. Milieu poreux	3
1.1.2. Caractérisation.....	4
1.1.2.1. Porosité	4
1.1.2.2. Tortuosité	5
1.1.2.3. Perméabilité	5
1.1.3. Concept de volume élémentaire représentatif	6
1.1.4. Changement d'échelle en milieu poreux	7
1.1.5. Modèle d'écoulement en milieu poreux	8
2. Revue bibliographique	9
CHAPITRE II	
MODELE PHYSIQUE ET MATHEMATIQUE	29
2.1. Introduction	29
2.2. Modèle général	29
2.3. Transfert thermique dans un milieu poreux	30
2.4. Géométrie du problème	31
2.5. Hypothèses simplificatrices	31
2.6. Mise en équations	32
2.6.1. L'équation de conservation de la masse	32
2.6.2. L'équation de quantité de mouvement suivant X	33
2.6.3. L'équation de quantité de mouvement suivant Y	33
2.6.4. L'équation d'énergie	33
2.7. Formulation adimensionnelle	33
2.7.1. L'équation adimensionnelle de conservation de la masse	33
2.7.2. L'équation adimensionnelle de quantité de mouvement suivant X	34
2.7.3. L'équation adimensionnelle de quantité de mouvement suivant Y	36
2.7.4. L'équation adimensionnelle d'énergie	37
2.7.5. L'équation de vorticité	38
2.7.6. L'équation de fonction de courant	40
2.8. Conditions initiales et aux frontières	40
CHAPITRE III	
MODELISATION NUMERIQUE	42
3.1. Introduction	42
3.2. Discrétisation des différentes dérivées	42
3.2.1. Discrétisation temporelle	43
3.2.2. Discrétisation des conditions aux limites	43

TABLE DES MATIERES

3.3. Résolution des systèmes d'équations	45
3.4. Composantes des vitesses	46
3.5. Algorithme et organigramme	47
CHAPITRE IV	
RESULTATS ET DISCUSSIONS	49
4.1. Introduction	49
4.2. Maillage	49
4.3. Test d'indépendance du maillage	49
4.4. Validation du code de calcul	50
4.5. Résultats et discussions	54
4. 5.1. Nombre de Nusselt moyen	72
4. 5.2. Effet du nombre de Richardson sur le transfert thermique	73
4. 5.3. Effet du paramètre de la convection mixte sur le comportement de l'écoulement	74
4. 5.4. Effet du nombre de Darcy sur le comportement de l'écoulement	78
4. 5.5. Effet du nombre de Darcy sur le transfert thermique	83
4. 5.6. Lignes de contours pour la gamme $1 \leq Ri \leq 3.85$	85
4. 5.7. Nusselt moyen pour la gamme $1 \leq Ri \leq 3.85$	85
4. 5.8. Contours de distributions de température pour $4 \leq Ri \leq 12.5$	86
4. 5.9. Nusselt moyen pour la gamme $4 \leq Ri \leq 12.5$	87
4. 5.10. Contours de distributions de température pour $12.6 \leq Ri \leq 18.1$	88
.....	
4. 5.11. Taux de transfert de chaleur moyen pour la gamme $12.6 \leq Ri \leq 18.1$	89
4. 5.12. Champs thermiques pour la gamme $18.15 \leq Ri \leq 20$	90
4. 5.13. Taux de transfert de chaleur moyen pour la gamme $18.15 \leq Ri \leq 20$	91
4. 5.14. Champs thermiques pour la gamme $21 \leq Ri \leq 50$	92
4. 5.15. Taux de transfert thermique pour la gamme $21 \leq Ri \leq 50$	95
CONCLUSION ET PERSPECTIVES	101
5.1. Introduction	101
5.2. Objectif du travail	101
5.3. Intérêt de l'étude	101
5.4. Méthodologie utilisée	102
5.5. Principaux résultats	102
5.6. Perspectives et recommandation pour les travaux futurs	103
BIBLIOGRAPHIE	105
LISTE DES ANNEXES	108
Annexe A : Discrétisation du terme convectif $\left(U \frac{\partial \phi}{\partial X}, V \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)$	108
A.1. Schémas Upwind du 3 ^{ème} ordre	108
A.1.1. Différence centrale	108
A.1.2. Différence arrière	111
A.1.3. Différence avant	112
Annexe B : Discrétisation du terme diffusif $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right)$	117
Annexe C : Discrétisation du terme source	123

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
1.1	Croquis des différents arrangements des grains sphériques extraite de (37)	5
1.2	Volume de prise de moyenne extraite de (2)	7
1.3	Structure spatiale observée par Bénard en 1900 extraite de la référence (37)	10
1.4	Modèle physique et coordonnées du système K. Singh et al (12)	11
1.5	Schématisation du problème physique Abu-Hamdeh NH et al (14)	12
1.6	Cavité bidimensionnelle et conditions aux limites M. Saleem et al (15)	13
1.7	Trois hauteurs d'ouverture différentes pour le modèle 2D E. Fontana et al (16)	13
1.8	Schéma du cylindre étudié Mishra. A (17)	14
1.9	Cône étudié et coordonnées du système Mishra. A (18)	15
1.10	Cavité rectangulaire avec source de chaleur électrique M. Obayedullah and M.M.K. Chowdhury (19)	16
1.11	Configuration physique des trois cas B. ouattara (20)	16
1.12	Configuration géométrique du problème étudié Upreti H (21)	17
1.13	Schémas surfacique de la cavité Khouzam A (22)	18
1.14	Schématisation du processus physique Yacine L (23)	18
1.15	Configuration géométrique de l'écoulement Pandey AK et Kumar M (24)	19
1.16	Arrangement de l'écoulement du modèle considéré Upreti H (25)	20
1.17	Configuration schématique de la cavité Ghalambaz M et al (26)	21
1.18	Représentation schématique du canal Fadaei F et al (27)	21
1.19	Domaine physique du l'enceinte inclinée Combarnous M (28)	22
1.20	Géométrie du canal avec des blocs poreux Guerroudj N et Kahalerras H (29)	23
1.21	Couche poreuse de section rectangulaire Joulin A (30)	24
1.22	Cavité cubique chauffée du bord inférieure Hussein IY et Ali LF (33)	25
1.23	Géométrie de l'enceinte en présence d'un écoulement horizontal Delache A (36)	26
1.24	Diagramme schématique du système physique Mejni F (37)	27

LISTE DES FIGURES

1.25	Cavités pour des cas différents	28
	Chattopadhyay A et al (38)	
2.1	Géométrie du problème considéré	31
3.1	Organigramme général de calcul	48
4.1	Schémas du maillage de la cavité.....	50
4.2	(a) Profile de vitesse horizontale et (b) Profile de température au long du plan médian à diverses valeurs de Darcy pour $Ri=10^{-2}$, $Gr=10^4$, et $\phi=0.9$	53
4.3	Comparaison des lignes de courant et des isothermes entre (a) Brinkman-Forchheimer Darcy model de Kumar DS et al(45) et (b) le présent travail pour $Da=0.1$, $Ri=10^{-2}$, $Gr=10^2$, et $\phi=0.9$	54
4.4 (a)	Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=0.5$	56
4.5 (a)	Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=0.5$	57
4.4 (b)	Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=4$	58
4.5 (b)	Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=4$	59
4.4 (c)	Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=4.99$	60
4.5 (c)	Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=4.99$	61
4.4 (d)	Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=5$	62
4.5 (d)	Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=5$	63
4.4 (e)	Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=7.5$	64
4.5 (e)	Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=7.5$	65
4.4 (f)	Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=10$	66
4.5 (f)	Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=10$	67
4.4 (g)	Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=11.76$	68
4.5 (g)	Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=11.76$	69
4.4 (h)	Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=11.77$	70
4.5 (h)	Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=11.77$	71
4.6 (a)	Taux de transfert de chaleur moyen avec le temps pour $Da=10^{-3}$	72
4.6 (b)	Evolution du taux de transfert thermique moyen pour $Da=10^{-2}$	72
4.6 (c)	Nusselt moyen avec le temps dans le cas: $Da=10^{-1}$	73
4.7	Evolution temporelle du Nusselt moyen	74
	pour (a) $0 \leq \tau \leq 20$ et (b) $20 \leq \tau \leq 200$	
4.8 (a)	Evolution de l'écoulement en fonction du temps pour $Ri=11.76$ avec $Da=0.1$	76
4.8 (b)	Evolution temporelle de l'écoulement et des isothermes correspondantes à $Ri=11.77$ avec $Da=0.1$	77
4.9 (a)	Evolution temporelle des contours de l'écoulement et des isothermes correspondantes à $Ri=11.76$ pour $Da=10^{-3}$	79
4.9 (b)	Evolution temporelle des contours de l'écoulement et des isothermes correspondantes à $Ri=11.76$ pour $Da=10^{-2}$	80
4.10 (a)	Evolution temporelle des contours de l'écoulement et des isothermes correspondants à $Ri=11.77$ pour $Da=10^{-3}$	81
4.10 (b)	Evolution temporelle des contours de l'écoulement et des isothermes correspondants à $Ri=11.77$ pour $Da=10^{-3}$	82
4.11	Evolution temporelle du nombre de Nusselt moyen pour $Ri=11.76$ et $Ri=11.77$ avec différents nombres de Darcy	83
4.12	Evolution de Nusselt local le long de la partie chauffée pour $Ri=11.76$ et $Ri=11.77$ avec différents nombres de Darcy	84
4.13	Profile de température à $Y=0.5$ pour $Ri=11.76$ et $Ri=11.77$ avec différents nombres de Darcy	84

LISTE DES FIGURES

4.14	Lignes de contours pour différents nombres de Richardson : (a) $Ri=1$, (b) $Ri=3.5$ et (c) $Ri=3.85$	85
4.15	Taux de transfert moyen en fonction du temps pour (a) $Ri=1$, (b) $Ri=3.5$ et (c) $Ri=3.85$	86
4.16	Contours de température pour (a) $Ri=4$, (b) $Ri=9$ et (c) $Ri=12.5$	87
4.17	Evolution temporelle de Nusselt moyen pour $Ri=4$, $Ri=9$ et $Ri=12.5$	88
4.18	Isothermes pour différents nombres de Richardson: (a) $Ri=12.6$, (b) $Ri=13$, (c) $Ri=17$ et (d) $Ri=18.1$	89
4.19	Taux de transfert thermique moyen pour différents nombres de Richardson	90
4.20	Isothermes correspondantes à différentes valeurs de Richardson avec (a) $Ri=18.15$, (b) $Ri=18.25$, (c) $Ri=19$ et (d) $Ri=20$	91
4.21	Variation temporelle du taux de chaleur moyen dans les cas: (a) $Ri=18.15$, (b) $Ri=18.25$, (c) $Ri=19$ et (d) $Ri=20$	92
4.22	Le passage des différentes formes de structures de l'écoulement selon l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour la valeur de Ri correspondant à 23	93
4.23	Contours de température pour: (a) $Ri=21$, (b) $Ri=23$, (c) $Ri=25$, (d) $Ri=30$, (e) $Ri=40$ et (f) $Ri=50$	94
4.24 (a)	Le taux de transfert thermique moyen pour $Ri=21$	95
4.24 (b)	Variation de Nusselt moyen suivant le temps pour $Ri=23$ et $Ri=25$	96
4.24 (c)	Evolution temporelle du taux de chaleurs pour les cas: $Ri=30$, $Ri=40$ et $Ri=50$	97
4.25	Evolution de l'écoulement et du taux de transfert thermique moyen	99

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
4.1	L'effet du raffinement du maillage sur le nombre de Nusselt moyen pour différents nombres de Darcy	51
4.2	Comparaison des valeurs minimale et maximale des deux vitesses horizontale et verticale respectivement au long du plan médian entre la présente solution et celle d' Iwatsu R(46), Waheed M(47) et Khanafer KM(48) pour $Gr = 100$ et $Re = 100$	51
4.3	Comparaison du nombre de Nusselt moyen entre le présent travail et celui d'Iwatsu R(46), Waheed M(47) et Khanafer KM(48) pour $Gr = 100$	52
4.4	Le nombre de Nusselt moyen au niveau de la partie chauffée entre la présente étude et celui obtenu par Kumar DS et al(45).....	52
4.5	Les différents types d'écoulement selon les différents intervalles du nombre de Richardson	100

LISTE DES ABREVIATIONS

C_f	: Coefficient du terme de FORCHHEIMER
c_p	: Chaleur spécifique du fluide à pression constante [J/kg.K]
Da	: Nombre de Darcy
g	: Accélération de la pesanteur [m.s ⁻²]
Gr	: Nombre de Grashof
k	: Perméabilité du milieu poreux [m/s]
k	: Conductivité thermique [W.m ⁻¹ .K ⁻¹]
l	: Longueur dimensionnelle de la source de chaleur [m]
L	: Côté dimensionnelle de la cavité [m]
Nu	: Nombre de Nusselt
P	: Pression adimensionnelle
P^*	: Pression [Pa]
Pr	: Nombre de Prandtl
Re	: Nombre de Reynolds
Ri	: Nombre de Richardson
t	: Temps dimensionnel[s]
T	: Température dimensionnelle [K]
u, v	: Composantes des vitesses [m.s ⁻¹]
U, V	: Composantes adimensionnelles des vitesses
V_0	: Vitesse des parois latérales [m.s ⁻¹]
x, y	: Coordonnées d'espace dimensionnelles [m]
X, Y	: Coordonnées d'espace adimensionnelles

Symboles Grecs

α_f	: Coefficient de diffusion thermique [m ² .s ⁻¹]
β_T	: Coefficient d'expansion thermique [K ⁻¹]
ε	: Longueur adimensionnelle de la partie chauffée
λ	: Rapport des conductivités thermiques
μ	: Viscosité dynamique [Pa.s]
ν	: Viscosité cinématique [m ² .s ⁻¹]
ρ_f	: Masse volumique [Kg.m ⁻³]
θ	: Température adimensionnelle
τ	: Temps adimensionnel
Ψ	: Fonction de courant
ψ	: Fonction de courant adimensionnelle
Ω	: Vorticité
ω	: Vorticité adimensionnelle
φ	: Porosité du milieu poreux

LISTE DES ABREVIATIONS

Indices

- : Valeur moyenne.
- c : Fait référence au froid.
- f : Fait référence au fluide.
- h : Fait référence au chaud.
- i, j : $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ composantes.
- m : Fait référence au mélange.
- s : Fait référence au solide.

Abréviation

- CNTs : *Carbon nanotubes*.
- MWCNT: *Multi-Walled carbon nanotubes*.
- N.L.O.R : *Non Linear Over Relaxation*.
- SWCNT: *Single-Walled carbon nanotubes*.

RESUME

Une étude détaillée du phénomène d'instabilité de l'écoulement de convection mixte dans un milieu poreux confiné au sein d'une cavité carrée chauffée partiellement par le bas en utilisant le modèle de Darcy étendu de Brinkman -Forchheimer. Les parois latérales froides se déplacent avec une vitesse constante vers le haut, tandis que les autres parties sont considérées comme adiabatiques. Le milieu considéré est modélisé à l'aide des équations de Navier-Stokes et l'approximation de Boussinesq. Le problème est ainsi régi par les équations gouvernantes qui sont écrites en formulation « fonction de courant Ψ -vorticité ω » et discrétisées à l'aide d'une méthode aux différences finies. L'influence de certains paramètres, tels que, le nombre de Darcy et de Richardson sur la déstabilisation de l'écoulement ont été étudié. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de champs dynamique et thermique, avec l'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen. Ceux-ci ont détecté l'existence d'un changement radical dans les modèles des contours et que le fluide est entièrement convecté pour des nombres de Darcy plus élevés.

Mots-clés : Déstabilisation de l'écoulement, convection mixte, technique des différences finies, loi de Darcy- Brinkman Forchheimer.

ABSTRACT

A detailed study of the instability phenomenon of mixed convection flow in a porous medium confined within a square cavity partially heated from below employing Brinkman- Forchheimer extended Darcy model. The cold sidewalls move upwards with constant velocity, while the other parts are considered adiabatic. The medium considered is modeled using the Navier- Stokes equations and the Boussinesq approximation. The governing equations are written in formulation «stream function Ψ - vorticity ω » and discretized by the finite difference technique. The influence of certain parameters, such as, Darcy and Richardson's number on flow destabilization was studied. The obtained results are presented in the form of dynamic and thermal fields, with the temporal evolution of the average Nusselt number. These results detected the existence of a radical change in the contour patterns and that the fluid is fully convected for higher Darcy numbers.

Keywords: Destabilization of flow, mixed convection, finite difference technique, Darcy-Brinkman Forchheimer low.

ملخص

دراسة مفصلة لظاهرة عدم استقرار الحمل الحراري المختلط في وسط مسامي محصور داخل تجويف مربع مسخن جزئياً من الأسفل باستعمال نموذج دارسي الموسع لبرينكمان- فورشهايمر، تتحرك الجدران الجانبية الباردة بسرعة ثابتة لأعلى، بينما تعتبر باقي أجزاء التجويف عوازل حرارية.

تم تصميم الوسط المأخوذ بعين الاعتبار باستخدام معادلات نافبي ستوكس و بتقريب بوسيناسك. المعادلات الحاكمة للمشكلة المدروسة كتبت بالصياغة « دالة التيار ψ – الدوامة ω ». هاته المعادلات تم تقديرها باستخدام طريقة الفروق المنتهية.

تمت دراسة تأثير عوامل معينة ، مثل أعداد دارسي و ريتشاردسون على عدم استقرار التدفق. حيث عرضت النتائج المتحصل عليها في شكل حقول ديناميكية و حرارية بالإضافة الى عدد نيسالت. أبرزت هاته النتائج وجود تغيير جذري في أنماط التدفق و أثبتت أيضاً أن السائل محمل بالكامل من أجل قيم أعلى للعدد دارسي.

الكلمات المفتاحية: الانتقال اللحظي- الحمل الحراري المزدوج- تقنية الفروق المنتهية- قانون دارسي- برينكمان- فورشهايمر.

INTRODUCTION GENERALE

L'écoulement convectif dans les milieux poreux a toujours suscité l'attention des recherches pour son intérêt fondamental aussi bien que sa présence dans de nombreux secteurs industriels. On peut citer comme exemple la fabrication du papier et des matériaux textiles, l'extraction du pétrole, la croissance des cristaux destinés à l'industrie des semi-conducteurs, les collecteurs d'énergie solaire, le vitrage double pour les maisons, le refroidissement des instruments électroniques, l'isolation des bâtiments, le stockage des gaz liquides, la dispersion des polluants et des rejets thermiques dans les citernes, le comportement de certaines parties d'un réacteur nucléaire, les procédés de séchage, la disposition souterraine des déchets nucléaires, isolation thermique, échangeurs de chaleur ...etc. De même les applications géophysiques sont très nombreuses et couvrent un large domaine depuis les écoulements souterrains jusqu'aux courants océaniques en passant par la convection au sein du magma terrestre. Récemment de nombreux travaux se sont intéressés particulièrement à analyser la stabilité des écoulements convectifs complétée par des expériences permettant de vérifier les résultats des modèles théoriques. Dans leur grande majorité, ces travaux ont été consacrés à l'étude de cette stabilité dans différentes configurations géométriques soumises à un écart de températures ou bien chauffées par le bas. Toutefois les cavités avec des parois mobiles n'ont reçu que peu d'attention jusqu'à maintenant d'où l'objectif de notre étude.

Le but de cette recherche est d'analyser les effets causés par l'interaction entre les forces de flottabilité due à la partie chauffée et les forces visqueuses sous l'action du déplacement des parois verticales sur la stabilité du comportement de l'écoulement dans un milieu poreux confiné dans la cavité considérée.

Cette présente étude comporte quatre chapitres. Dans le premier chapitre, nous introduisons un rappel des généralités sur le milieu poreux et les différents modèles possibles d'écoulement en ce milieu, en particulier ceux de Darcy, de Brinkman et de Forchheimer, avec une synthèse bibliographique des contributions scientifiques se rapportant à la convection en milieu poreux.

Dans le second chapitre nous présentons le problème physique, nous motivons notre choix de la loi phénoménologique de DARCY-FORCHHEIMER-BRINKMAN en tant que loi de

INTRODUCTION GENERALE

la conservation de quantité de mouvement, et nous citons les hypothèses simplificatrices. Nous y établissons les équations bilans régissant la convection mixte dans un milieu poreux, ainsi que les conditions aux limites qui leur seront associées.

Nous traitons dans le troisième chapitre une modélisation numérique qui repose sur la méthode des différences finies pour la résolution du système d'équations qui régissent le cas d'une cavité carrée poreuse chauffée partiellement par le bas, et saturée par un fluide Newtonien, avec un code de calcul développé en langage fortran.

Notre validation du code numérique avec les études antérieures et les résultats de calcul ainsi que leur discussions et interprétations sont exposées dans le quatrième chapitre.

Enfin, les travaux menés, ainsi que les résultats obtenus le long de cette étude sont synthétisés sous forme de conclusion générale avec l'énoncé de certaines perspectives futures pour la poursuite de ce travail de recherche feront l'objet du cinquième chapitre.

L'annexe est consacrée à la discrétisation détaillée des différents termes des équations différentielles régissant le phénomène.

GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

1. GENERALITES SUR LES MILIEUX POREUX

1.1. Introduction

L'étude de stabilité des écoulements de convection dans un substrat poreux est d'une grande importance sur le plan théorique ou d'un point de vue pratique comme les systèmes électroniques ou électrochimiques, par exemple. Ce chapitre consiste à présenter quelques notions de base sur les milieux poreux et leur caractérisation bien détaillée ainsi que les divers types associés aux différents écoulements qu'on peut rencontrer dans les travaux ont été déjà réalisés sur ces milieux. Ensuite, nous rappelons ici quelques recherches, tant numériques ou théoriques qu'expérimentales qui portent principalement sur le phénomène de bifurcation du régime de l'écoulement en convection dans des enceintes poreuses. Enfin nous montrons la particularité et l'objectif de cette recherche qui sera donc menée dans l'optique d'analyser les effets de la convection mixte laminaire sur la stabilité du comportement de l'écoulement au sein de la géométrie considérée.

1.1.1. Milieu poreux

Un massif poreux peut se trouver sous forme continu ou cohésif. Il contient à l'intérieur une fraction de volume qui rend l'accès possible à un liquide ou gaz de s'écouler. Cette partie non solide, constitue ce qu'on l'appelle les pores. La porosité est alors une caractéristique qu'on peut la définir comme une propriété très intéressante pour la description du milieu. Deux milieux poreux présentant la même porosité ça ne veut pas dire qu'ils vont évidemment avoir des propriétés similaires. Les pores aveugles sont ceux qui ne permettent pas au fluide de les traverser et seulement les espaces vides qui sont actives. La complexité que constitue une structure poreuse à l'échelle réel, est que ses différentes grandeurs ne constituent que des valeurs globales moyennes, rendent notablement la compréhension de l'écoulement à travers les pores plus complexe. Lorsque les pores ouverts sont remplis par la même phase du fluide, le milieu est dit saturé. (1)

La fraction de volume solide d'un milieu poreux peut être:

- ✚ **non consolidée** dans le cas où la matrice solide est composée de fibres ou de grains non soudés entre eux comme par exemple les billes de verre qui sont les plus utilisables en laboratoire pour étudier les phénomènes de transfert en milieu poreux, billes d'acier, graviers, sable...etc.
- ✚ **consolidée** si la phase solide ne peut plus se fractionner en grains ou fibres notamment dans les argiles, poudres frittées, roches du calcaires, tissus végétaux et animaux, grès, bois, céramiques, ...etc.

1.1.2. Caractérisation

Seule la géométrie de la matrice solide qui est capable de traduire la nature des phénomènes qui se déroulent en milieu poreux. Celle-ci est donc caractérisée par un certain nombre de paramètres.(2)

1.1.2.1. Porosité

La porosité mesure le rapport du volume des espaces vides au volume total du milieu poreux.

$$\varphi = \frac{\text{volume des pores accessible}}{\text{volume de l'échantillon}} \quad (1.1)$$

Elle dépend de la taille des grains, ainsi que l'arrangement des différentes géométries cubiques (figure 1.1).

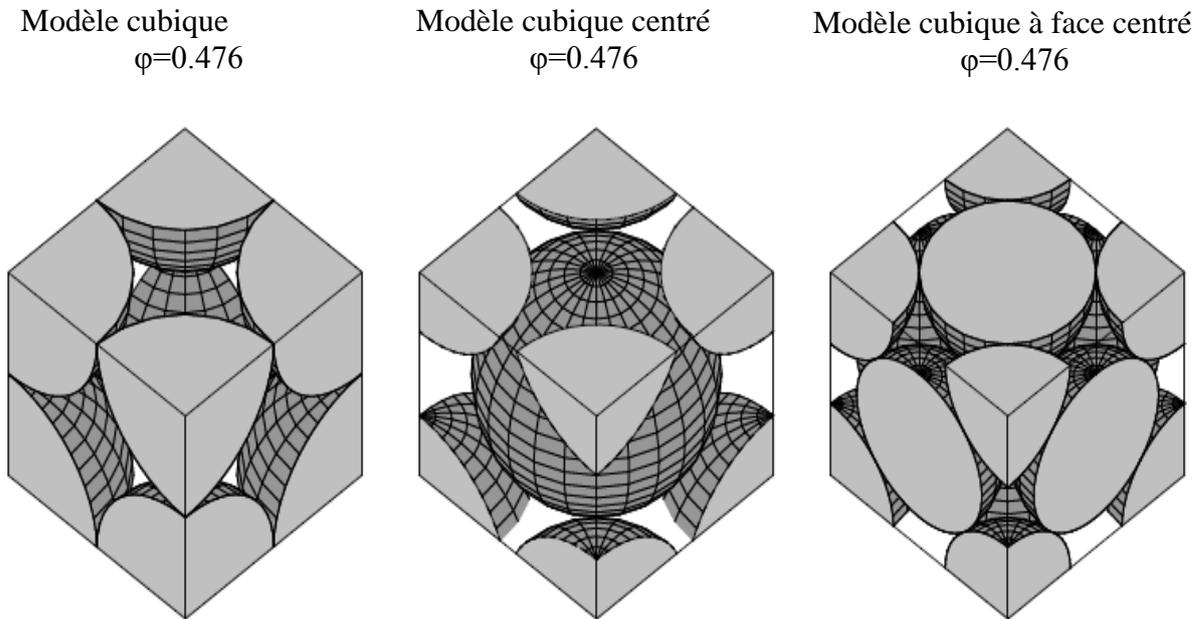


Figure 1.1: Croquis des différents arrangements des grains sphériques extraite de (37)

1.1.2.2. Tortuosité

L'écoulement du fluide à travers les vides peut rencontrer des bras morts durant son chemin continu vers l'espace des pores, il faut donc tenir compte aux espaces occlus qui possèdent un problème de connectivité dans le milieu poreux. Pour décrire la complexité de ces différents aspects, on doit faire intervenir une grandeur τ , appelé tortuosité qui est généralement définie par une équation de la forme: (2)

$$\tau = \frac{L_e}{L} \tag{1.2}$$

Elle se traduit par le rapport de la longueur moyenne effective L_e des tourbillons du fluide traversant l'échantillon à la longueur L de ce dernier.

1.1.2.3. Perméabilité

En général, les vides ne sont pas uniformes dans leur distribution et leur forme à travers la matrice poreuse. Cette uniformité peut avoir un rôle significatif sur l'écoulement et le taux de transfert thermique près des frontières (paroi solide ou surface libre). La perméabilité k

CHAPITRE I GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

est définie comme étant l'aptitude de circulation qu'offre un milieu poreux à un fluide lors de son écoulement à travers les pores. Elle est donc une propriété intrinsèque du milieu poreux, indépendamment des caractéristiques du fluide et dépend essentiellement de la porosité et du diamètre des particules (3).

L'unité souvent utilisée pour la mesure de la perméabilité, c'est le Darcy

On peut définir le nombre de Darcy par la perméabilité d'un milieu poreux d'un centimètre carré de surface et de longueur d'un seul centimètre, soumis à une différence d'un bar de pression traversé par une vitesse de l'écoulement du fluide dont la valeur est de 1 cm/s.

$$1 \text{ Darcy} = 9.87 \cdot 10^{-13} \text{ m}^2 \text{ (1)}$$

1.1.3. Concept de volume élémentaire représentatif.

Lorsque les propriétés de structure, précédemment définies pour l'échantillon de milieu poreux tout entier, doivent être généralisées localement, c'est-à-dire pour chaque point de celui-ci, la définition préalable d'un volume local de mesure s'impose. Sans nous attarder sur les difficultés qui existent dans le choix de la forme et des dimensions de ce volume, nous rappelons simplement qu'il doit être suffisamment grand pour être représentatif, c'est-à-dire pour permettre la caractérisation de toute propriété, mais suffisamment petit pour que la grandeur ainsi définie conserve un caractère local. Ce volume appelé **volume élémentaire représentatif**, est noté **VER**. Il est tel que si d représente l'échelle de la grandeur microstructure et L l'échelle de longueur du milieu poreux, sa propre échelle r_0 doit satisfaire les contraintes suivantes: $d \ll r_0 \ll L$ (voir figure 1.2)

Lorsque les propriétés locales, définies sur le VER, sont indépendantes de la position de celui-ci au sein de l'échantillon poreux, le milieu est dit homogène à une échelle qualifiée de macroscopique. (2)

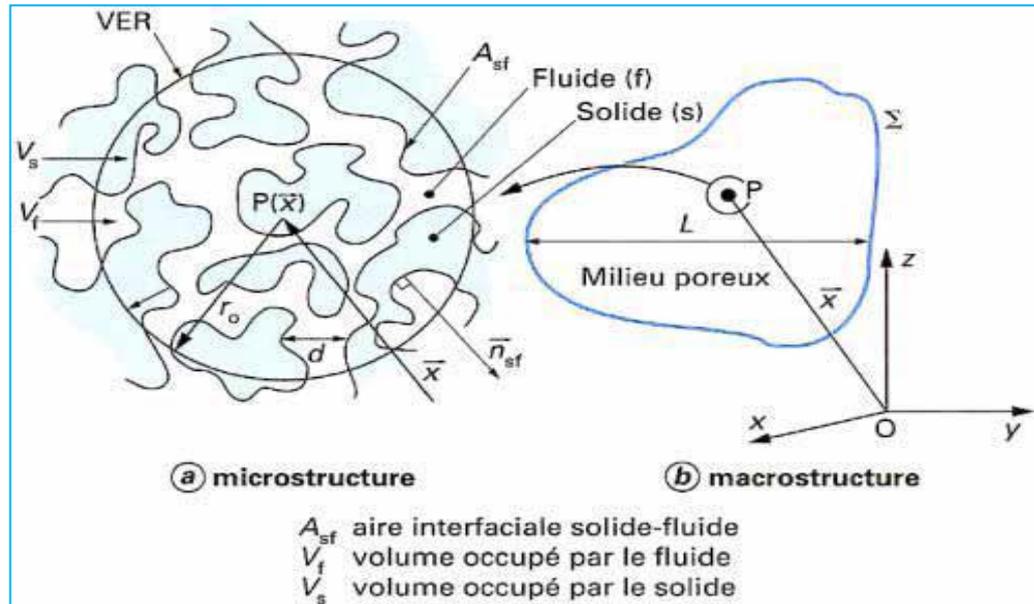


Figure 1.2: Volume de prise de moyenne extraite de (2)

1.1.4. Changement d'échelle en milieu poreux.

Selon la répartition compliquée de la structure des pores, les outils de calcul doivent donc s'adapter à cette particularité du milieu car les lois de conservation que ce soit de quantité de mouvement, de masse ou de la chaleur utilisées pour la description des milieux continus ne peuvent être valables qu'après un changement d'échelle. Autrement dit, contrairement à l'échelle du milieu continu qui est connu microscopique, donc celle du milieu poreux est dite macroscopique. Pour la transition de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique en se basant sur les lois de la thermodynamique des milieux continus en appliquant des procédures d'homogénéisation ainsi que les moyennes volumiques. Parmi ces dernières, la plus employée consiste à la prise de moyenne volumique des équations microscopiques sur le VER. Une fois établi, le système d'équations macroscopiques ne nécessite, pour sa résolution, que la connaissance des conditions aux limites sur les frontières du milieu poreux. Et, en effet, la complexité géométrique de la matrice et de l'espace se trouve incluse dans les coefficients des équations macroscopiques traduisant, au sein du VER et les interactions entre phases. Pour

fermer le système, ces coefficients doivent être préalablement déterminés par voie expérimentale, numérique ou théorique. (2)

1.1.5. Modèles d'écoulement en milieu poreux

Plusieurs lois phénoménales sont utilisées afin de constituer des approximations aux écoulements en milieu poreux:

➤ Loi de DARCY

Etablie par DARCY (1856). C'est une relation qui décrit l'écoulement dans un milieu poreux en moyennant la vitesse de filtration

$$\vec{V} = \frac{k}{\mu} (-\nabla P + \rho_f \vec{g}) \quad (1.3)$$

k: perméabilité du milieu poreux

Le nombre de REYNOLDS caractérisant la transition d'un régime laminaire à un régime turbulent est défini comme ceci:

$$Re = V \frac{d}{\nu} \quad (1.4)$$

d représente la dimension caractéristique des pores. En termes de sa détermination, KOLLINS (1961) a proposé l'expression: $d = \sqrt{k / \varepsilon}$, alors que WARD (1964) a plutôt suggéré que $d = \sqrt{k}$ quelle que soit la porosité. (1)

➤ Formulation de BRINKMAN

BRINKMAN (1947) a ajouté à l'équation de DARCY un terme visqueux

$$\nabla P = \rho_f \vec{g} - \frac{\mu}{k} \vec{V} + \tilde{\mu} \nabla^2 \vec{V} \quad (1.5)$$

Cette modification empirique a assimilé la viscosité effective $\tilde{\mu}$ du milieu poreux à celle du fluide μ . BEAR and BACHMAT (1990, p177) ont prouvé que $\tilde{\mu} / \mu = 1 / \varphi \tau$

CHAPITRE I GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Où τ signifie la tortuosité du milieu poreux isotrope, alors que LUNDGRUN (1972) a trouvé que l'équation de BRINKMAN est valable seulement pour $\tau > 1$, OCHOA-TAPIA and WHITAKER (1995a) ont donné $\tilde{\mu}/\mu = 1/\varphi$ est supérieure à l'unité.

La difficulté de l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité effective. En effet cette grandeur est fonction non seulement de la porosité du milieu poreux mais aussi de sa géométrie (tortuosité). Nous avons conclu que l'équation de BRINKMAN est généralement nécessaire à être employé pour les effets de la variation de porosité au niveau des parois. (3)

➤ Formulation de FORCHHEIMER

La loi de DARCY est valable pour des faibles valeurs du nombre de Reynolds, son domaine de validité est associé à des valeurs de ce nombre inférieures à 10 (2), ce qui implique seulement l'écoulement laminaire dans les pores, FORCHHEIMER (1901) a apporté une approximation à la loi de DARCY

$$\nabla P = \rho_f g - \frac{\mu}{k} V - C_f K^{-1/2} |V|V \quad (1.6)$$

Où C_f est un paramètre caractéristique de la géométrie du milieu poreux appelé coefficient de FORCHHEIMER. Cette approximation a été prouvée expérimentalement à travers les travaux de BATTACHARYA et al (2002) (4), et quand-t-il y' avait une chute de pression dans les pores avec une valeur de Reynolds correspond à 10^4 elle est en accord avec les travaux de MOLERUS et SCHWEINZER (1989) (5). Elle est la plus couramment employée afin de décrire l'activité du fluide incompressible en milieu isotrope et homogène.

2. REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Ce contexte de recherche a été initié lors des observations expérimentales de Bénard en 1900 tandis que la théorie du problème a eu son départ par Lord Rayleigh en 1916. Le phénomène de la convection de Rayleigh-Bénard est illustré par la figure 1.3, qui se compte comme un modèle type parmi les systèmes hors équilibre.

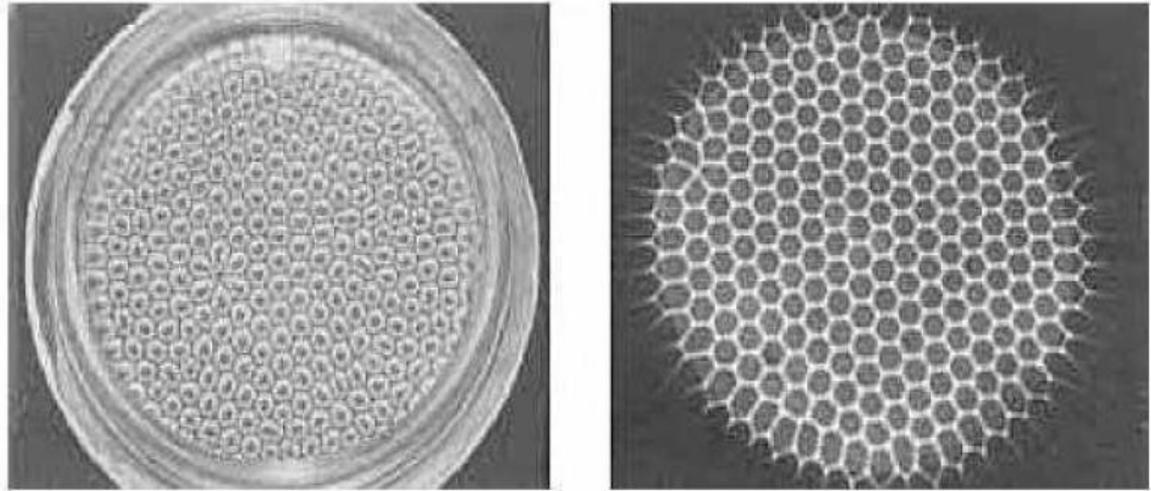


Figure 1.3: Structure spatiale observée par Bénard en 1900 extraite de la référence (37)

Depuis lors, l'évolution de l'écoulement du fluide à travers un massif poreux a bénéficié d'un grand gain tant pour la convection naturelle au sein d'un milieu continu que dans un milieu poreux (6) et la première étude sur le problème de Rayleigh-Bénard avec écoulement est attribuée à Idrac, 1920. Plus tard, Jeffreys, 1926, Jeffreys, 1928 et Low, 1929. A cette époque, la motivation principale de toutes les études était la compréhension de certains phénomènes météorologiques tels que les bandes nuageuses et leur alignement sous l'action du vent. Après cette période, les recherches sur la stabilité des écoulements ont débuté vers la fin des années cinquante (7).

Les travaux de Horton and Rogers (8) et Lapwood (9) ont été les premières études sur ce sujet. En se basant sur la méthode de stabilité linéaire, Ces auteurs ont analysé la stabilité d'un milieu poreux saturé de fluide et chauffé par le bas, ils ont prédit le nombre de Rayleigh critique marquant le seuil de la convection (10)

Actuellement plusieurs auteurs sont en train de contribuer à l'établissement de la convection naturelle en absence du milieu poreux. Citons par exemple, l'investigation de Mliki et Abbassi (11) qui porte essentiellement sur la maîtrise des paramètres de contrôle tels que le nombre de Rayleigh, du rapport d'aspect et la concentration volumique des nanoparticules sur le taux de transfert thermique et sur la structure de l'écoulement d'un nanofluide cuivre/eau remplie une *cavité* de forme L dont les deux plaques perpendiculaires au bas sont maintenues à des températures chaudes et les deux autres sont froides. Ce système est résolu numériquement par la méthode de Lattice Boltzmann. Les

tests ont conduit à une amélioration du transfert de chaleur par le nanofluid en réduisant le rapport d'aspect. En outre, il a été constaté que le nombre de Nusselt moyen a augmenté avec l'augmentation du nombre de Rayleigh. En utilisant la méthode de transformation différentielle (DTM), l'effet combiné de la réaction chimique du glissement du fluide micro-polaire à travers un coin perméable avec des courants de glissement Hall et ionique a été étudié par K. Singh et al (12). Les coordonnées du système sont schématisées sur la figure 1.4. Il ressort clairement des résultats obtenus que le paramètre de réaction chimique, le taux de transfert de masse et le paramètre de glissement augmentent lors de l'augmentation du nombre de Schmidt.

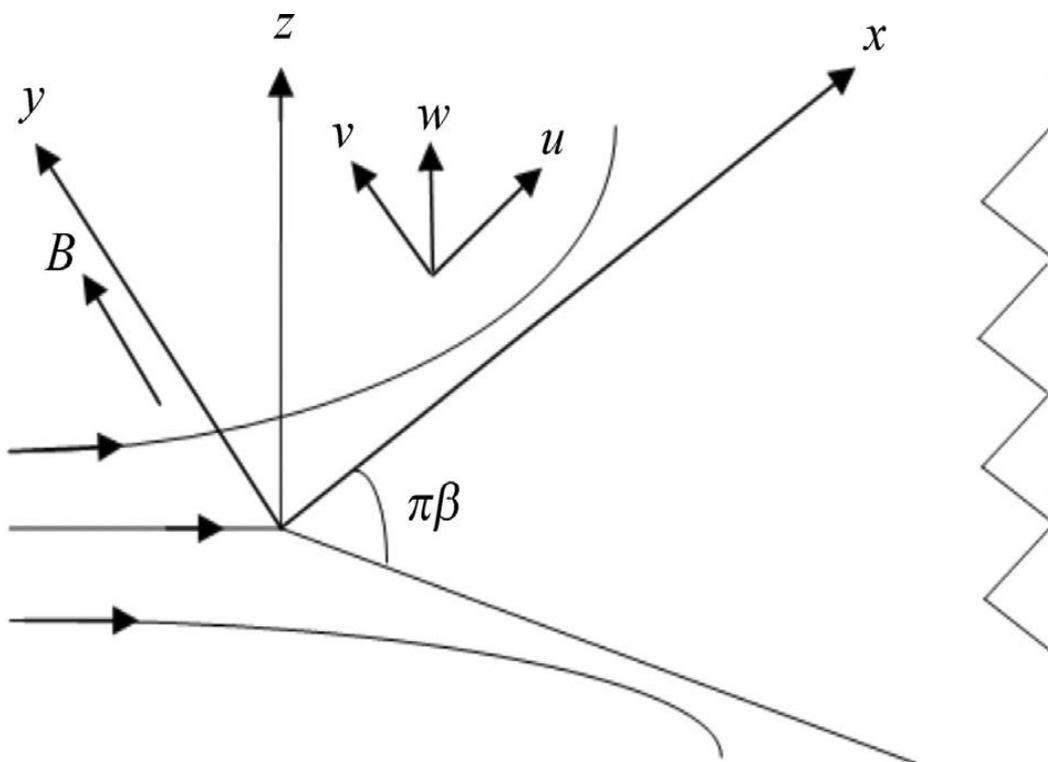


Figure 1.4: Modèle physique et coordonnées du système
K. Singh et al (12)

Une étude numérique basée sur l'approche des différences finis située dans l'étude de C. Cianfrini et al (13) où l'eau est confiné à l'intérieur d'une enceinte bidimensionnelle avec une température froide localisée sur la partie inférieure, alors que le chauffage de la surface opposée est simulée par une température comprise entre 10°C et 30°C. Ils ont mis en évidence un schéma instable à 4°C. Afin d'étudier la façon dont le profil d'écoulement et le taux de transfert de chaleur pour un fluide micropolaire sont affectés par la variation du nombre de Rayleigh, nombre de Prandtl, la longueur de la cavité et la viscosité des

CHAPITRE I GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

vitesses. Cependant, les équations non linéaires associées ont été résolues par la technique des volumes finis pour explorer les effets de différents paramètres sur la convection mixte dans un milieu poreux rempli une cavité partiellement chauffée avec un côté ouvert dans la figure 1.5 de l'étude numérique de Abu-Hamdeh NH et al (14). Ils ont conclu que le champ d'écoulement à l'intérieur de l'enceinte est vraiment complexe en raison du côté d'ouverture et de la paroi mobile de la cavité en même temps. Le taux de transfert de chaleur devient plus fort pour les valeurs plus élevées du nombre de Grashof et l'augmentation de la longueur de la partie chauffée.

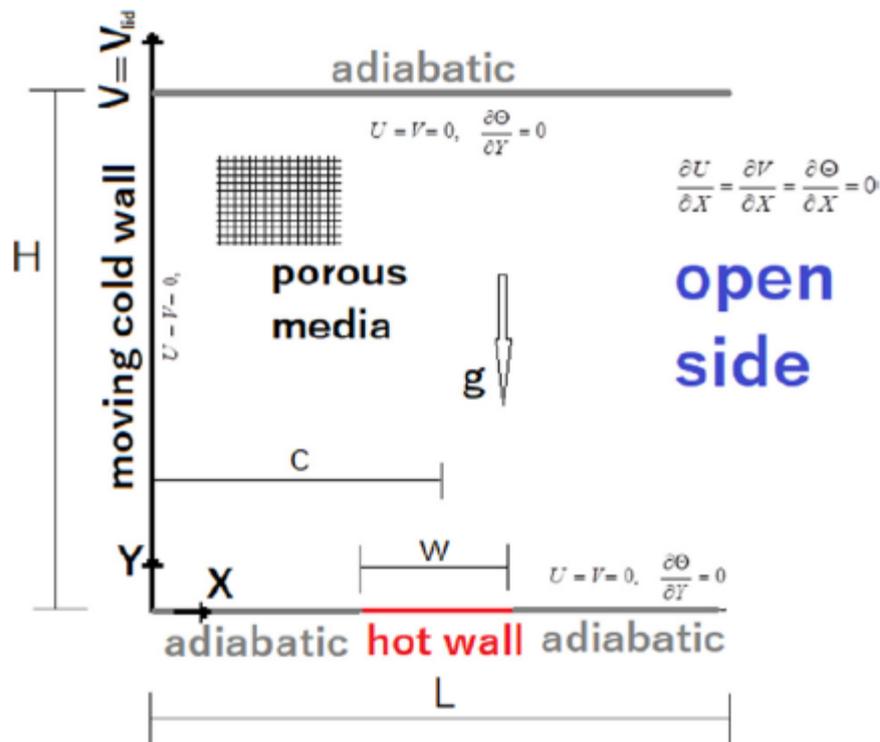


Figure 1.5: Schématisation du problème physique
Abu-Hamdeh NH et al (14)

M. Saleem et al (15) se sont intéressés à une simulation numérique dans une configuration géométrique rectangulaire. A l'exception de la surface solide inférieure, qui a eu une température relativement plus élevée, les trois autres parties sont maintenues à une température plus basse (figure 1.6). Le problème imposé est résolu à l'aide de la méthode ADI (Alternate Direct Implicit method). Ils ont mentionné que le taux de transfert de chaleur en cas du fluide micropolaire est inférieur à celui du fluide newtonien sous les mêmes conditions.

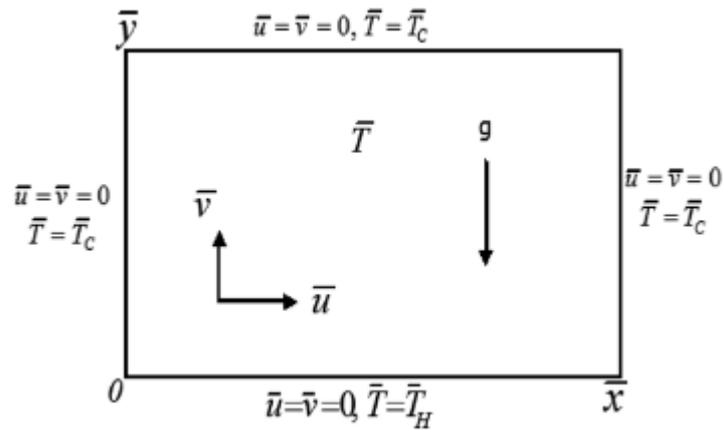


Figure 1.6: Cavité bidimensionnelle et conditions aux limites

M. Saleem et al (15)

Dans le but de décrire le mouvement d'air confiné à l'intérieure d'une enceinte 2D partiellement ouverte du côté droit, E. Fontana et al (16) ont considéré une source volumique de chaleur localisée au milieu de sa paroi inférieure. Le côté gauche est chaud et les parties restantes sont considérées adiabatiques (figure 1.7). La procédure numérique de ce problème est basée sur l'approche algébrique multigrad. Il a été observé également la naissance des circulations secondaires pour des fluides avec des petites valeurs du nombre de Rayleigh externe Ra_e tandis que ces dispositifs sont absents à plus grandes valeurs de ce même nombre. Les résultats révèlent une influence significative de l'ouverture sur le transfert thermique dans la cavité.

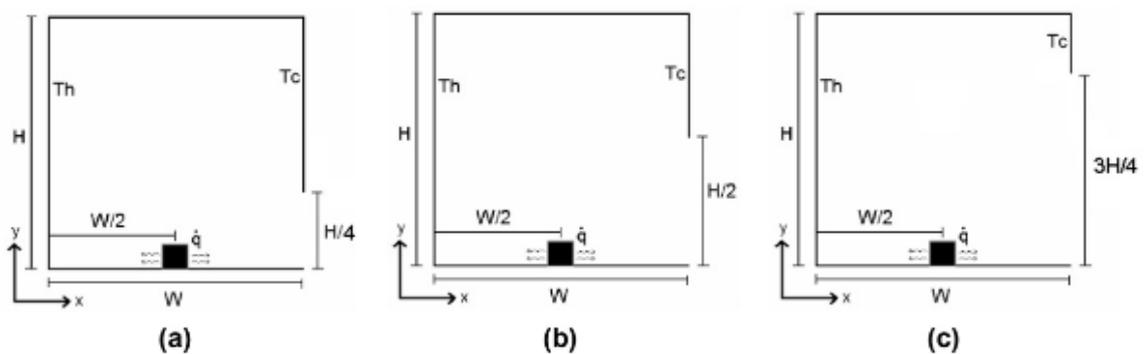


Figure 1.7: Trois hauteurs d'ouverture différentes pour le modèle 2D

E. Fontana et al (16)

La recherche de la référence (17) a été basé sur l'effet de la dissipation visqueuse et ohmique, la génération de chaleur/absorption et glisser sur le flux MHD de nano-fluide sur un cylindre d'étirage et un cône perméable respectivement avec aspiration/injection. Les

équations gouvernantes ont été résolues numériquement en appliquant la procédure Runge-Kutta-Fehlberg avec tir. Les résultats révèlent qu'une amélioration du paramètre de glissement de vitesse montre une double nature dans la région d'injection, pendant qu'il se déprécie dans la région d'aspiration (Figure 1.8).

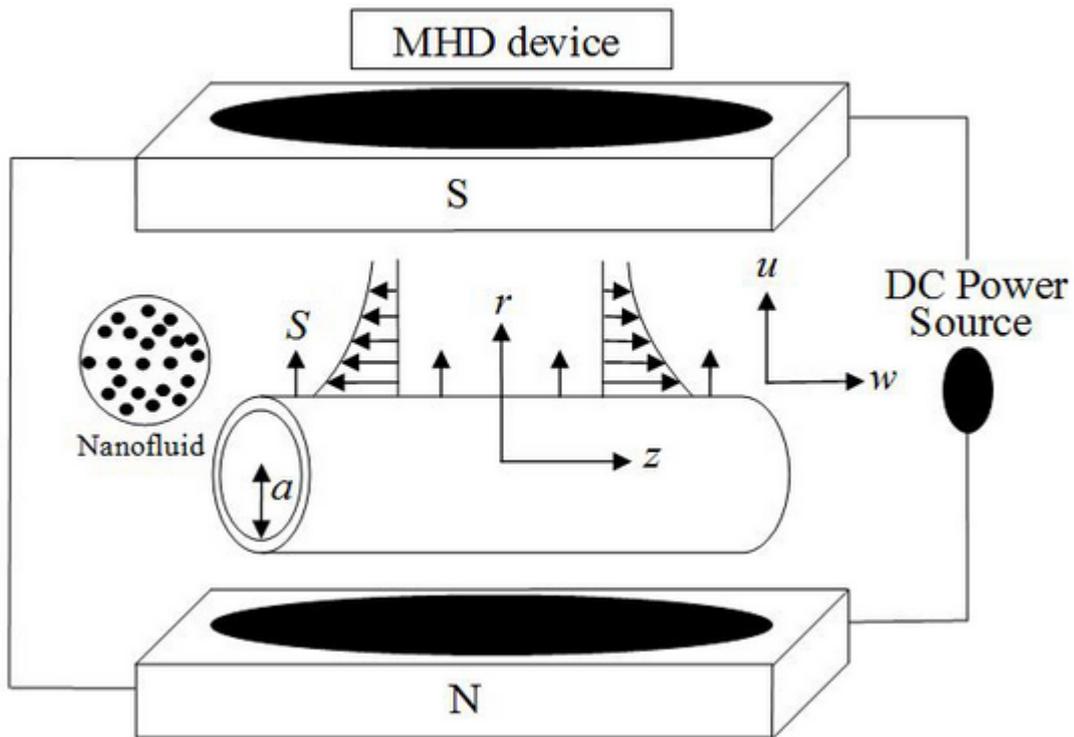


Figure 1.8: Schéma du cylindre étudié

Mishra. A(17)

De plus le même travail sur un cône perméable (18) comme il est présenté sur la figure 1.9 a également montré que des nombres de Sherwood et de Nusselt diminuent avec l'augmentation des paramètres de champ magnétique et de glissement de vitesse, alors qu'ils confirment une tendance inverse lorsque le paramètre de flux massique passe de la région d'injection à la région d'aspiration.

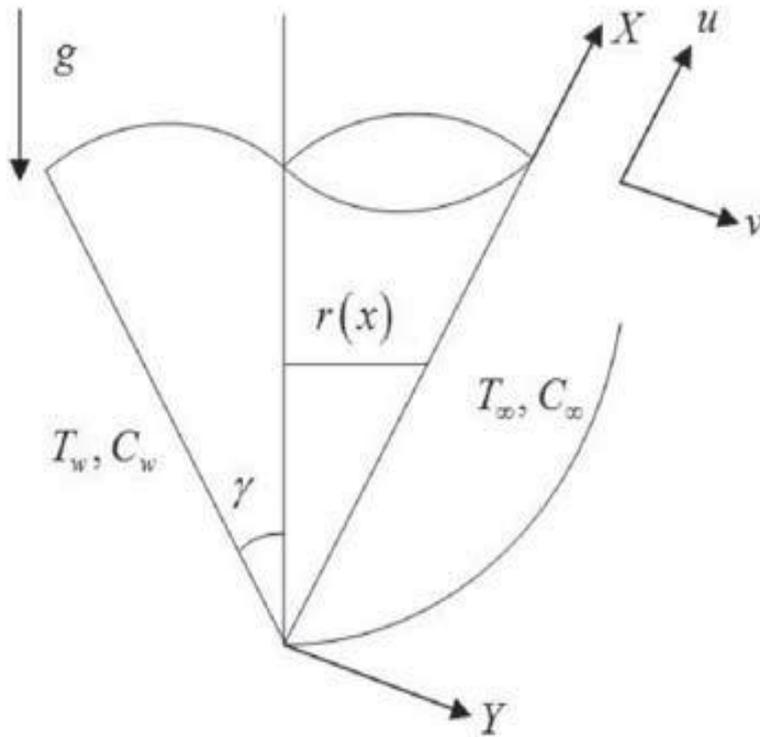


Figure 1.9: Cône étudié et coordonnées du système

Mishra. A(18)

L'idée de M. Obayedullah and M.M.K. Chowdhury (19) repose sur la maîtrise des paramètres de contrôle tels que les nombres de Rayleigh interne Ra_i , externe Ra_e et le nombre d'Hartmann Ha , sur la structure de l'écoulement et le transfert thermique au sein du système dont la configuration géométrique était une enceinte rectangulaire contenant une source de chaleur interne électrique. La surface du fond est chauffée d'une manière non-uniforme tandis que la paroi supérieure est bien isolée. Les deux parois gauche et droite sont maintenues à des températures chaude et froide respectivement. La méthode des éléments finis est assurée afin de résoudre les équations du phénomène. La condition nécessaire pour qu'une cellule secondaire sera mis au coin supérieur gauche de la cavité est que $Ra_i = 10^4$ et c'est avéré que grâce à l'augmentation de ce dernier, la température du fluide a dépassé celle de surface. Ils ont déduit aussi que les intensités de la diminution du débit en raison de l'augmentation du champ magnétique (figure 1.10).

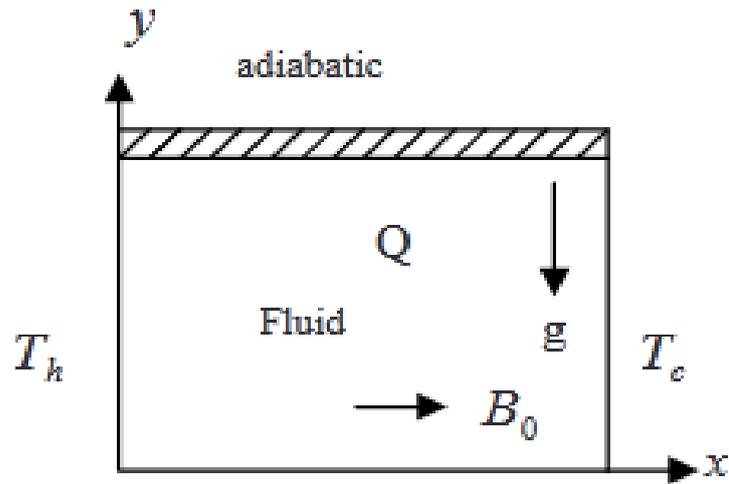


Figure 1.10: Cavité rectangulaire avec source de chaleur électrique
M. Obayedullah and M.M.K. Chowdhury (19)

En ce qui concerne la convection naturelle de Rayleigh-Bénard en milieu poreux, l'influence de la conductivité thermique sur la séparation thermogravitationnelle des constituants d'un mélange binaire saturant une cellule horizontale poreuse a été traitée par B. Ouattara (20) (Figure 1.11). Cette contribution lui a permis de déduire que la stabilité de l'écoulement est brisée via une bifurcation stationnaire ou une bifurcation de Hopf.

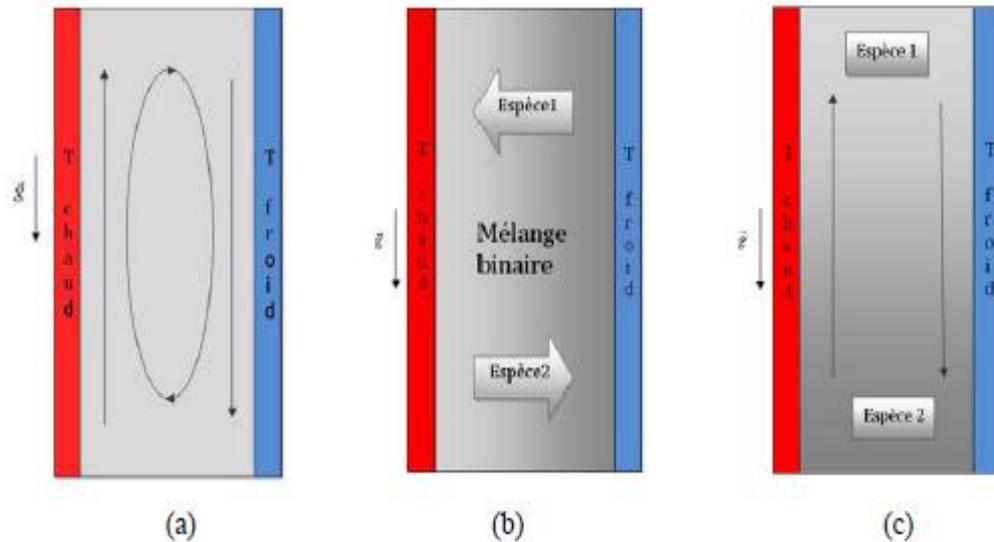


Figure 1.11: Configuration physique des trois cas
B. Ouattara (20)

CHAPITRE I GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Une étude numérique a été réalisée pour analyser le flux 3D Darcy–Forchheimer de nanofluide NTC sur une surface d'étirement est présentée dans la référence (21). L'approche numérique Runge-Kutta-Feldberg a été utilisée pour résoudre les équations du problème. Il est à noter que la couche limite thermique se développe avec l'incrémention du nombre d'Eckert. De plus, la valeur absolue du nombre de Nusselt local pour MWCNT est supérieure à SWCNT (figure 1.12).

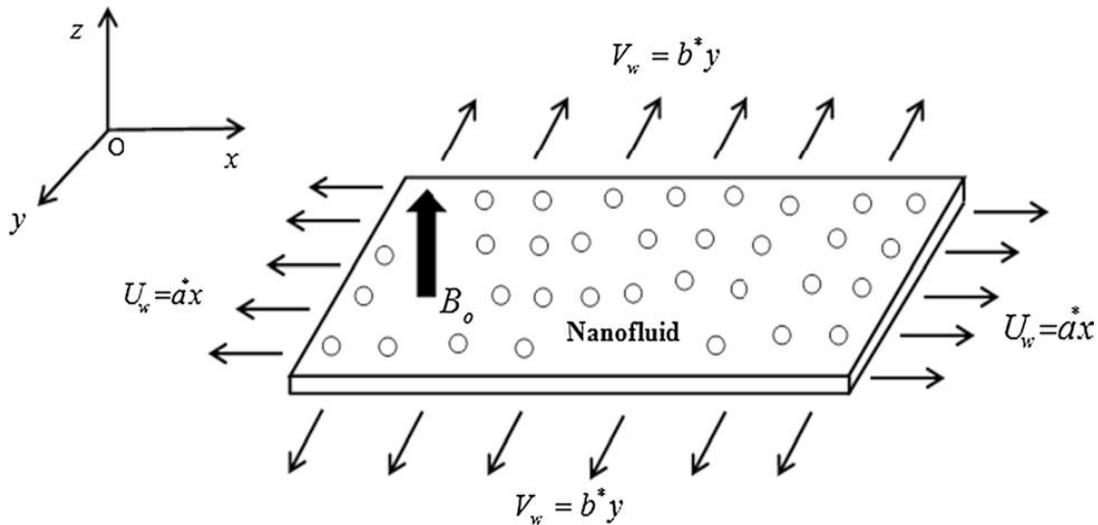


Figure 1.12: Configuration géométrique du problème étudié

Upreti H (21)

L'objectif technique principal auquel répond la thèse d'Ali Khouzam (22) consiste à analyser la stabilité de la solution d'équilibre dans le cas d'une cellule poreuse remplie d'un fluide binaire d'extension infinie soumise à un flux de chaleur constant et uniforme. Les surfaces verticales sont adiabatiques et imperméables à la matière (figure 1.13). En appuyant sur le concept de perturbations, l'écoulement de la solution d'équilibre est caractérisé par la perte de sa stabilité vers une bifurcation de Hopf ou une bifurcation stationnaire en fonction de différentes grandeurs adimensionnelles.

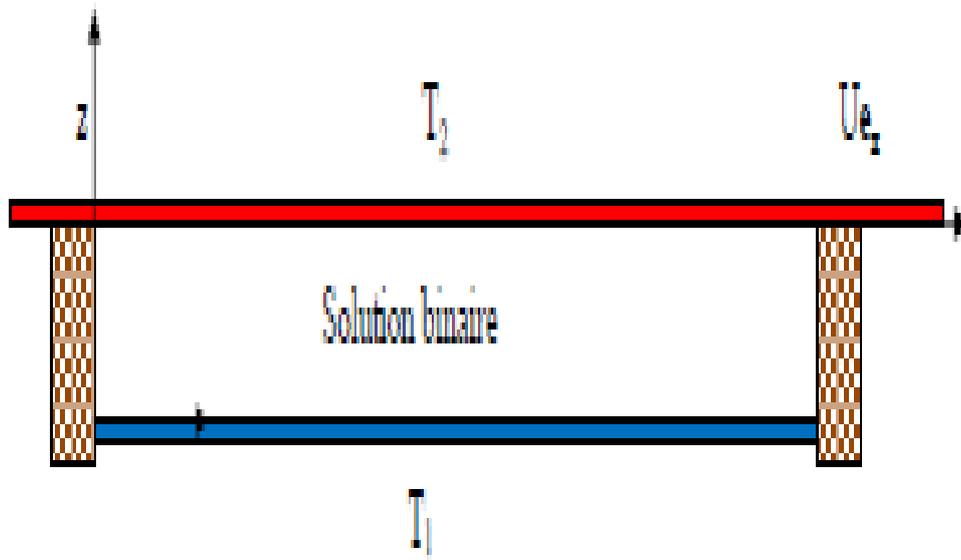


Figure 1.13: Schémas surfacique de la cavité
Khouzam A (22)

Un nouveau procédé de séparation thermogravitationnelle des constituants d'une solution binaire confinée dans une enceinte rectangulaire soumise à des flux de chaleur croisés a été testé par Yacine L (23) (figure 1.14) en introduisant la théorie des perturbations Il a détecté une bifurcation de Hopf pour une valeur du facteur de séparation négative $\Psi=-0.1$ et pour des grandes valeurs critiques du nombre de Rayleigh.

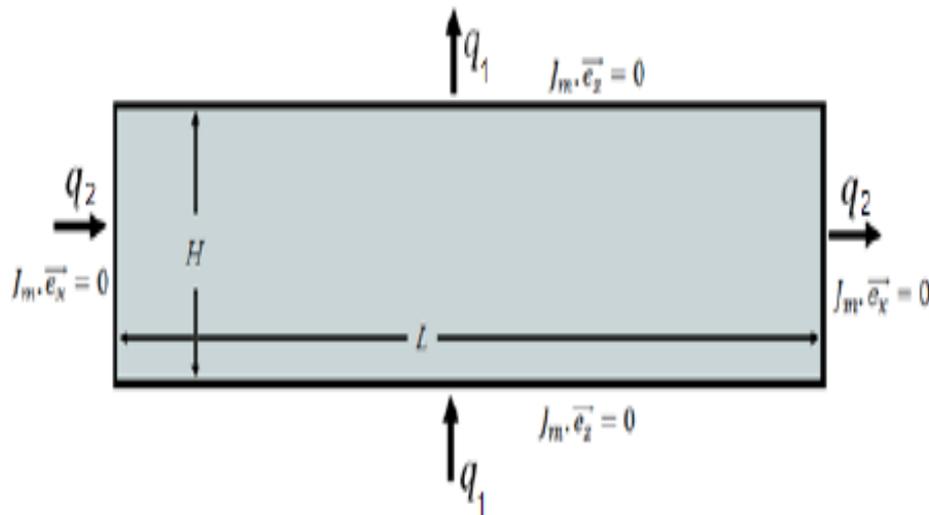


Figure 1.14: Schématisation du processus physique
Yacine L (23)

L'effet de la dissipation visqueuse et de l'aspiration/injection sur le flux de nanofluide MHD sur une cale avec un milieu poreux et le glissement a été étudié par Pandey AK et M.

CHAPITRE I GENERALITES ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

Kumar (24) (voir figure 1.15). Le système des équations gouvernantes a été résolu numériquement grâce au schéma de tir de Runge Kutta. Ils ont également déduit que la température des nanoparticules diminue avec l'augmentation du paramètre d'injection.

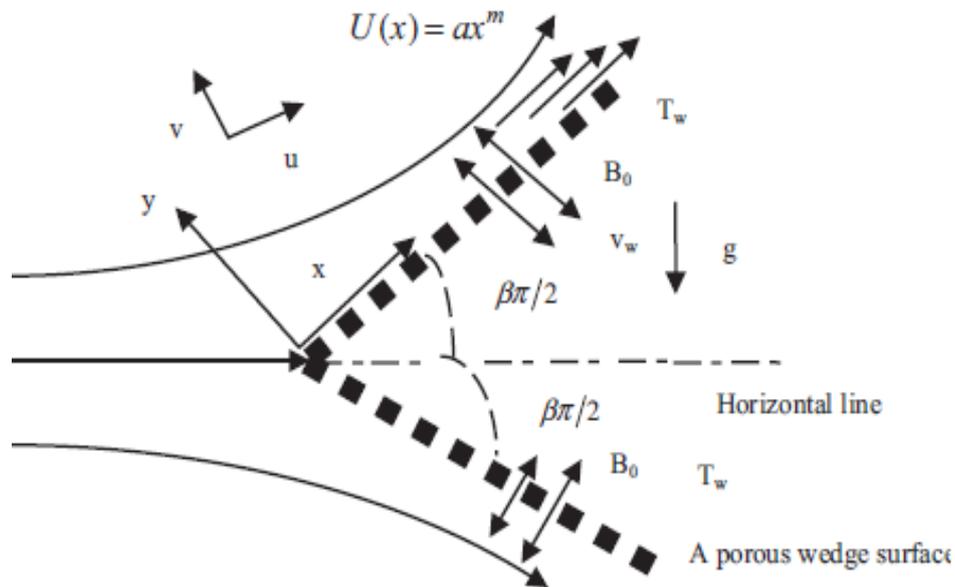


Figure 1.15: Configuration géométrique de l'écoulement
Pandey AK et Kumar M (24)

En utilisant la même approche numérique dans la référence (25), dont la géométrie étudiée est configurée dans la figure 1.16. La recherche est basée sur les conséquences de génération de chaleur/absorption et de l'aspiration/injection sur le flux MHD du nanofluide Ag-eau sur une plaque poreuse avec dissipation visqueuse –ohmique. Ils ont constaté que l'augmentation de porosité produit des taux de transfert thermique plus petits, tandis qu'ils augmentent avec l'incrémention du frottement volumique des nanoparticules et la couche limite d'impulsion diminue.

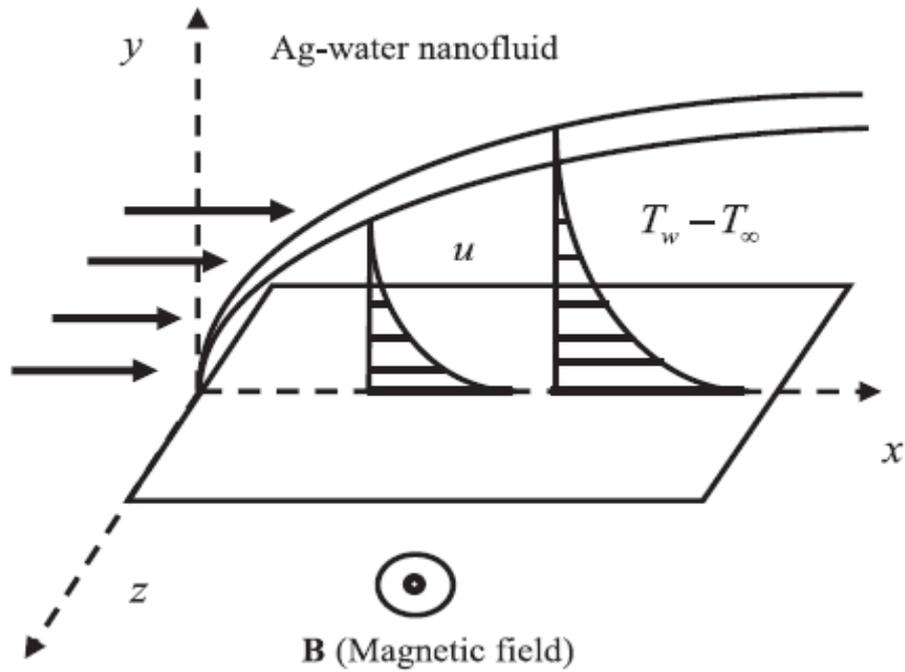


Figure 1.16: Arrangement de l'écoulement du modèle considéré

Upreti H (25)

L'étude menée par Ghalambaz Met al (26) constitue une documentation des plus complètes sur ce sujet. Elle consiste à examiner la convection naturelle sous l'influence de la dissipation visqueuse et l'effet radiatif en une enceinte carrée poreuse saturée par un nanofluide dont les parois verticales sont maintenues à des températures différentes, et les deux autres sont isolées thermiquement (figure 1.17). La méthode de la recherche est basée sur les différences finis. Il en découle de ce travail qu'en raison de la présence de la dissipation visqueuse les nombres de Nusselt n'ont été plus identiques au niveau des parties chaudes et froides, plus que l'augmentation du nombre Eckert a diminué le nombre de Nusselt à la surface chaude. Néanmoins elle l'a augmenté au niveau de celle qui est froide.

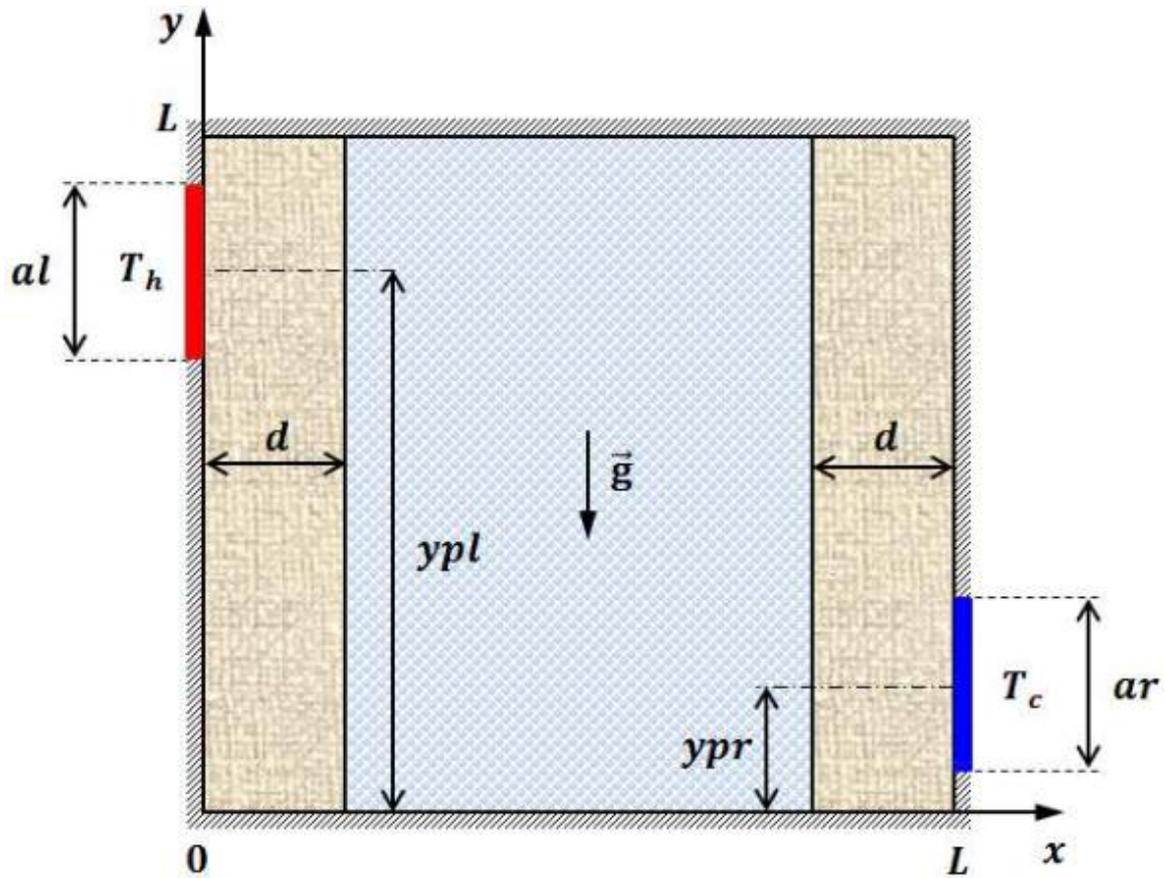


Figure 1.17: Configuration schématique de la cavité

Ghalambaz M et al (26)

Le transfert de chaleur par convection forcée d'un nano-fluide magnétique dans un canal rempli d'un milieu poreux (figure 1.18) a été étudié numériquement par Fadaei F et al (27). Les conséquences combinées de la couche limite thermique sur le champ magnétique et le milieu poreux entraînent une intensité et une perturbation plus élevées. Ils ont constaté que sous l'influence du champ magnétique induit par un solénoïde d'une intensité de courant de 10 A, la valeur moyenne du nombre de Nusselt augmente jusqu'à 30%.

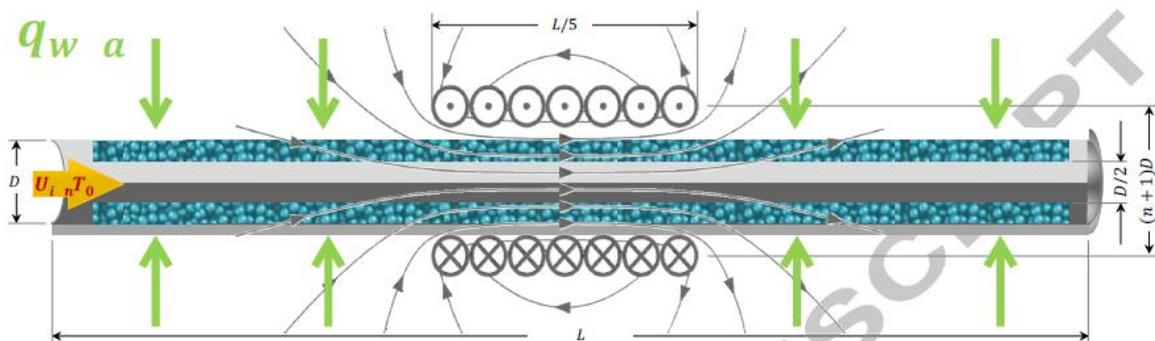


Figure 1.18: Représentation schématique du canal

Fadaei F et al (27)

L'intérêt porté à la convection mixte d'un fluide pur en milieu poreux vient des expériences de Combarous M (28) qui ont montré que la structure de la convection naissante dépend des valeurs prises par la vitesse débitante. Il a obtenu que la convection soit structurée sous forme de rouleaux transversaux oscillant avec des fréquences régulières pour des faibles débits. En revanche, pour des débits élevés, elle est structurée sous forme de rouleaux longitudinaux fixes (figure 1.19).

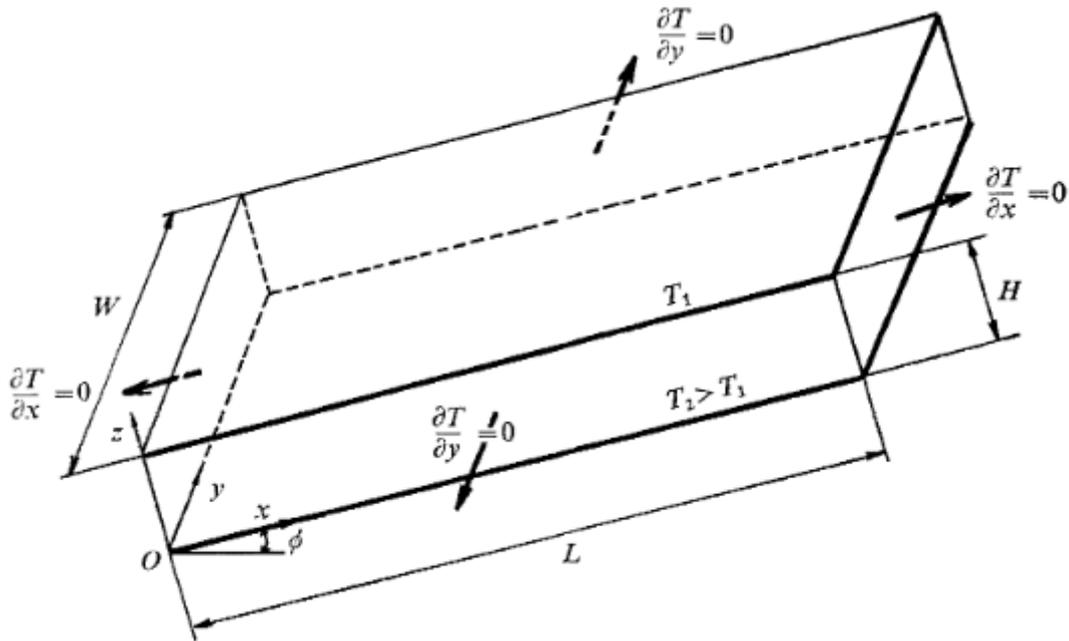


Figure 1.19: Domaine physique de l'enceinte inclinée
Combarous M (28)

La convection mixte dans un canal vertical avec des blocs poreux (figure 1.20) est documentée par l'étude numérique de Guerroudj N et Kahalerras H (29) qui ont considéré la paroi gauche comme adiabatique alors qu'un échauffement à l'aide des blocs poreux est localisé sur la surface droite. Un modèle numérique basé sur les volumes finis a été utilisé pour la résolution des équations gouvernantes.

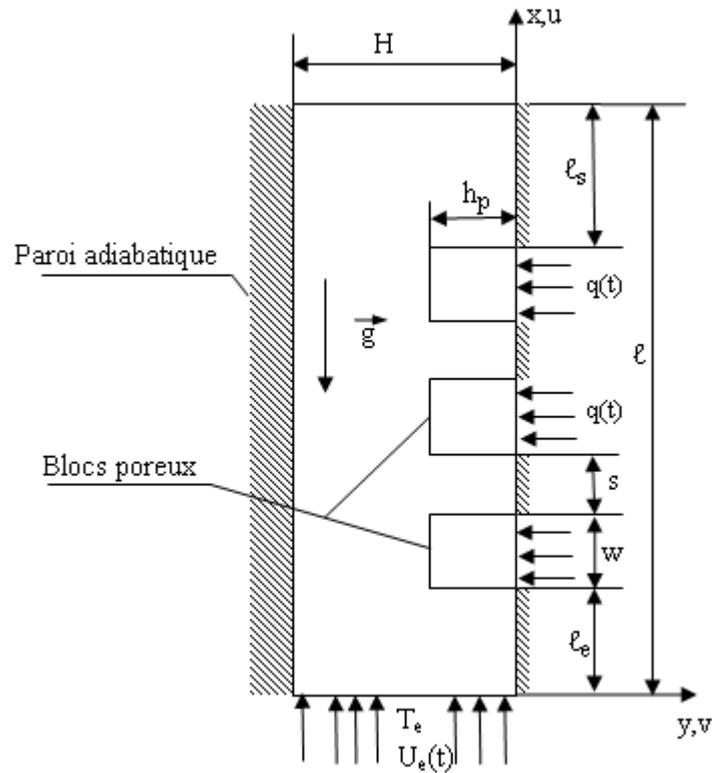


Figure 1.20: Géométrie du canal muni des blocs poreux

Guerroudj N et Kahalerras H (29)

Une amélioration de l'efficacité thermique a été produite dans le cas du flux de chaleur imposé pour l'échauffement des blocs. Une étude plus récente de Joulin A (30) est consacrée à l'analyse théorique de la convection mixte d'un mélange binaire confiné en milieu poreux de section rectangulaire chauffée par le bas et soumise à un écoulement horizontal dont le débit filtrant est non nul, tandis que la paroi supérieure est maintenue à une température froide (figure 1.21). La stabilité de l'écoulement a été traitée par la méthode des perturbations. Lorsque la perméabilité Ψ des parois est inférieure à une valeur critique Ψ_{pc} , la bifurcation est supercritique.

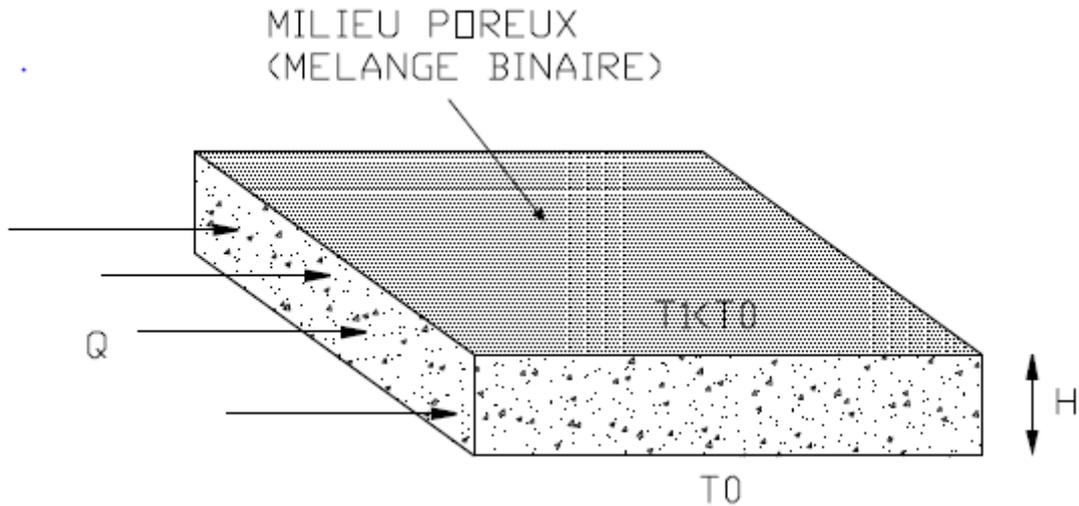


Figure 1.21: Couche poreuse de section rectangulaire
Joulin A (30)

Elle a par ailleurs mené une recherche avec Ouarzazi MN (31) dans le but de décrire le genre de l'instabilité en évaluant l'effet d'une perturbation qui s'effectue sur les deux directions horizontales. Ils ont remarqué une rupture de la symétrie d'invariance par rotation au seuil de l'instabilité absolue. Lorsqu'un mouvement de translation est injecté au-dessous et au-dessus de la plaque, la stabilité de l'écoulement est perdue pour une valeur de séparation $\Psi = -0.01$ et un nombre de Rayleigh $Ra=1728$. Le système étudié par Ouarzazi et Hirata SC (32) représente un massif poreux chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal de fluides viscoélastiques. L'objectif consiste à examiner l'influence combinée de la présence de débit non nul et des propriétés rhéologiques des fluides viscoélastiques. Considérant le mode de perturbations, ils ont trouvé que les instabilités thermoconvectives peuvent être stationnaires ou oscillatoires. Les instabilités thermodiffusives des fluides viscoélastiques dans une enceinte poreuse ont été examinées numériquement dans l'étude de la référence (6) en introduisant l'approche des différences finis, Le domaine physique est chauffé par le bas et les parties verticales sont supposées adiabatiques. Il ressort également de ce travail que l'apparition des bifurcations est avancée par des rapports du temps à la porosité normale du milieu λ/ε et des nombres de Darcy-Rayleigh plus élevés. Les simulations numériques effectuées par le travail de Hussein IY et Ali LF (33) sont consacrées à étudier la convection mixte transitoire de l'eau distillée dans une cavité cubique remplie d'un milieu poreux saturé d'un fluide. La paroi inférieure est chauffée d'une manière périodique par le bas (figure 1.22). En employant la technique des

volumes finis, ils ont constaté que l'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen diminue de plus en plus avec l'amplitude sinusoïdale imposée et la période du temps.

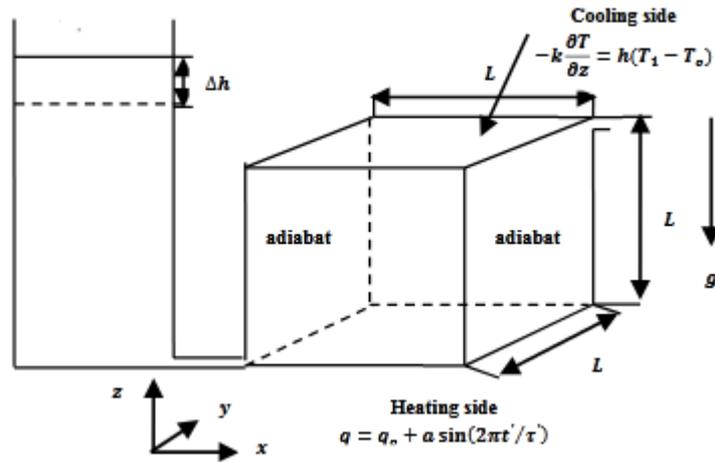


Figure 1.22: Cavité cubique chauffée du bord inférieure
Hussein IY et Ali LF (33)

L'originalité du travail de Delache A (34) réside notamment dans l'utilisation rigoureuse du concept d'instabilité absolue, grâce auquel, on comprend mieux l'influence d'inertie poreuse dans un massif poreux dont la paroi inférieure est soumise à un écoulement horizontal, en appliquant des perturbations sur les conditions aux frontières. Les résultats ont servi à éclaircir la déstabilisation vers des rouleaux longitudinaux si le rapport de forme est entier et vers des rouleaux transversaux lorsque ce rapport est inférieur à 1. Au-delà, l'instabilité fait apparaître des oscillations. L'étude faisant l'objet de l'article de Charrier et Elhajjar B (35) consiste à examiner la séparation des composants d'un mélange binaire prenant en considération l'effet Soret dans une cellule horizontale chauffée par le bas et remplie d'un milieu poreux. Le modèle mathématique régissant le phénomène physique est résolu par un code d'éléments finis (Comsol). Il ressort également de cette investigation une bifurcation vers un type d'écoulement monocellulaire pour une certaine valeur critique du facteur de séparation. Le but de la thèse de Delache A(36) est la mise au point d'une comparaison qualitative et quantitative des résultats expérimentaux des écoulements de convection mixte d'un fluide soumis à un écoulement horizontal homogène dans un milieu poreux chauffé par le bas (figure 1.23) avec à la fois des prédictions théoriques issues du concept d'instabilité convective ou absolue et des résultats des simulations numériques. Son travail est consacré à l'étude d'instabilité vis-à-vis de perturbations tridimensionnelles propagatives. L'un des résultats majeurs qui découlent de ce travail est que la nature des

structures thermo-convectives bifurquées dépend du rapport de forme latéral du milieu et de l'inertie poreuse.

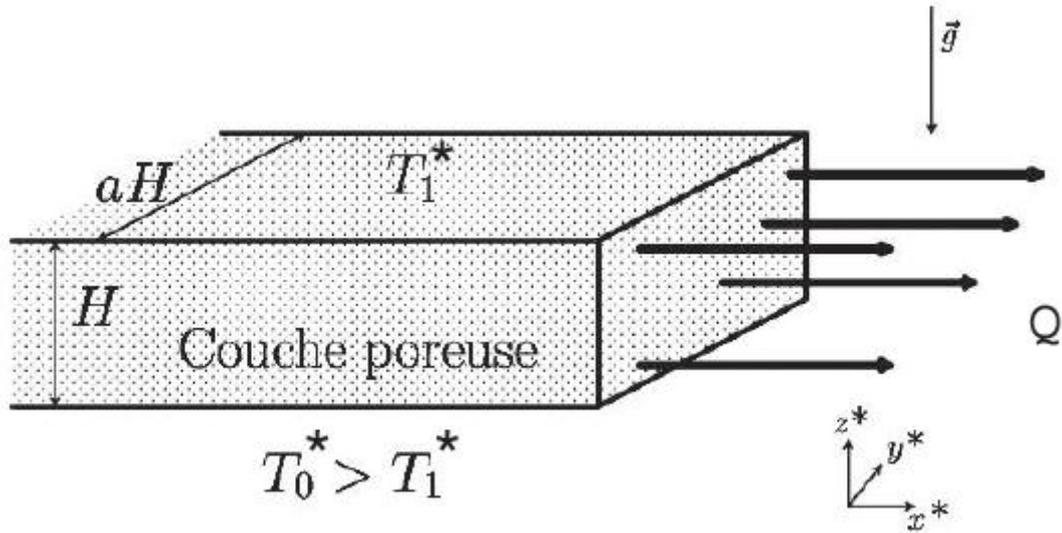


Figure 1.23: Géométrie de l'enceinte en présence d'un écoulement horizontal

Delache A (36)

La motivation qui anime l'étude de Mejni F (37) est de tester, pour un écoulement réel, les mécanismes de déstabilisation d'écoulements inhomogènes qui caractérisent le problème de la convection mixte en une couche poreuse chauffée par le bas d'une façon inhomogène et saturée par un fluide en écoulement de débit filtrant horizontal (figure 1.24). La méthode spectrale a été exposée afin de résoudre numériquement le système non linéaire avec les conditions aux frontières. Les simulations numériques effectuées du chapitre 4 indiquent que la présence d'une région d'instabilité absolue suffisamment étendue est nécessaire à l'émergence de structures thermoconvectives auto-entretenues et oscillant avec une fréquence bien définie.

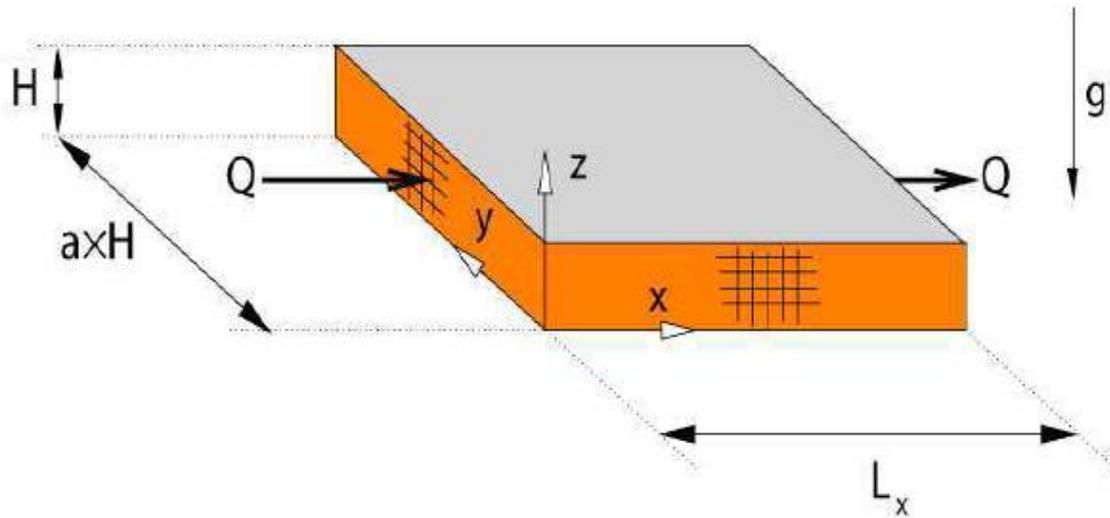


Figure 1.24: Diagramme schématique du système physique
Mejni F (37)

Une simulation numérique de l'écoulement de convection mixte est réalisée par Chattopadhyay A et al (38) pour une enceinte poreuse chauffée sinusoïdalement à partir de la paroi droite qui est en mouvement avec celle de gauche et isolée thermiquement de deux autres côtés opposés en utilisant un schéma compact. Trois configurations différentes sont envisagées en fonction du sens des parois mobiles (figure 1.25). Il est constaté que les caractéristiques d'écoulement affectées par le nombre de Darcy ne sont pas les mêmes dans les cas I et II, le mouvement d'écoulement en convection libre est très lent et, en raison de l'incrémentement de la valeur d'amplitude, le transfert de chaleur augmente.

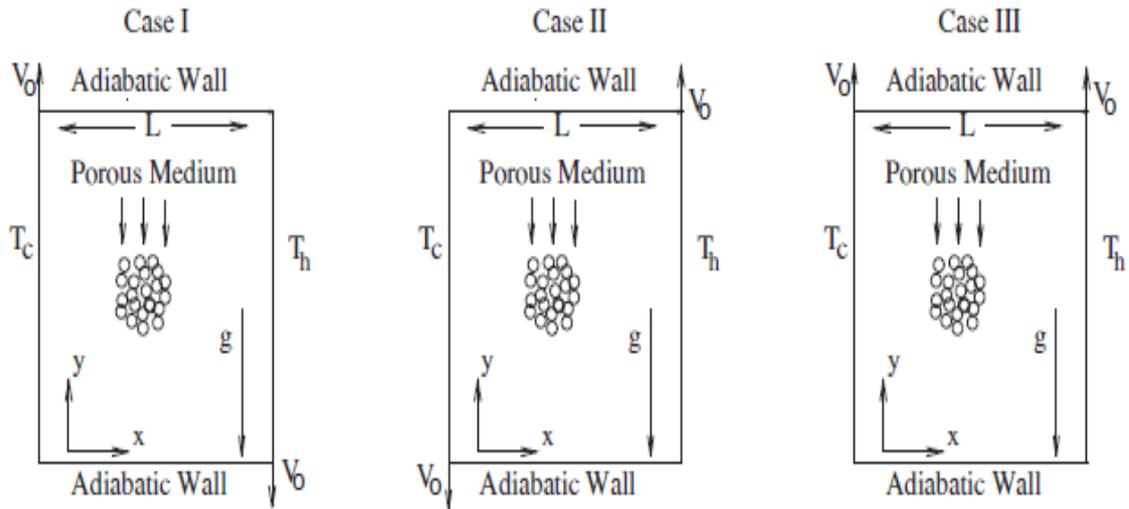


Figure 1.25: Cavités pour des cas différents

Chattopadhyay A et al (38)

Dans toutes les études mentionnées ci-dessus, différentes configurations poreuses avec différentes combinaisons de conditions aux limites ont été supposées. L'étude actuelle que nous nous sommes intéressés est différente de celle du 3^{ème} cas considéré dans le travail de Chattopadhyay A et al (38). Il s'agit d'une source de chaleur partielle a été introduite au milieu du fond de la cavité.

Par conséquent diverses structures des effets de la convection mixte sur la stabilité du comportement de l'écoulement ont été établies. Le déplacement des parois coulissantes est opposé au courant dû aux forces de flottabilité. Ce mouvement a créé une compétition entre l'effet de cisaillement et de la force de flottabilité provoquant ainsi le phénomène de bifurcation. Ce travail fait l'objet d'une attention particulière pour la collecte des rayons solaires pour les besoins de ventilation des bâtiments et sera également un outil de conception pour améliorer les pièces de refroidissement dans les boites électroniques contre la dissipation thermique. Cela est dû à la demande de leurs petites tailles et de leurs puissances.

MODELE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHEMATIQUE

2.1. Introduction

Ce chapitre s’attache à décrire la configuration géométrique du problème considéré, et comme la résolution du problème posé dans cette recherche passe par la construction d’un modèle mathématique qui est basé sur quelques hypothèses simplificatrices, les équations régissant le problème sont adimensionnées afin d’élaborer un modèle pour déterminer le comportement du système à l’étude.

2.2. Modèle général

Au cours des dernières décennies, la plus grande partie des études sur les milieux poreux a traité ce qui est actuellement connu sous le modèle de DARCY-FORCHHEIMER-BRINKMAN qui s’écrit sous la forme suivante (39):

$$\underbrace{\frac{\rho_f}{\varphi} \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\varphi} (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right]}_{(a)} = - \underbrace{\nabla(P)}_{(b)} + \underbrace{\rho_f \vec{g}}_{(c)} - \underbrace{\frac{\mu}{k}}_{(d)} \vec{V} + \underbrace{\frac{\mu}{\varphi} \nabla^2 \vec{V}}_{(e)} - \underbrace{\frac{C_f \rho_f}{k^{1/2}} |\vec{V}| \vec{V}}_{(f)} \quad (2.1)$$

\vec{V} : Valeur moyennée sur un volume élémentaire représentatif (VER)

$$C_f = \frac{1.75}{\sqrt{150 Da \varphi}}$$

- (a): Forces inertielles macroscopiques
- (b): Gradient de pression
- (c): Forces de volume
- (d): Terme de DARCY
- (e): Terme visqueux de BRINKMAN
- (f): Terme inertiel de FORCHHEIMER

L’écoulement en milieu poreux est très compliqué, il peut être le résultat des effets d’inertie, de viscosité et d’une variation importante de la porosité au niveau des parois, raison pour laquelle l’étude des écoulements en milieu poreux est basée généralement sur ce modèle.

2.3. Transfert thermique dans un milieu poreux

En se basant sur la première loi de la thermodynamique dans un milieu poreux isotropique, en tenant compte d'un équilibre thermique local: $T_s = T_f = T$ et on néglige les effets radiatifs, la dissipation visqueuse et le travail d'échange de pression supposant aussi que la conduction dans les phases solide et fluide se produit en parallèle. (10)

On aura donc l'équation d'énergie suivante:

$$(\rho C_p)_m \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T \right] = \nabla \cdot (k_m \nabla T) \quad (2.2)$$

$$\text{où } \begin{cases} (\rho C_p)_m = (1 - \varphi)(\rho C_p)_s + \varphi(\rho C_p)_f \\ k_m = (1 - \varphi)k_s + \varphi k_f \end{cases} \quad (2.3)$$

On divise l'équation (2.2) par $(\rho C_p)_f$ et d'une autre part on multiplie et on divise le rapport $\frac{k_m}{(\rho C_p)_f}$ par k_f afin d'obtenir:

$$\lambda = \frac{k_m}{k_f} \text{ et } \alpha_f = \frac{k_f}{(\rho C_p)_f} \quad (2.4)$$

$$\text{Considérant: } \frac{(\rho C_p)_m}{(\rho C_p)_f} \approx 1$$

On obtient donc:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) T = \nabla \cdot (\lambda \alpha_f \nabla T) \quad (2.5)$$

2.4. Géométrie du problème

Considérons un écoulement de la convection mixte d'air confiné dans une enceinte bidimensionnelle remplie d'une matière poreuse, les mouvements convectifs sont pilotés par des conditions de type Dirichlet au milieu du bord inférieure, les parois verticales qui se déplacent vers le haut avec une vitesse constante V_0 sont supposées froides, alors que les parties restantes sont maintenues adiabatiques.

La configuration du problème considéré est illustrée sur la figure 2.1.

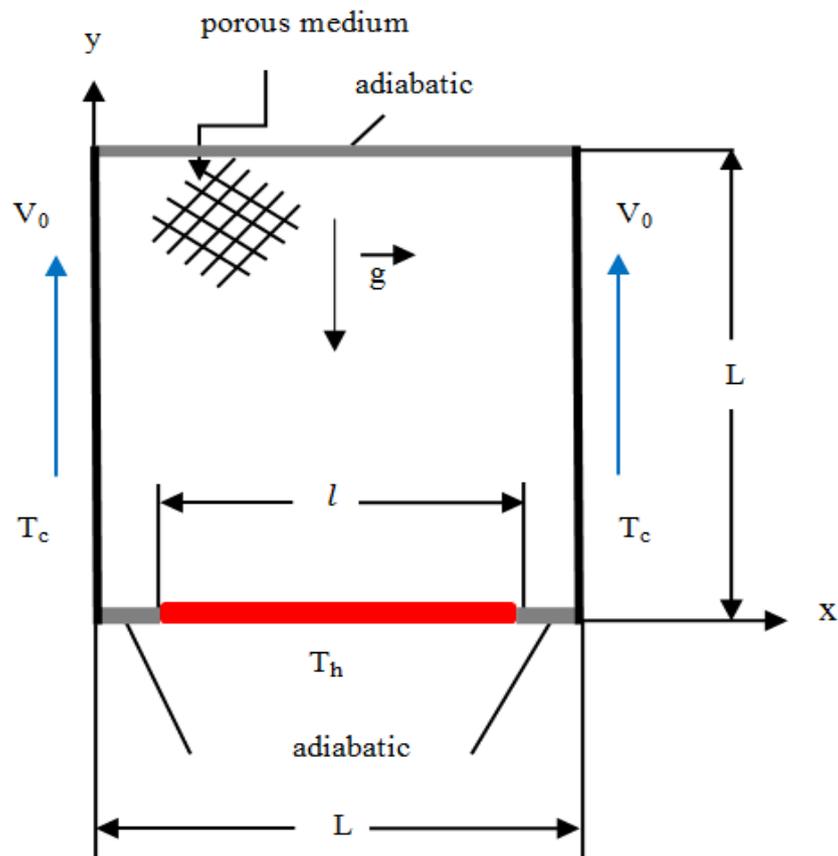


Figure 2.1: Géométrie du problème considéré.

2.5. Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices retenues afin de réduire les équations générales décrivant le problème étudié dans ce travail sont les suivantes:

- ✚ Le milieu poreux est isotrope et homogène.

- ✚ Le fluide étudié saturant le milieu poreux est incompressible et Newtonien.
- ✚ L'écoulement est laminaire.
- ✚ La dispersion thermique est négligeable.
- ✚ La dissipation visqueuse dans l'équation d'énergie est négligeable.
- ✚ La conductivité, viscosité et d'autres propriétés du fluide sont supposées constantes dans le terme de forces de volume, on considère que la masse volumique du fluide varie en fonction de la température dans l'enceinte. Elle est donnée par la relation suivante:

$$\rho_f = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0)]$$

ρ_0 est la masse volumique à un état de référence T_0

Et

$$\beta_T = \frac{-1}{\rho} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p$$

β_T est évalué à l'état de référence

- ✚ Le transfert d'énergie par rayonnement est négligeable.
- ✚ La diffusion de matière dans la matrice solide est négligée.

2.6. Mise en équations

Compte tenu des simplifications engendrées par les hypothèses précédemment citées, le système d'équations de conservation qui régit le phénomène physique, s'écrit dans le classement respectif:

2.6.1. L'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

2.6.2. L'équation de mouvement suivant X

$$\rho_f \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(vu)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu}{k} u - \frac{C_f \rho_f \sqrt{u^2 + v^2}}{k^{1/2}} u + \frac{\mu}{\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \quad (2.7)$$

2.6.3. L'équation de mouvement suivant Y

$$\rho_f \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(vv)}{\partial y} \right] = - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\mu}{k} v - \frac{C_f \rho_f \sqrt{u^2 + v^2}}{k^{1/2}} v + \frac{\mu}{\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \rho_f g \beta_T (T - T_c) \quad (2.8)$$

2.6.4. L'équation d'énergie

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(uT)}{\partial x} + \frac{\partial(vT)}{\partial y} = \lambda \alpha_f \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \quad (2.9)$$

2.7. Formulation adimensionnelle

La transformation adimensionnelle des variables permet de traduire la réalité des phénomènes physiques indépendamment des moyens de mesure. Elle a deux objectifs distincts: d'un côté, la solution devient plus générale et d'autre côté, le nombre des grandeurs d'un problème va se réduire. Cette procédure nécessite l'incorporation des suivants paramètres:

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, U = \frac{u}{V_0}, V = \frac{v}{V_0}, \tau = t \frac{V_0}{L}, P = \frac{P^*}{\rho_f V_0^2}, \theta = \frac{(T - T_c)}{(T_h - T_c)}, \omega = \frac{\Omega L}{V_0}, \psi = \frac{\Psi}{LV_0} \quad (2.10)$$

2.7.1. L'équation adimensionnelle de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial X} \frac{V_0}{L}$$

et

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial Y} \frac{V_0}{L}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 &\Leftrightarrow \frac{V_0}{L} \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.7.2. L'équation adimensionnelle de quantité de mouvement suivant X

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{V_0 \partial U}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{V_0}{L}$$

Donc:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U V_0^2}{\partial \tau L}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uu)}{\partial x} &= \frac{\partial(uu)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \\ &= \frac{\partial(V_0 U V_0 U)}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \\ &= \frac{V_0^2 \partial(UU)}{\partial X} \frac{1}{L} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} = \frac{\partial(UU) V_0^2}{\partial X L}$$

et

$$\frac{\partial(uv)}{\partial y} = \frac{\partial(UV) V_0^2}{\partial Y L}$$

Terme de gradient de pression

$$P = \frac{P^*}{\rho_f V_0^2} \Rightarrow \frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\partial P^*}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} = \frac{\rho_f V_0^2}{L} \frac{\partial P}{\partial X}$$

$$\frac{\mu}{k} u = \frac{\nu \rho_f}{k} V_0 U$$

Terme de FORCHHEIMER

$$\frac{C_f \rho_f \sqrt{u^2 + v^2}}{k^{1/2}} u = \frac{C_f \rho_f V_0 \sqrt{U^2 + V^2}}{k^{1/2}} V_0 U$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U V_0}{\partial X L} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U V_0}{\partial X L} \right) \frac{\partial X}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{V_0}{L^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{V_0}{L^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_0^2}{L} \left[\frac{1}{\varphi} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial Y} \right] &= -\frac{V_0^2}{L} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\nu}{k} V_0 U \\ &\quad - \frac{V_0^2 C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{k^{1/2}} U + \frac{\nu V_0}{\varphi L^2} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned}$$

Sachant que:

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad \text{Et} \quad Da = \frac{k}{L^2}$$

Donc:

$$\frac{\nu}{k} V_0 \frac{L}{V_0^2} = \frac{L\nu}{kV_0}$$

On multiplie et on divise par L^2 on obtient:

$$\frac{\nu}{LV_0} \frac{L^2}{k} = \frac{1}{ReDa}$$

Ainsi que:

$$\frac{\nu V_0}{\varphi L^2} \frac{L}{V_0^2} = \frac{1}{\varphi} \frac{\nu}{LV_0} = \frac{1}{\varphi Re}$$

L'équation de quantité de mouvement suivant X s'écrit finalement:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(UU)}{\partial X} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{U}{ReDa} - \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} U \\ & + \frac{1}{\varphi Re} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

2.7.3. L'équation adimensionnelle de quantité de mouvement suivant Y

De la même façon que l'équation précédente, on trouve:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{V}{ReDa} - \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} V \\ & + \frac{L}{V_0^2} g[\beta_T(T - T_c)] + \frac{1}{\varphi Re} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{L^3}{\nu^2}}{Re^2} &= \frac{L^3 \nu^2}{\nu^2 L^2 V_0^2} \\ &= \frac{L}{V_0^2} \end{aligned}$$

Sachant que:

Le nombre de Grashof thermique

$$Gr_T = \frac{g\beta_T(T_h - T_c)L^3}{\nu^2}$$

Alors:

L'équation finale de quantité de mouvement suivant Y peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial Y} = & -\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{V}{ReDa} - \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} V \\ & + \frac{1}{\varphi Re} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + \frac{Gr_T}{Re^2} \theta \end{aligned}$$

Ou bien

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(UV)}{\partial X} + \frac{1}{\varphi^2} \frac{\partial(VV)}{\partial Y} &= -\frac{\partial P}{\partial Y} - \frac{V}{ReDa} - \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} V \\ + \frac{1}{\varphi Re} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] + Ri\theta \end{aligned} \quad (2.13)$$

En tenant compte que $Ri = \frac{Gr_T}{Re^2}$

2.7.4. L'équation adimensionnelle d'énergie

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= \frac{(T_h - T_c) \partial \theta}{\frac{\partial \tau}{\partial t}} \frac{\partial \tau}{\partial t} \\ &= \Delta T \frac{V_0}{L} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uT)}{\partial x} &= \frac{u \partial T}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \\ &= V_0 U \frac{(T_h - T_c) \partial \theta}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{\partial(uT)}{\partial x} = \Delta T \frac{V_0}{L} U \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

et

$$\frac{\partial(vT)}{\partial y} = \Delta T \frac{V_0}{L} V \frac{\partial \theta}{\partial Y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial X} \left(\Delta T \frac{\partial \theta}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\Delta T}{L} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) \right] \frac{\partial X}{\partial x} \end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)$$

et

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)$$

$$\Delta T \frac{V_0}{L} \left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right] = \lambda \alpha_f \frac{\Delta T}{L^2} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right]$$

Sachant que:

Le nombre de Prandtl

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha_f}$$

On a:

$$\frac{\alpha_f L}{L^2 V_0} = \frac{\alpha_f}{LV_0}$$

On multiplie et on divise par ν on trouve:

$$\frac{\nu}{LV_0} \frac{\alpha_f}{\nu} = \frac{1}{PrRe}$$

En remplaçant cette quantité par sa valeur, l'équation précédente est équivalente à:

$$\left[\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{\partial (U\theta)}{\partial X} + \frac{\partial (V\theta)}{\partial Y} \right] = \lambda \frac{1}{PrRe} \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) \right] \quad (2.14)$$

2.7.5. L'équation de vorticité

L'équation (2.12) est différenciée par rapport à Y

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\varphi} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) + U \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] + \frac{1}{\varphi} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \\ & = -\varphi \frac{\partial^2 P}{\partial Y \partial X} - \varphi \frac{\partial U}{\partial Y} \left(\frac{1}{ReDa} + \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} \right) + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.15)$$

La différenciation par rapport à X de l'équation (2.13), cela entraîne:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{1}{\varphi} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] + \frac{1}{\varphi} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right) \right] \\
 & = -\varphi \frac{\partial^2 P}{\partial X \partial Y} - \varphi \frac{\partial V}{\partial X} \left(\frac{1}{ReDa} + \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} \right) \\
 & + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] + \varphi \frac{Gr_T}{Re^2} \frac{\partial \theta}{\partial X}
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Sachant que la vorticité est définie par la relation suivante:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$$

et

$$Ri = \frac{Gr_T}{Re^2}$$

Par la soustraction de l'équation (2.15) de l'équation (2.16), il en découle:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\varphi} \left[\frac{\partial U}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial V}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] \\
 & + \frac{1}{\varphi} \left[U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] = \varphi \left(-\frac{1}{ReDa} - \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \\
 & + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right] + \varphi Ri \frac{\partial \theta}{\partial X} \\
 & \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{\varphi} \left(U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right) = \varphi \left(-\frac{1}{ReDa} - \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} \right) \omega \\
 & + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \varphi Ri \frac{\partial \theta}{\partial X}
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Cette équation a été identifiée sous le nom de l'équation du transport de la vorticité, elle est de type parabolique.

2.7.6. L'équation de fonction de courant

Les vitesses de l'écoulement sont définies comme ceci:

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \\ \text{et} \\ V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Ainsi la formule de la fonction de courant est la suivante:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (2.19)$$

2.8. CONDITIONS INITIALES ET AU FRONTIERES

➤ **Conditions initiales**

Dans un premier temps, la température adimensionnelle du fluide est nulle dans tout le domaine de l'enclosure. De plus, il est au repos.

A $\tau = 0$:

$$\text{Pour: } 0 < X < 1 \text{ et } 0 < Y < 1 \quad \theta = 0, \omega = 0 \text{ et } \psi = 0 \quad (2.20)$$

➤ **Conditions aux frontières**

La valeur de la fonction du courant ψ est nulle sur toutes les parois.

L'évaluation de la vorticité sur les côtés mobiles est effectuée à l'aide d'un développement de Taylor de premier ordre de la fonction de courant. Cet  tat initial sera exprimé de manière mathématique dans le chapitre suivant.

Les équations différentielles modélisantes sont r solv es avec les conditions aux limites suivantes:

A $\tau > 0$:

$$\theta = 0 \quad U = 0 \quad V = 0 \text{ à } X = 0 \text{ et } 1 \text{ et } 0 < Y < 1 \quad (2.21)$$

$$\theta = 1 \quad U = V = 0 \text{ à } Y = 0 \text{ et } \frac{1-\varepsilon}{2} \leq X \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad V = 0 \text{ à } Y = 0 \text{ et } 0 < X < \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2} < X < 1 \quad (2.23)$$

CHAPITRE II MODELE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHEMATIQUE

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U = V = 0 \text{ à } Y = 1 \text{ et } 0 < X < 1 \quad (2.24)$$

Où $\varepsilon = \frac{l}{L}$ représente la longueur adimensionnelle de la source chaude.

MODELISATION NUMERIQUE

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous décrivons la méthode utilisée pour résoudre les équations modélisant le transfert de chaleur et l'écoulement dans l'enceinte qui ont été développées dans le précédent chapitre. Leur discrétisation est l'opération de les transformer en un système d'équations algébriques dont la résolution numérique est abordée par la méthode des différences finies. Cette méthode est la plus ancienne des méthodes numériques. Elle a été introduite au 18^{ème} siècle par Euler(40). Cette méthode a été largement utilisée pour résoudre les problèmes de convection en régime transitoire pour différentes configurations géométriques. La modélisation par différences finies procède avant tout de la décomposition du domaine physique en éléments de lignes reliées entre elles et mis en continuité en un nombre finis de points. Ces points de continuité, appelés nœuds, sont disposés à l'intérieur et sur le pourtour du domaine physique(41). Dans un repère cartésien, chaque nœud est identifié par le couple d'indices (i,j) désignant les lignes d'intersection du maillage.

3.2. Discrétisation des différentes dérivées

Le système d'équations obtenu est normalisé à l'aide des schémas d'ordre élevé tel que le schéma centré du quatrième ordre pour les vitesses, les termes diffusifs et terme source, alors que l'usage du schéma Upwind du troisième ordre(42) est opté pour les termes convectifs, mais la discrétisation du terme temporel est assurée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre. Les relations qui suivent, donnent la forme générale discrétisée des dérivées partielles de l'équation de transport d'une variable ϕ , pour un nœud quelconque (i,j) , selon la direction x. On a choisit une seule direction dans le but d'alléger la rédaction de ce chapitre.

3.2.1. Discrétisation temporelle $\left(\frac{\partial\phi}{\partial\tau}\right)$

Méthode de Runge-Kutta 4

Parmi les techniques numériques d'approximation employées pour résoudre les équations différentielles, Celle de Runge-Kutta du 4^{ème} ordre est couramment la plus utilisée. En 1901, Carl Runge et Martin Wilhem Kutta sont les deux mathématiciens qui élaborèrent cette méthode. Cette dernière est préférable pour la résolution des équations différentielles ordinaires (EDO) car elle est très stable pour les fonctions courantes de la physique.(43)

L'équation générale de transport peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \underbrace{-U\frac{\partial\phi}{\partial X} - V\frac{\partial\phi}{\partial Y} + \Gamma_{\phi}\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial X^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial Y^2}\right)\right]}_{Rhs(\phi)} + S_{\phi} \quad (3.1)$$

La méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre est dérivée de la méthode d'Euler, elle utilise trois points intermédiaires pour progresser du temps (n) au point (i, j) vers le temps $(n + 1)$ d'une variable ϕ selon les calculs suivants: (43)

$$\phi|_{i,j}^1 = \phi|_{i,j}^n + \Delta\tau Rhs(\phi|_{i,j}^n) \quad (3.2)$$

$$\phi|_{i,j}^2 = \phi|_{i,j}^n + \frac{(\Delta\tau)}{2} Rhs(\phi|_{i,j}^1) \quad (3.3)$$

$$\phi|_{i,j}^3 = \phi|_{i,j}^n + \frac{(\Delta\tau)}{2} Rhs(\phi|_{i,j}^2) \quad (3.4)$$

$$\phi|_{i,j}^4 = \phi|_{i,j}^n + \Delta\tau Rhs(\phi|_{i,j}^3) \quad (3.5)$$

$$\phi|_{i,j}^{n+1} = \phi|_{i,j}^n + \frac{1}{6} (Rhs(\phi|_{i,j}^n) + 2Rhs(\phi|_{i,j}^1) + 2Rhs(\phi|_{i,j}^2) + Rhs(\phi|_{i,j}^3)) \quad (3.6)$$

3.2.2. Discrétisation des conditions aux limites

Les dérivées des conditions aux limites sont discrétisées avec un schéma décentré avant ou arrière, selon la position de la paroi considérée.

❖ Température

Dans l'exemple que nous traitons, les températures aux parois latérales sont imposées. En admettant que les autres sont adiabatiques. Alors la condition d'adiabacité est exprimée comme suit:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{j=1, \text{nyt}} = 0$$

Il vient alors:

$$\theta_{i,1} = -\frac{s\pi y_1^2}{\Delta y_1^2 - s\pi y_1^2} \theta_{i,2} + \frac{\Delta y_1^2}{\Delta y_1^2 - s\pi y_1^2} \theta_{i,3} \quad (3.7)$$

$$\theta_{i, \text{nyt}} = \frac{\Delta y_{\text{nyt}-1}^2}{\Delta y_{\text{nyt}-1}^2 - s\pi y_{\text{nyt}}^2} \theta_{i, \text{nyt}-2} - \frac{s\pi y_{\text{nyt}}^2}{\Delta y_{\text{nyt}-1}^2 - s\pi y_{\text{nyt}}^2} \theta_{i, \text{nyt}-1} \quad (3.8)$$

Avec:

$$s\pi y_1 = \Delta y_1 + \Delta y_2 \text{ et } s\pi y_{\text{nyt}} = \Delta y_{\text{nyt}-2} + \Delta y_{\text{nyt}-1}$$

❖ Vorticité au niveau des parois fixes

La vorticité est définie par la relation: $\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$ (3.9)

Au niveau de la paroi inférieure elle est exprimée par:

$$\omega_{i,1} = \underbrace{\left. \frac{\partial V}{\partial X} \right|_{j=1}}_{=0} - \left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_{j=1} = - \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right|_{j=1}$$

Considérant le développement en série de Taylor pour ψ en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux

$$\psi_{i,2} = \psi_{i,1} + \Delta y_1 \underbrace{\left. \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right|_{j=1}}_{=0} + \frac{\Delta y_1^2}{2} \underbrace{\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} \right|_{j=1}}_{-\omega}$$

Donc:

$$\omega_{i,1} = \frac{2[\psi_{(i,1)} - \psi_{(i,2)}]}{\Delta y_1^2} \quad (3.10)$$

D'une manière analogue, nous obtenons pour la paroi supérieure:

$$\omega_{i, \text{nyt}} = \frac{2[\psi_{(i, \text{nyt})} - \psi_{(i, \text{nyt}-1)}]}{\Delta y_{\text{nyt}-1}^2} \quad (3.11)$$

❖ Vorticité au niveau des parois mobiles

Dans ce cas $\frac{\partial \psi}{\partial X}$ n'est pas nulle mais égale à V_0

Au niveau de la paroi gauche $\left. \frac{\partial U}{\partial Y} \right|_{i=1} = 0$, de telle façon que pour la paroi gauche le

développement en série de Taylor pour ψ est:

$$\psi_{2,j} = \psi_{1,j} + \Delta x_1 \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial X} \Big|_{i=1}}_{=-V_0} + \frac{\Delta x_1^2}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \Big|_{i=1}}_{-\omega}$$

D'où:

$$\omega_{1,j} = \frac{2[\psi_{(1,j)} - \psi_{(2,j)} - V_0 \Delta x_1]}{\Delta x_1^2} \quad (3.12)$$

D'une manière similaire, nous obtenons pour la paroi droite:

$$\omega_{nxt,j} = \frac{2[\psi_{(nxt,j)} - \psi_{(nxt-1,j)} + V_0 \Delta x_{nxt-1}]}{\Delta x_{nxt-1}^2} \quad (3.13)$$

3.3. Résolution des systèmes d'équations

Nous avons choisis la méthode des différences finis pour la résolution des équations adimensionnelles modélisantes en vue de la géométrie du problème et les capacités de calcul. Cette approche est la plus ancienne des méthodes pour la solution numérique d'équation aux dérivées partielles. Elle a été mise au point par Euler en 1768, qui l'a été utilisée afin d'obtenir des solutions aux équations différentielles par le biais de la simulation numérique. A chaque nœud de la grille, le développement en série de Taylor est utilisé pour générer des approximations aux dérivées partielles des équations régissant l'écoulement, ce qui permet d'obtenir une équation algébrique à chaque point de la grille. Alors la première étape vers l'obtention d'une solution numérique implique la discrétisation du domaine géométrique. Une fois le système d'équations algébriques est obtenu, il peut être résolu à l'aide des méthodes itératives. (44)

Les équations de la température et de la vorticité, étant paraboliques. D'où, la méthode de Runge- Kutta d'ordre 4 peut être intervenir pour leur résolution de telle sorte que la relation (3.6) soit vérifiée.

Avec:

$$\text{Rhs} (\theta|_{i,j}^n) = - \left(U \frac{\partial \theta|_{i,j}^n}{\partial X} + V \frac{\partial \theta|_{i,j}^n}{\partial Y} \right) + \frac{1}{RePr} \left[\left(\frac{\partial^2 \theta|_{i,j}^n}{\partial X^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta|_{i,j}^n}{\partial Y^2} \right) \right] \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Rhs} (\omega|_{i,j}^n) &= - \frac{1}{\varphi} \left(U \frac{\partial \omega|_{i,j}^n}{\partial X} + V \frac{\partial \omega|_{i,j}^n}{\partial Y} \right) + \frac{1}{Re} \left[\left(\frac{\partial^2 \omega|_{i,j}^n}{\partial X^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 \omega|_{i,j}^n}{\partial Y^2} \right) \right] + \varphi Ri \frac{\partial \theta|_{i,j}^n}{\partial X} - \\ &\varphi \left(\frac{1}{ReDa} + \frac{C_f \sqrt{U^2 + V^2}}{\sqrt{Da}} \right) \omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nous avons opté pour une méthode de sur relaxation N.L.O.R, de telle sorte que la valeur de l'entité physique $\phi_{i,j}$ à l'itération $k + 1$ est exprimée comme ceci:

$$\phi_{i,j}^{k+1} = \phi_{i,j}^k - K \frac{F_{\phi_{i,j}}}{\frac{\partial F_{\phi_{i,j}}}{\partial \phi_{i,j}}}$$

Dans laquelle K représente le paramètre de relaxation, sa valeur optimale se trouve entre 0 et 2

Et

$$F_{\phi_{i,j}} = \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Big|_{i,j} + \left[U \frac{\partial \phi}{\partial X} - \Gamma_{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right]_{i,j} + \left[V \frac{\partial \phi}{\partial Y} - \Gamma_{\phi} \frac{\partial^2 \phi}{\partial Y^2} - S_{\phi} \right]_{i,j}$$

L'équation (2.19) de la fonction de courant étant elliptique.

Les nouvelles approximations de la fonction de courant s'obtiennent à base d'une formule très similaire de la méthode N.L.O.R

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \psi_{i,j}^k - \frac{K}{[d2xo(i) + d2yo(j)]} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} d2xp2(i)\psi_{i+2,j}^k + d2xp1(i)\psi_{i+1,j}^k \\ + d2xm1(i)\psi_{i-1,j}^{k+1} + \\ d2xm2(i)\psi_{i-2,j}^{k+1} \end{array} \right) \\ + \left(\begin{array}{l} d2yp2(j)\psi_{i,j+2}^k + d2yp1(j)\psi_{i,j+1}^k \\ + d2ym1(j)\psi_{i,j-1}^{k+1} + \\ d2ym2(j)\psi_{i,j-2}^{k+1} \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Les coefficients de la variable ψ figurant dans cette expression et ceux dans les deux équations (3.17) et (3.18) sont très compliqués pour être reproduits ici, raison pour laquelle nous avons détaillé leur calculs dans l'annexe.

3.4. Composantes des vitesses

A partir de la définition de la fonction de courant, nous allons extraire les relations donnant les composantes du champ de vitesse.

Dans lesquelles:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \text{ et } V = -\frac{\partial \psi}{\partial X}$$

Il vient alors :

$$U_{i,j} = d1xp2(i)\psi_{i+2}^j + d1xp1(i)\psi_{i+1}^j + dox(i)\psi_i^j + d1xm1(i)\psi_{i-1}^j + d1xm2(i)\psi_{i-2}^j \quad (3.17)$$

$$V_{i,j} = d1yp2(j)\psi_i^{j+2} + d1yp1(j)\psi_i^{j+1} + doy(j)\psi_i^j + d1ym1(j)\psi_i^{j-1} + d1ym2(j)\psi_i^{j-2} \quad (3.18)$$

3.5. Algorithme et organigramme

La formulation $(\psi - \omega)$ exige un traitement simultané des équations : fonction de courant, vorticité, et l'énergie. Les principales étapes sont résumées selon l'algorithme suivant:

1. Définition du domaine et lecture des données.
2. Génération du maillage.
3. Introduction des conditions initiales et aux limites.
4. Début de la boucle sur le temps.
 - ❖ Résolution de l'équation de l'énergie et de la vorticité à l'aide de la méthode de RK4.
 - ❖ Calcul du champ de la fonction de courant à partir de l'équation de Laplace (2.19) par la méthode de RK4.
 - ❖ Détermination du champ de vitesse (U,V) à partir de ses relations (3.17) et (3.18)
 - ❖ Détermination de la vorticité aux parois.
 - ❖ Incrémentation du temps $(\tau + \Delta\tau)$.
 - ❖ Répétition des calculs jusqu'à l'obtention du régime établi.
 - ❖ Fin de la boucle sur le temps
5. Affichage des résultats.

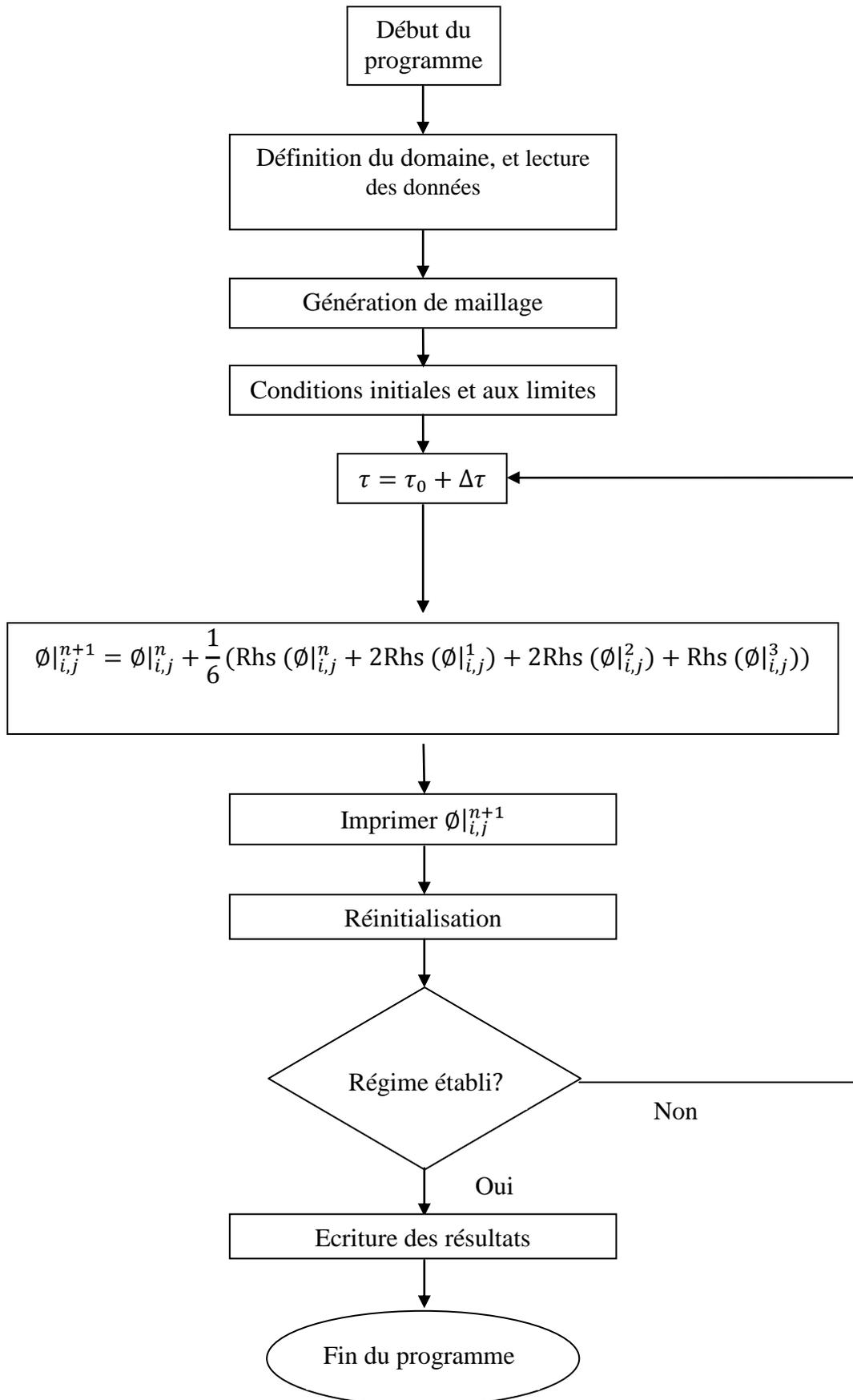


Figure 3.1 : Organigramme général de calcul.

RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.1. Introduction

Le choix du maillage, la validation du code de calcul en comparant les résultats obtenus avec ceux d'autres auteurs ainsi que l'influence des nombres de Darcy et de Richardson sur la structure de l'écoulement dans la géométrie considérée sont examinés. Finalement ce chapitre se termine par une discussion dans laquelle sont interprétés les résultats obtenus.

4.2. Maillage

Les simulations ont été effectuées en utilisant un maillage non-uniforme suivant les deux directions, horizontale et verticale comme le montre la figure IV.1. Une répartition irrégulière sous forme d'une suite géométrique des nœuds utilisée dans les zones pariétales caractérisées par des forts gradients des variables indépendantes. La partie chauffée sera maillée d'une manière dense. Dans la discrétisation spatio-temporelle, plus un maillage possède de points plus le calcul sera précis mais inversement plus il y aura des cellules plus, chaque itération du calcul sera longue. Une importance toute particulière a été portée sur la taille de la plus petite maille afin d'obtenir une concordance entre la précision et le temps de calcul.

4.3. Test d'indépendance du maillage

Afin d'assurer l'indépendance du maillage pour ce volet de l'étude, plusieurs essais numériques exprimés par le nombre de Nusselt moyen illustré dans le (tableau 4.1) ont été réalisés pour trois valeurs du nombre de Darcy: $Da = 10^{-3}$, $Da = 10^{-2}$, et $Da = 10^{-1}$ sur quatre tailles de grille différentes 41x41, 61x61, 81x81 et 101x101. Pour une grille de 101x101 les valeurs obtenues de ce nombre sont en très bonne concordance avec ceux calculées par Kumar DS et al(45). Nous avons opté alors pour un maillage de 101x101 pour tous les calculs numériques concernant ce travail.

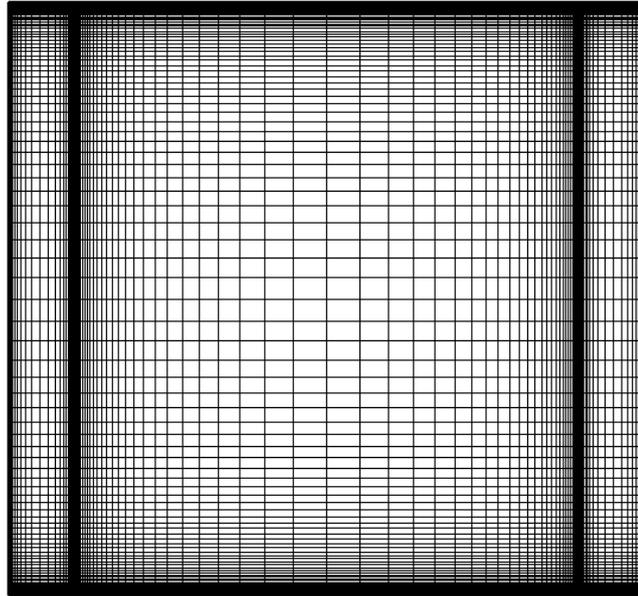


Figure 4.1 : Schémas du maillage de la cavité.

4.4. Validation du code de calcul

Pour vérifier l'exactitude de la technique actuelle, une comparaison des résultats obtenus avec certains travaux cités dans la littérature a été effectuée. Pour cette étude spécifique de la convection mixte laminaire dans un massif poreux ayant un gradient de température vertical stable du problème d'Iwatsu R(46), Waheed M(47) et Khanafer KM(48), la comparaison a porté sur les valeurs minimale et maximale des deux vitesses horizontale et verticale respectivement au long du plan médian (voir tableau 4.2) pour un nombre de Richardson $Ri = 10^{-2}$ et on obtient un écart inférieur à 3.83%. Par ailleurs, le taux de chaleur moyen au niveau de la partie chauffée a été testé avec les travaux précédents et ceux de Kumar DS et al(45). En outre, les profils de température et de vitesses sur le plan médian vertical, ainsi que les lignes de courant et de température. On résume les différentes comparaisons effectuées dans les (tableau 4.3 et 4.4), la figure 4.2 et la figure 4.3 respectivement.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau. 4.1

L'effet du raffinement du maillage sur le nombre de Nusselt moyen pour différents nombres de Darcy

Nombre de Darcy	Grille			
	41x41	61x61	81x81	101x101
$Da=10^{-3}$	5.221	6.272	6.888	7.210
$Da=10^{-2}$	12.843	14.681	15.323	15.131
$Da=10^{-1}$	14.882	14.883	15.472	16.119

Tableau. 4.2

Comparaison des valeurs minimale et maximale des deux vitesses horizontale et verticale respectivement au long du plan médian entre la présente solution et celle d'Iwatsu R(46), Waheed M(47) et Khanafer KM(48) pour $Gr = 100$ et $Re = 100$

Parameter	Present (\overline{Nu})	Iwatsu	Khanafer	Waheed	Ecart
U_{min}	-0.2169	-0.2037	-0.2122	-0.21198	2.21 %
U_{max}	1.000	1.000	1.000	1.000	
V_{min}	-0.2354	-0.2448	-0.2506	-0.251027	3.83 %
V_{min}	0.1761	0.1699	0.1765	0.177125	0.22%

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau. 4.3

Comparaison du nombre de Nusselt moyen entre le présent travail et celui d'Iwatsu R(46), Waheed M(47) et Khanafer KM(48) pour $Gr = 100$

Parameter	Present (\overline{Nu})	Iwatsu	Khanafer	Waheed	Ecart
$Re=100$	1.94	1.94	2.01	2.03	0.99 %
$Re=400$	3.85	3.84	3.91	4.02	2.81 %

Tableau. 4.4

Le nombre de Nusselt moyen au niveau de la partie chauffée entre la présente étude et celui obtenu par Kumar DS et al(45)

Darcy number	Present (\overline{Nu})	D.S Kumar	Ecart
$Da=10^{-3}$	7.210	7.181	0.40 %
$Da=10^{-2}$	15.131	15.146	0.09 %
$Da=10^{-1}$	16.119	16.008	0.69 %

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

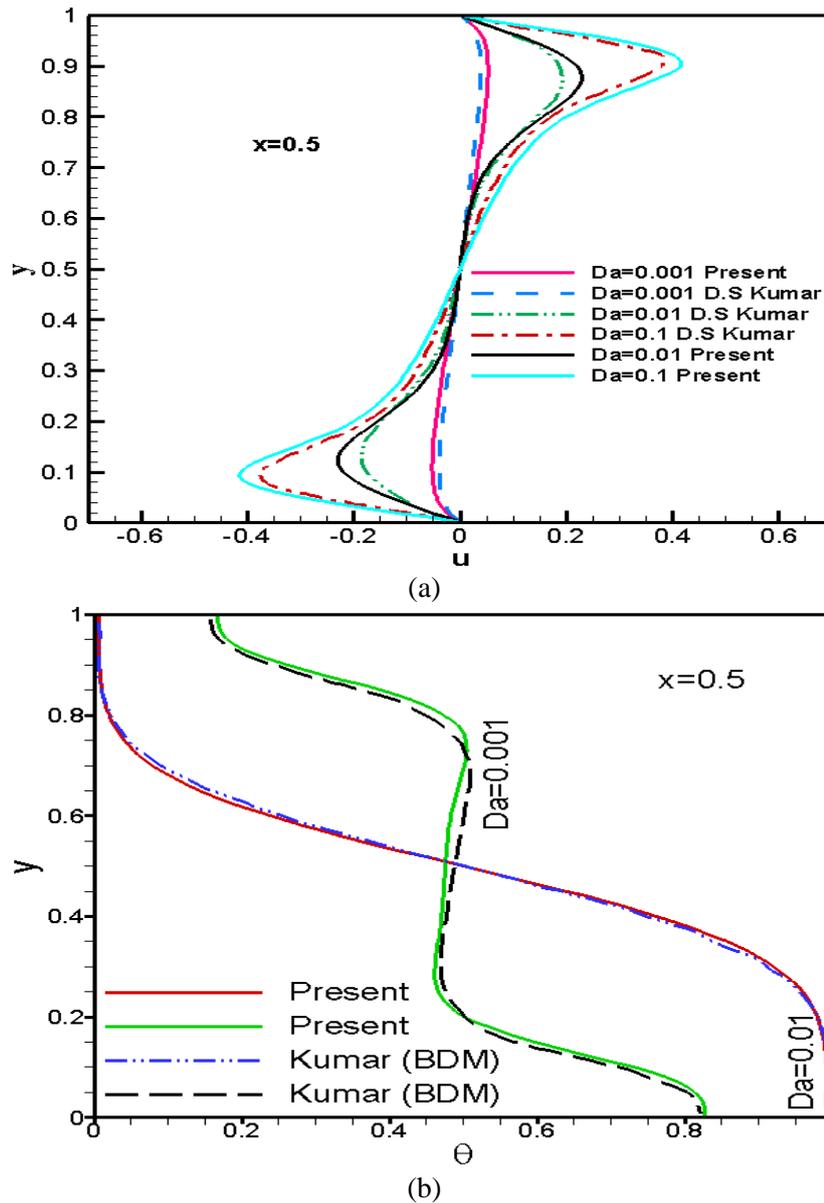


Figure 4.2 : (a) Profile de vitesse horizontale et (b) Profile de température au long du plan médian à diverses valeurs de Darcy pour $Ri=10^{-2}$, $Gr=10^4$, et $\phi=0.9$

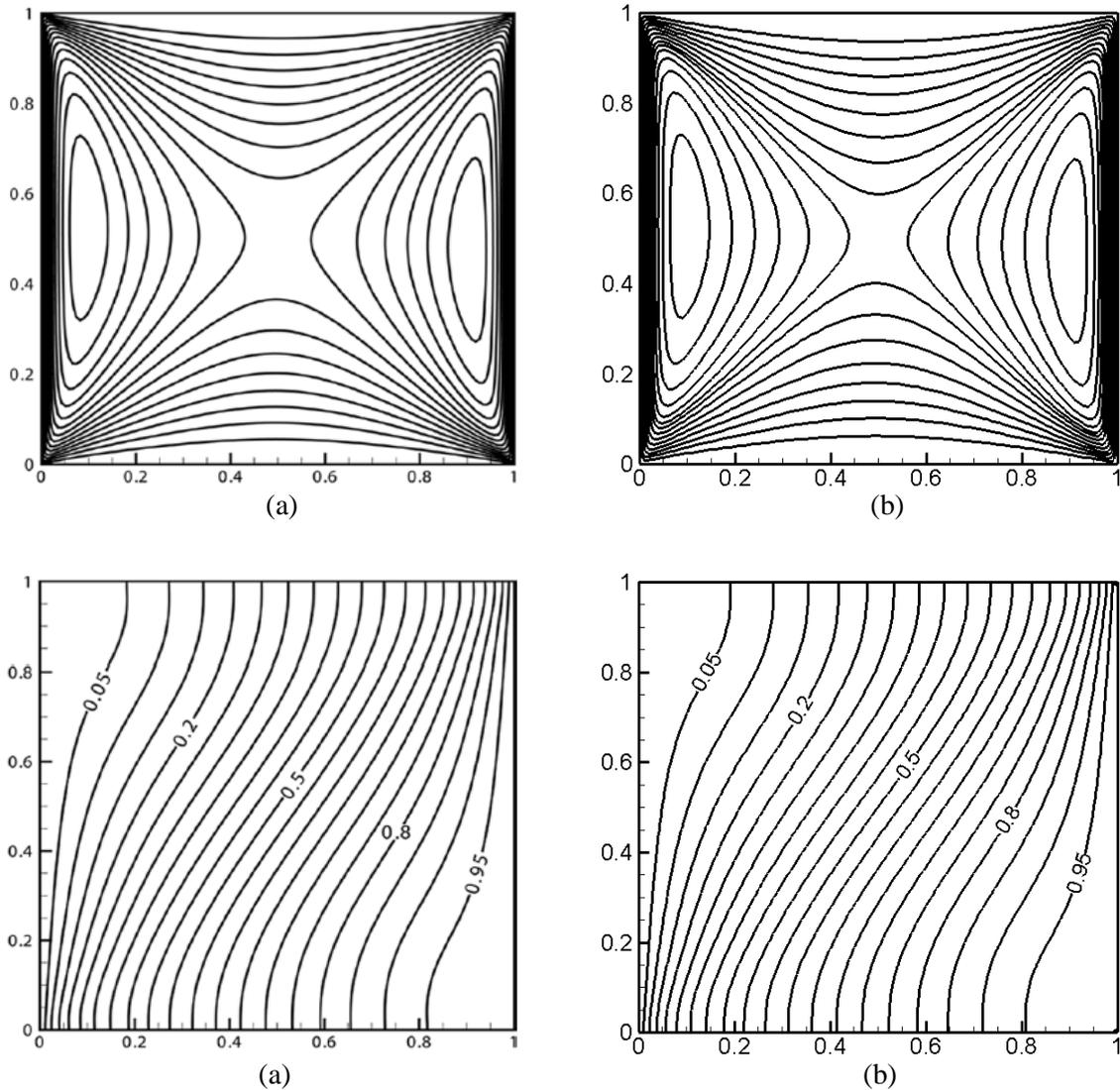


Figure 4.3 : Comparaison des lignes de courant et des isothermes entre (a) modèle de Brinkman-Forchheimer Darcy de Kumar DS et al(45)et (b) le présent travail pour $Da=0.1$, $Ri=10^{-2}$, $Gr=10^2$ et $\phi=0.9$

Finalement et en guise de conclusion, on voit bien que les résultats comparés présentent une excellente concordance, les erreurs observées variant entre 0.09 et 3.83%.

4.5. Résultats et discussion

Le processus de calcul associé a été développé en considérant l'air comme fluide de notre travail avec un nombre de Prandtl $Pr = 0.71$ et nous avons gardé le nombre de Reynolds comme fixé à 100 tout au long de l'étude. La longueur adimensionnelle de la source de chaleur est égale à 0.8, la valeur du nombre de Darcy varie de 10^{-3} à 10^{-1} avec une porosité de 0.9.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

La direction de mouvement des parois verticales est de manière opposée au courant due à la pure flottabilité, de sorte que des modèles d'écoulement intéressants se développent. Une bifurcation du régime de l'écoulement a été apparait pour une valeur critique du nombre de Richardson varie de 11.76 à 11.77 pour $Da=0.1$. Les schémas de l'écoulement et les distributions de température sont illustrés en traçant les contours des lignes de courant, des isothermes et de Nusselt moyen (\overline{Nu}) respectivement dans les figures correspondantes: figures 4.4 (a), 4.4 (b), 4.4 (c), 4.4 (d), 4.4 (e), 4.4 (f), 4.4 (g), 4.5 (h), figures 4.5 (a), 4.5 (b), 4.5 (c), 4.5 (d), 4.5 (e), 4.5 (f), 4.5 (g), 4.5 (h), figures 4.6 (a), 4.6 (b), 4.6 (c) et figure 4.7.

Les contours de courant dans les figures 4.4 (a), 4.4 (b), 4.4 (c), 4.4 (d), 4.4 (e), 4.4 (f), 4.4 (g) et 4.4 (h) montrent deux cellules en circulation dont lesquelles celle qui est en rotation horaire est induite par la force de cisaillement près de la paroi gauche et l'autre cellule qui est dans le sens inverse près de la paroi droite.

D'après cette figure, nous remarquons que les lignes de courant sont presque identiques pour différents nombres de Richardson avec une valeur fixée de Darcy ($Da = 10^{-3}$), et comme la distribution de température imposée sur la paroi inférieure de l'enceinte, le transfert de chaleur est renforcé, mais pour des Darcy supérieures à cette valeur, c'est-à-dire que pour $Da = 10^{-2}$ et $Da = 10^{-1}$, la structure de l'écoulement change ce qui signifie que le fluide est entièrement convecté pour des Darcy plus élevés.

Selon les figures 4.5 (a), 4.5 (b), 4.5 (c), 4.5 (d), 4.5 (e), 4.5 (f), 4.5 (g) et 4.5 (h), nous observons aussi que les isothermes sont non-symétriques et compressés vers les côtés verticaux, ce fait est dû à l'effet de dominance de la convection.

Si $Da = 0.001$, les lignes de courant se rapprochent près des parois gauche et droite formant ainsi des régions de fort gradient de vitesse.

Pour $Ri \geq 4$ et $Da \geq 0.01$, un changement remarquable dans la structure de l'écoulement. Plus la paire de cellules principale deux cellules plus faibles sont formées près des parois latérales. Lorsque ces deux parois se déplacent vers le haut, l'épaisseur de ces couches de cisaillement augmente de bas en haut.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

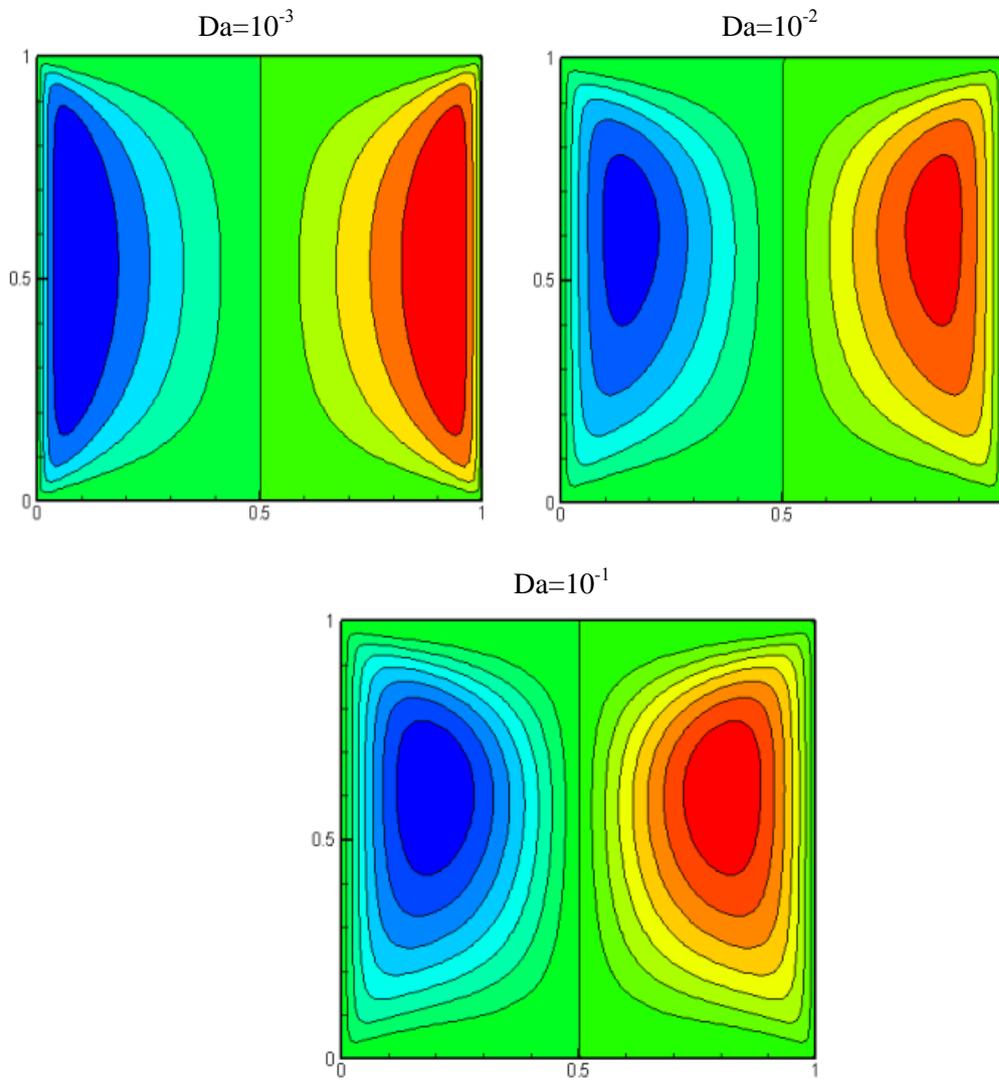


Figure 4.4 (a): Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=0.5$

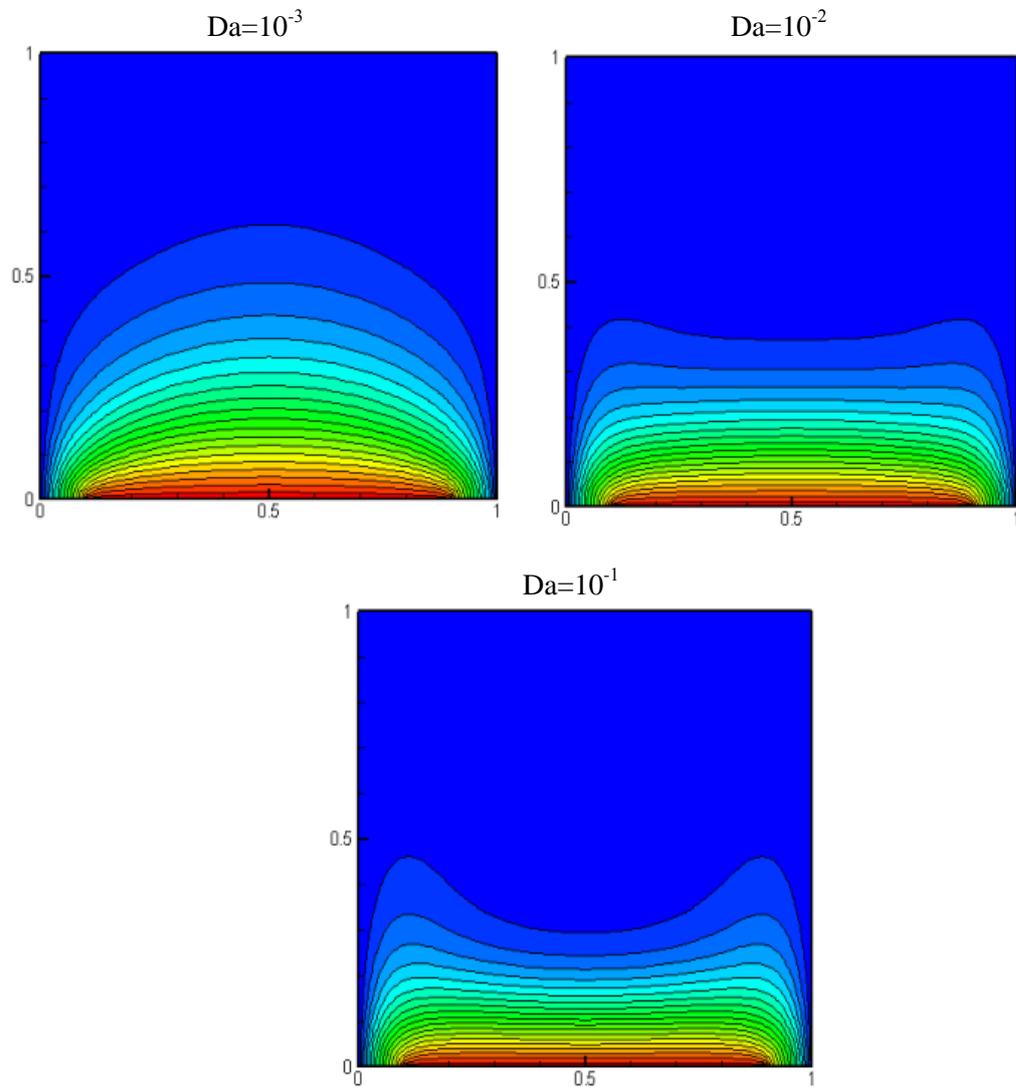


Figure 4.5 (a): Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=0.5$

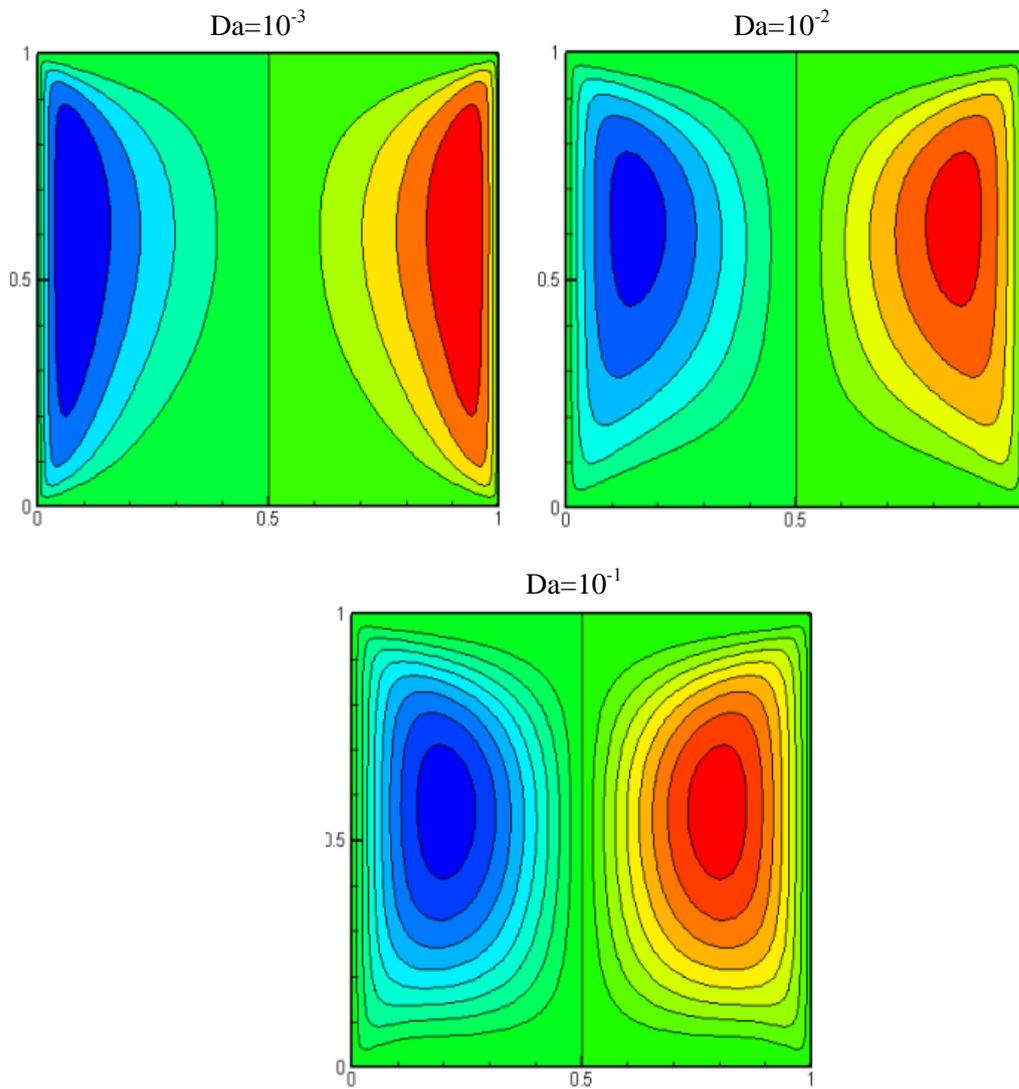


Figure 4.4 (b): Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=4$

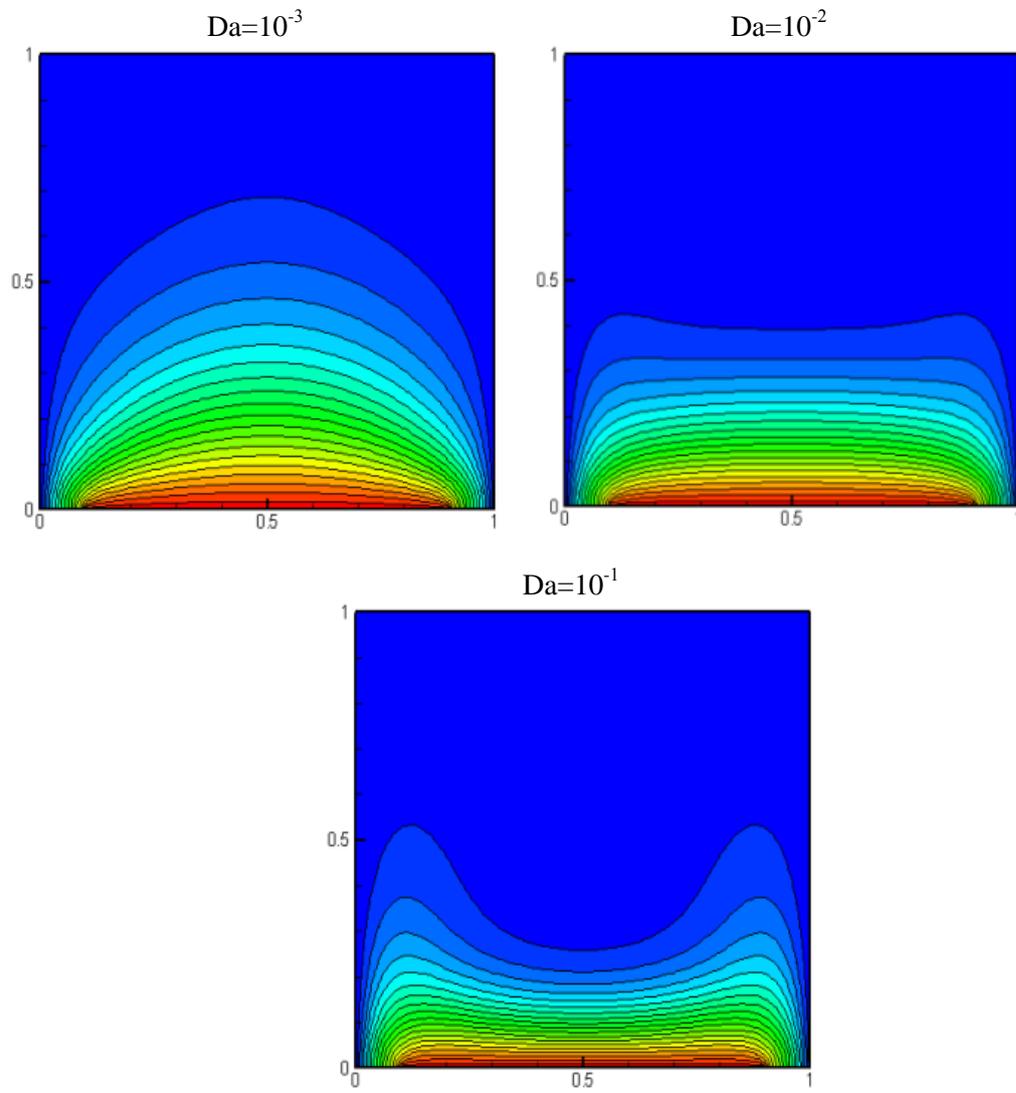


Figure 4.5 (b): Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=4$

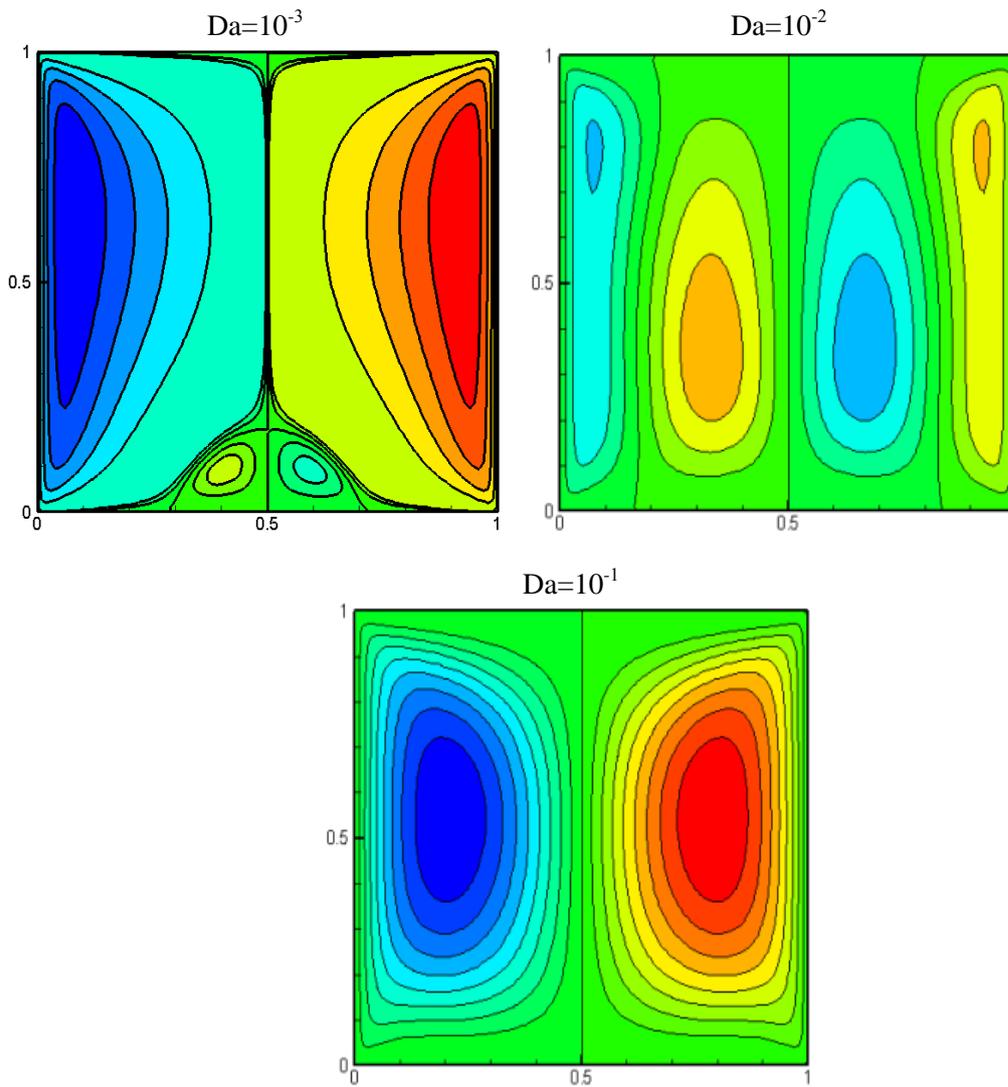


Figure 4.4 (c): Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=4.99$

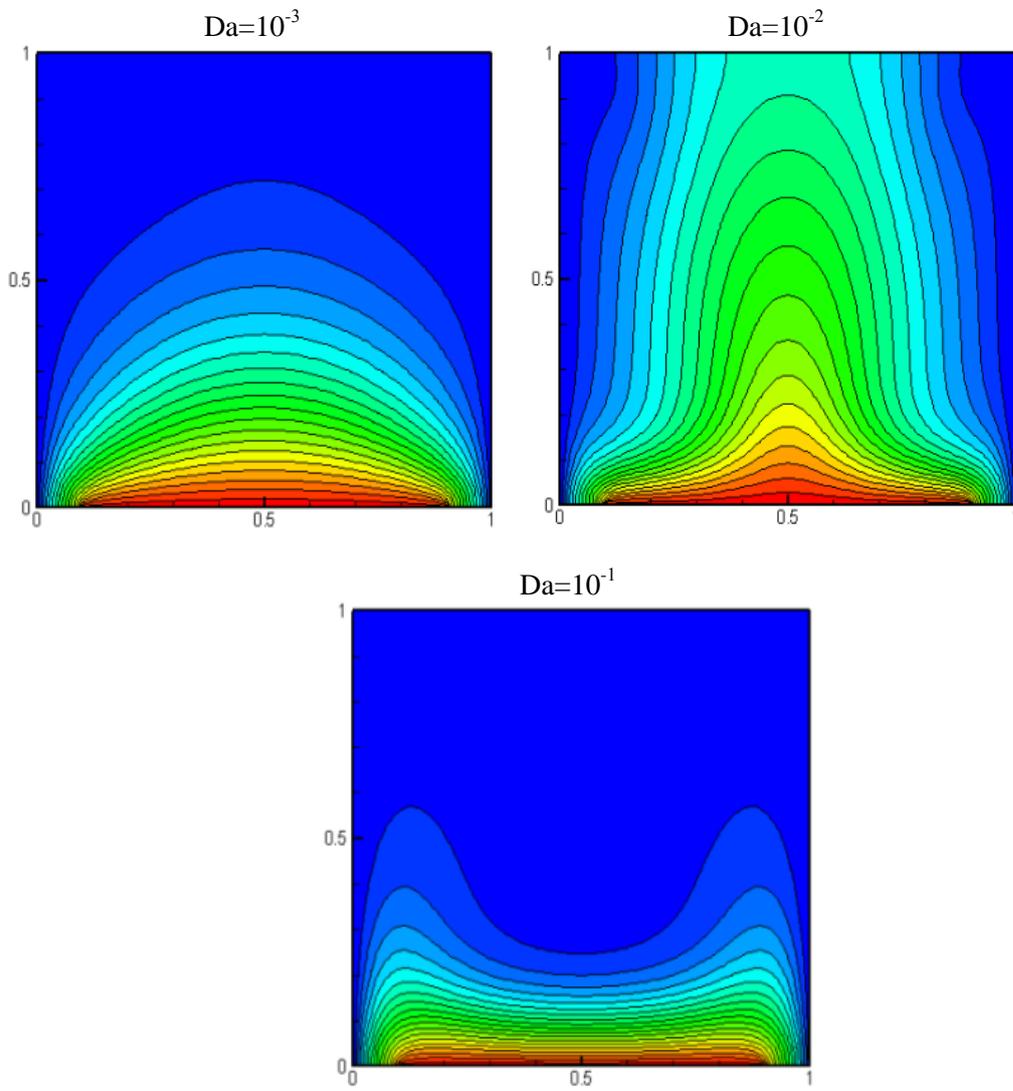


Figure 4.5 (c): Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=4.99$

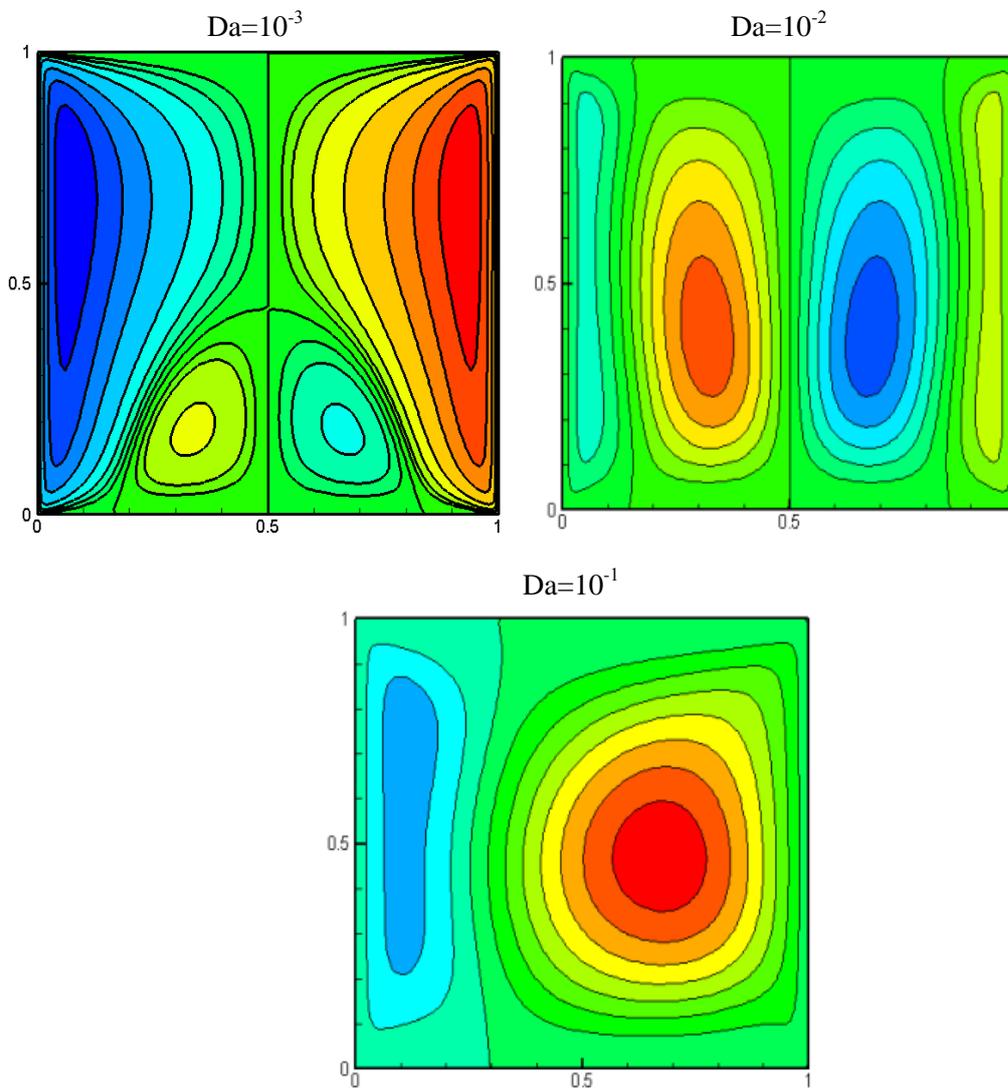


Figure 4.4 (d): Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=5$

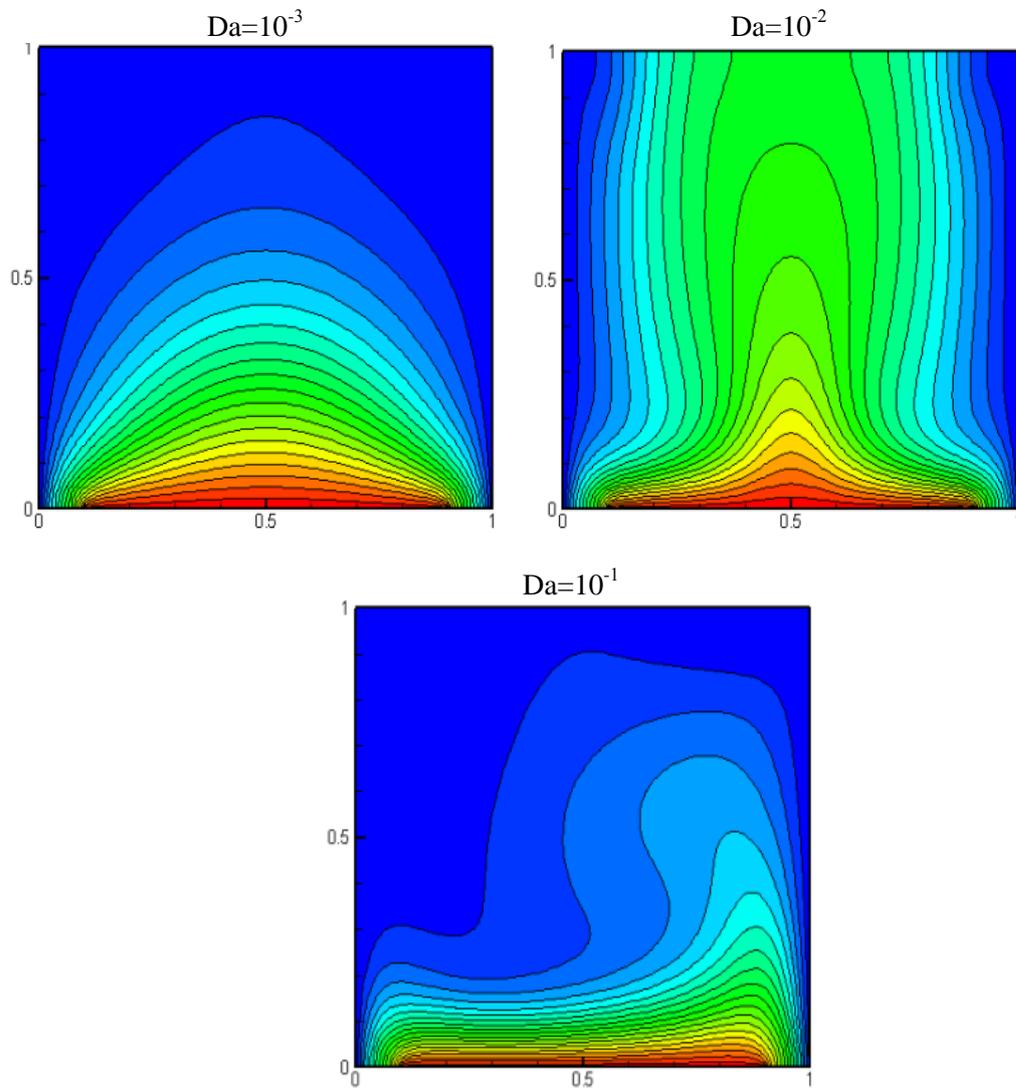


Figure 4.5 (d): Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=5$

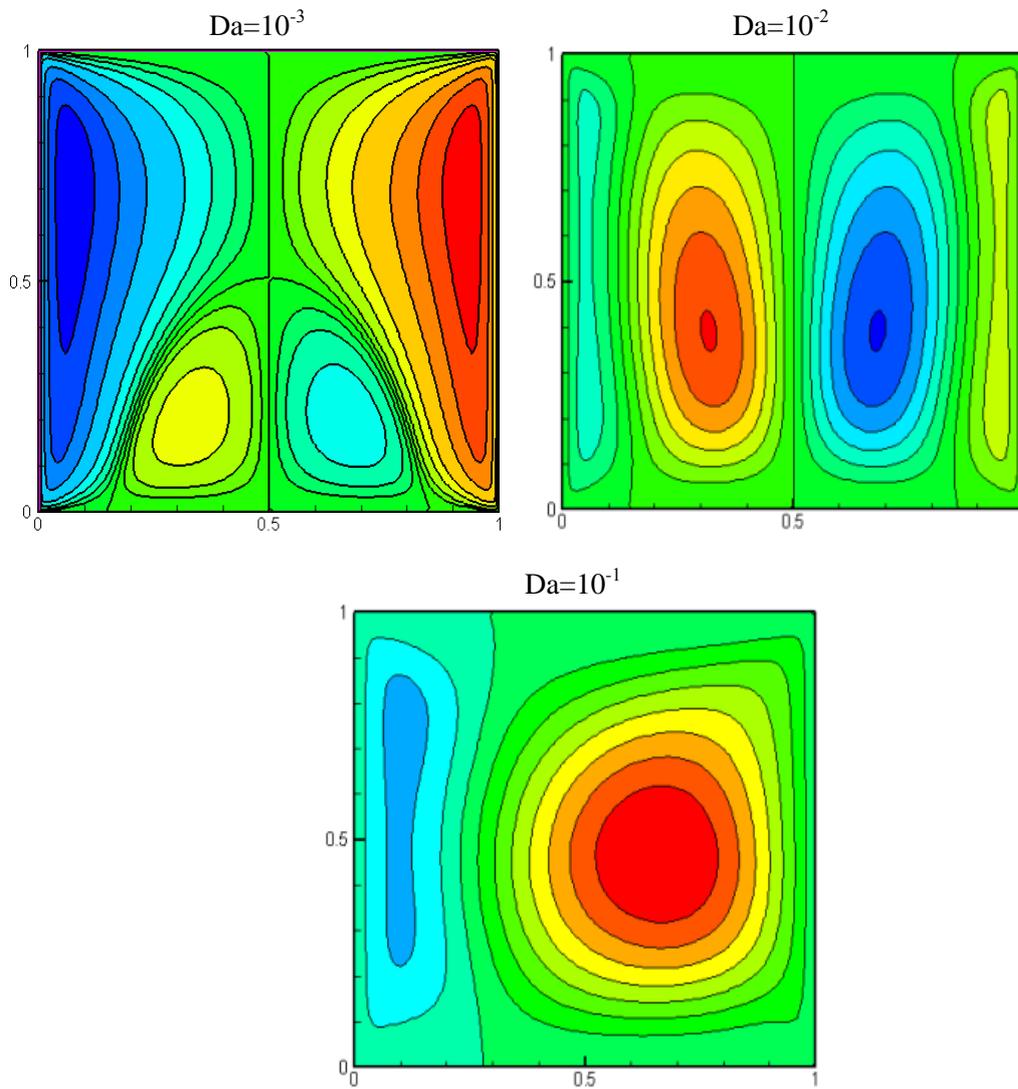


Figure 4.4 (e): Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=7.5$

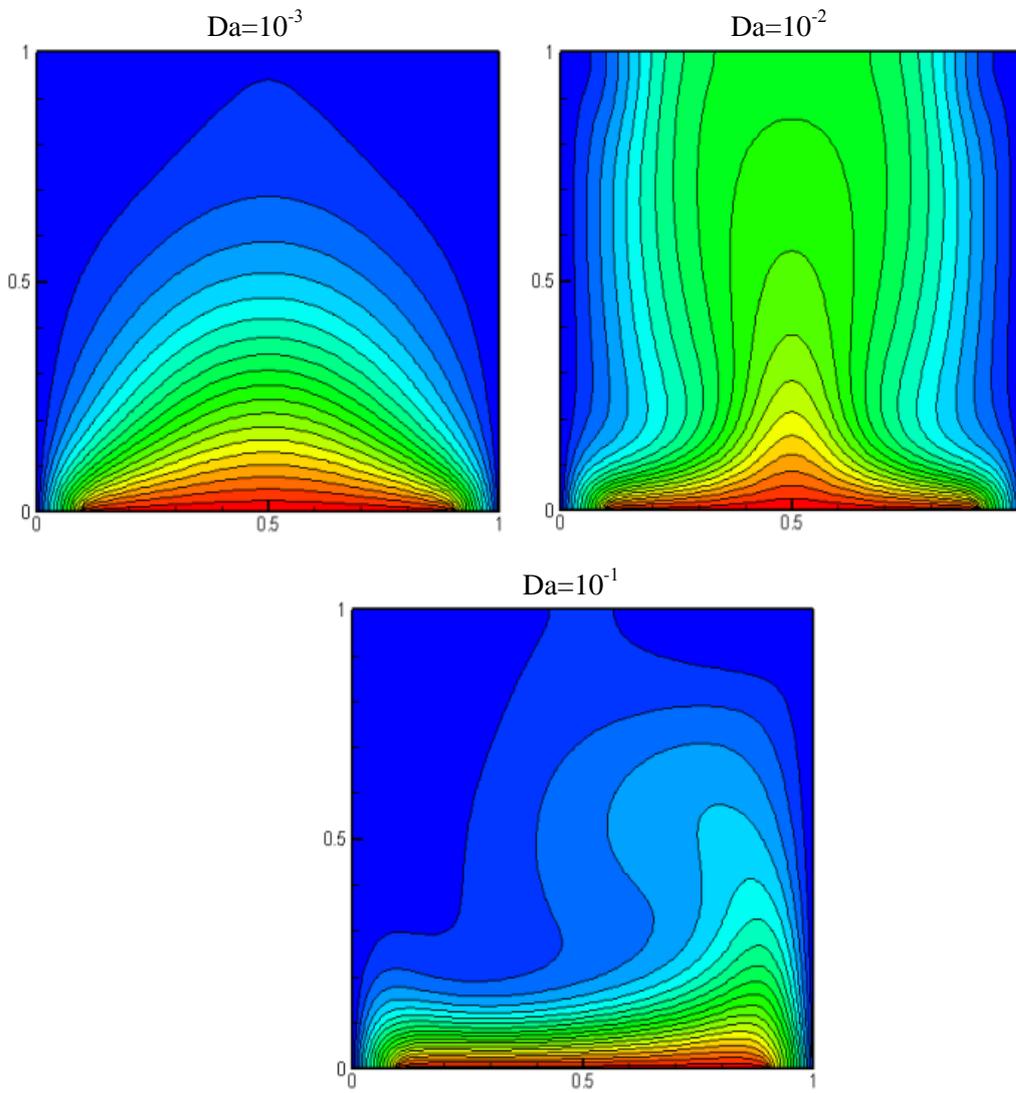


Figure 4.5 (e): Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=7.5$

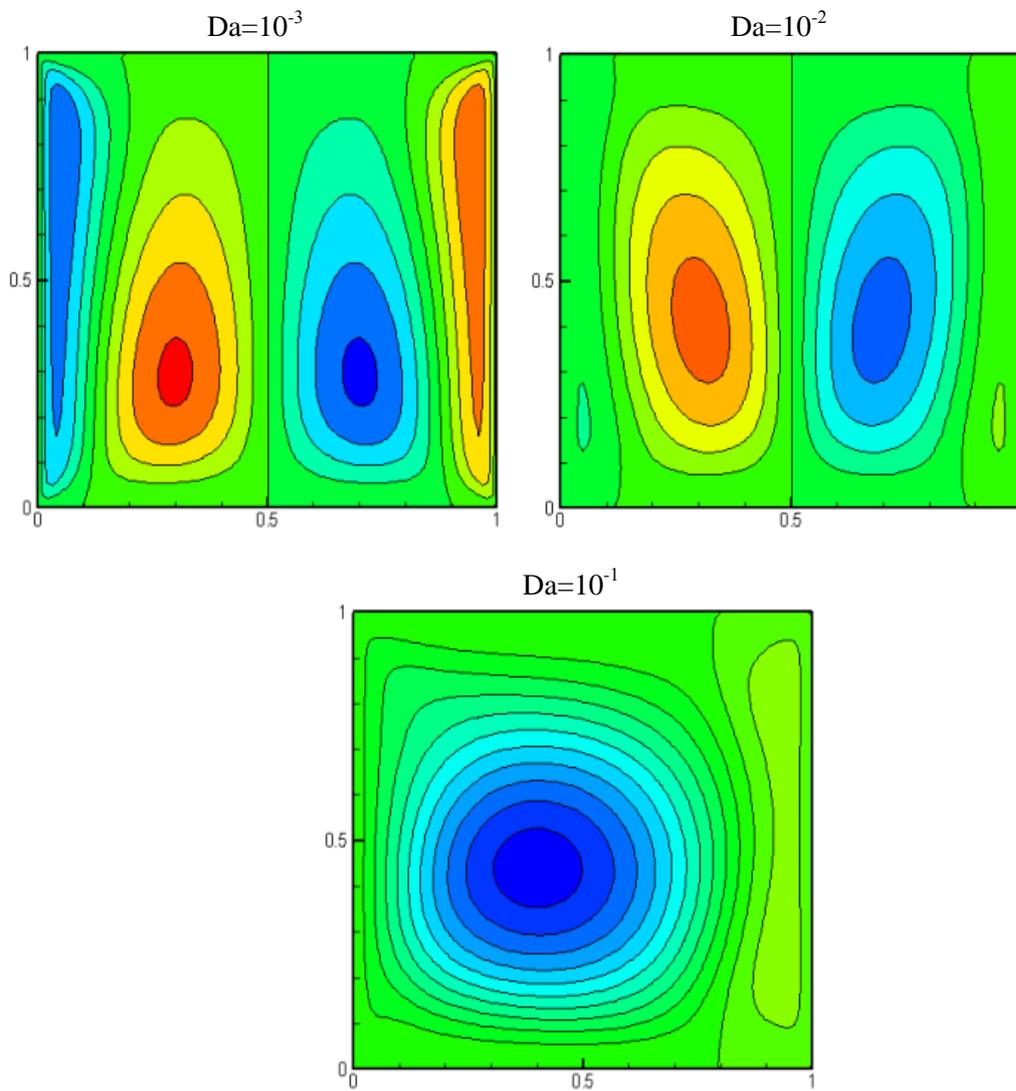


Figure 4.4 (f): Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=10$

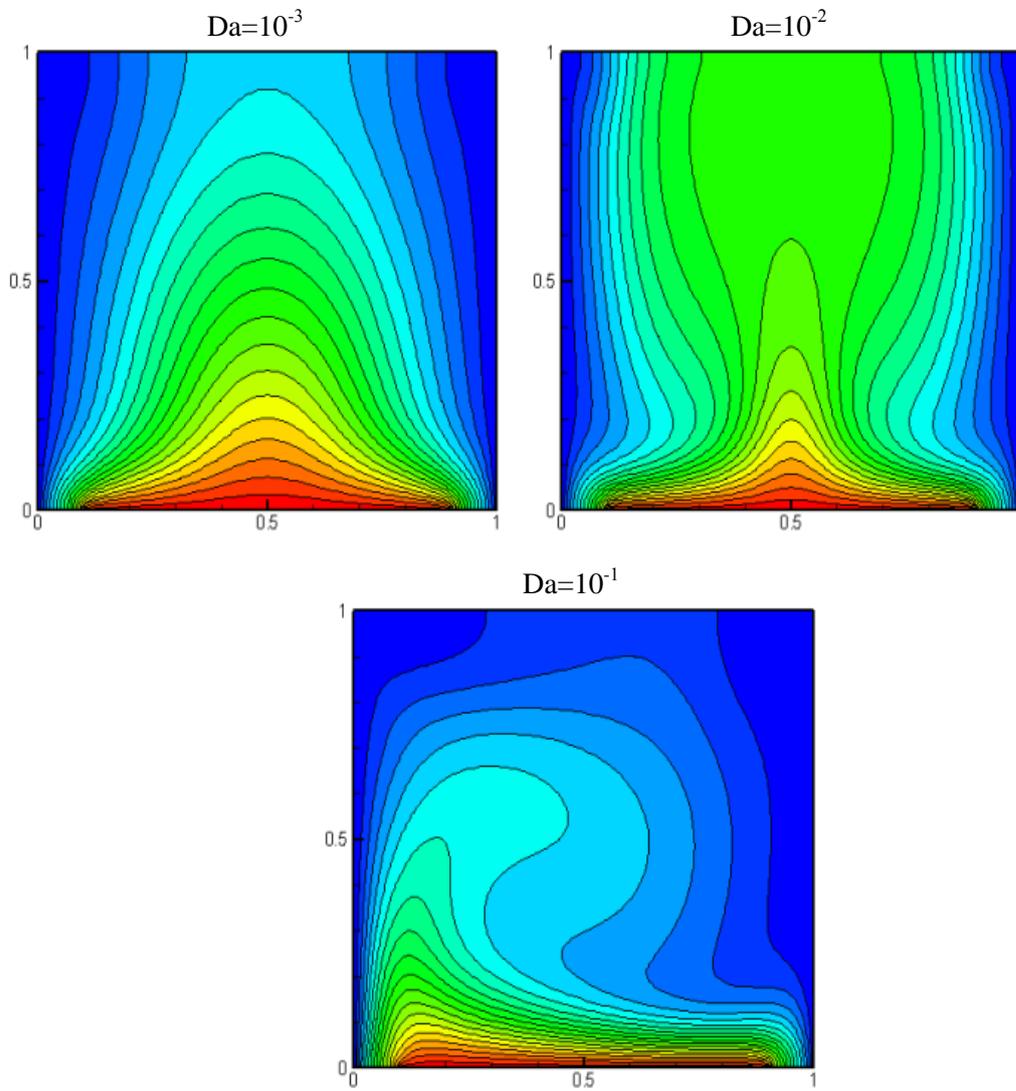


Figure 4.5 (f): Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=10$

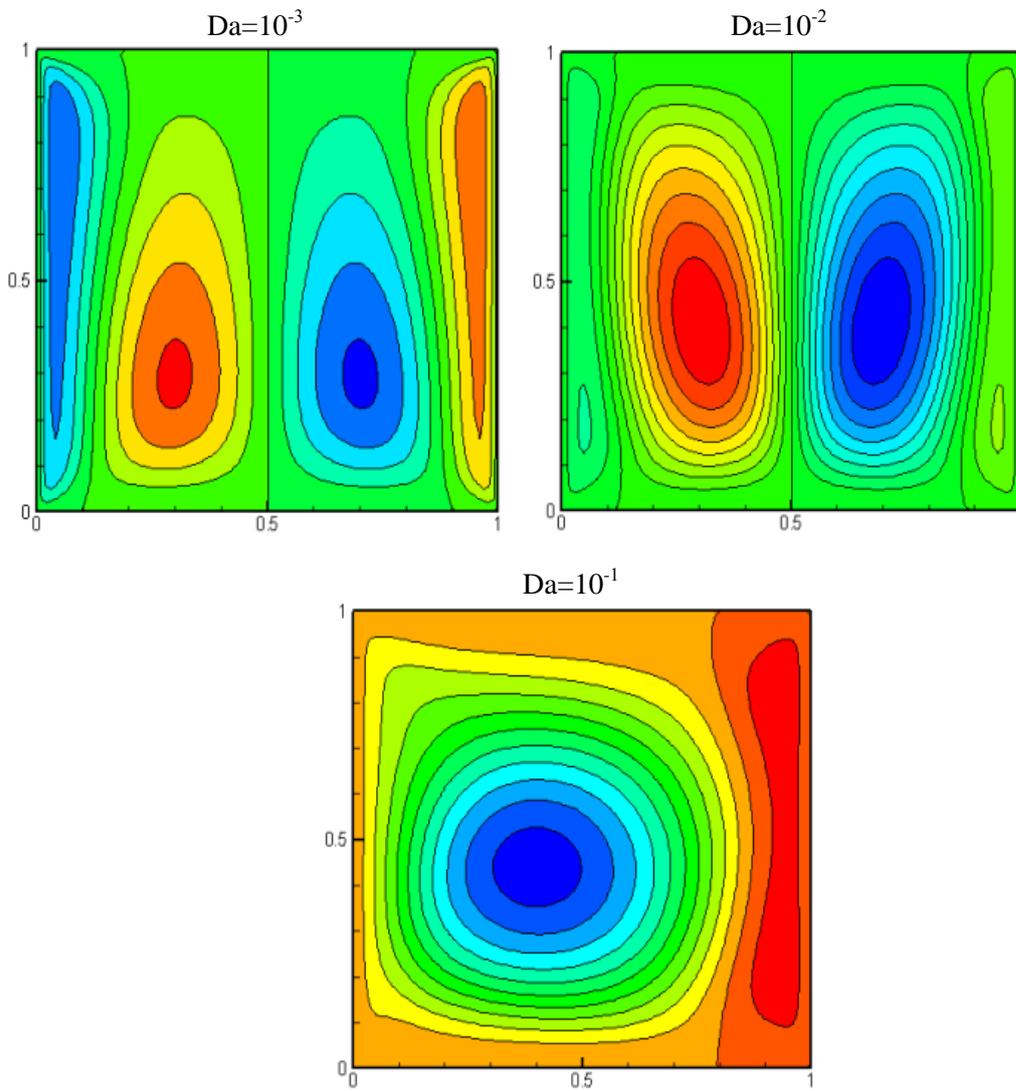


Figure 4.4 (g): Lignes de courant pour différents nombres de Darcy avec $Ri=11.76$

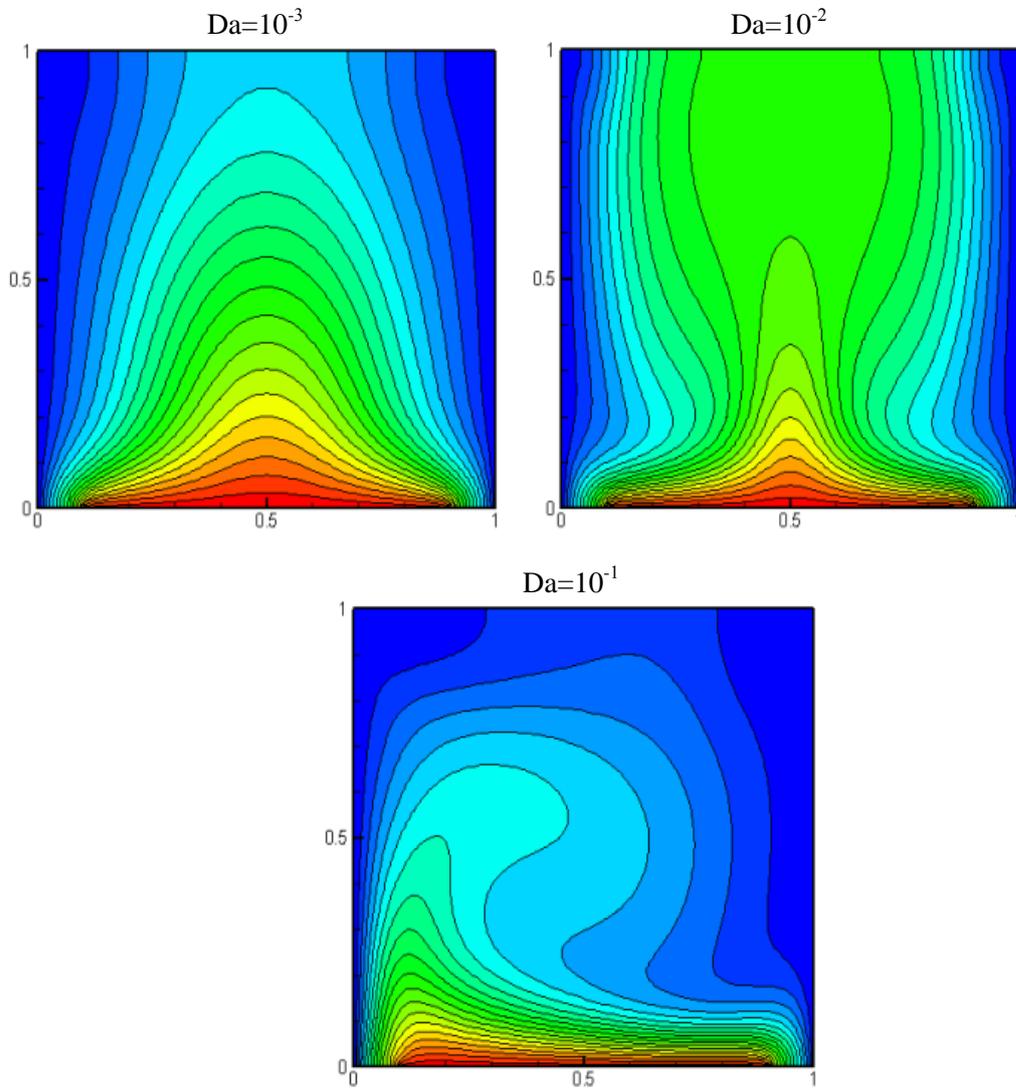


Figure 4.5 (g): Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=11.76$

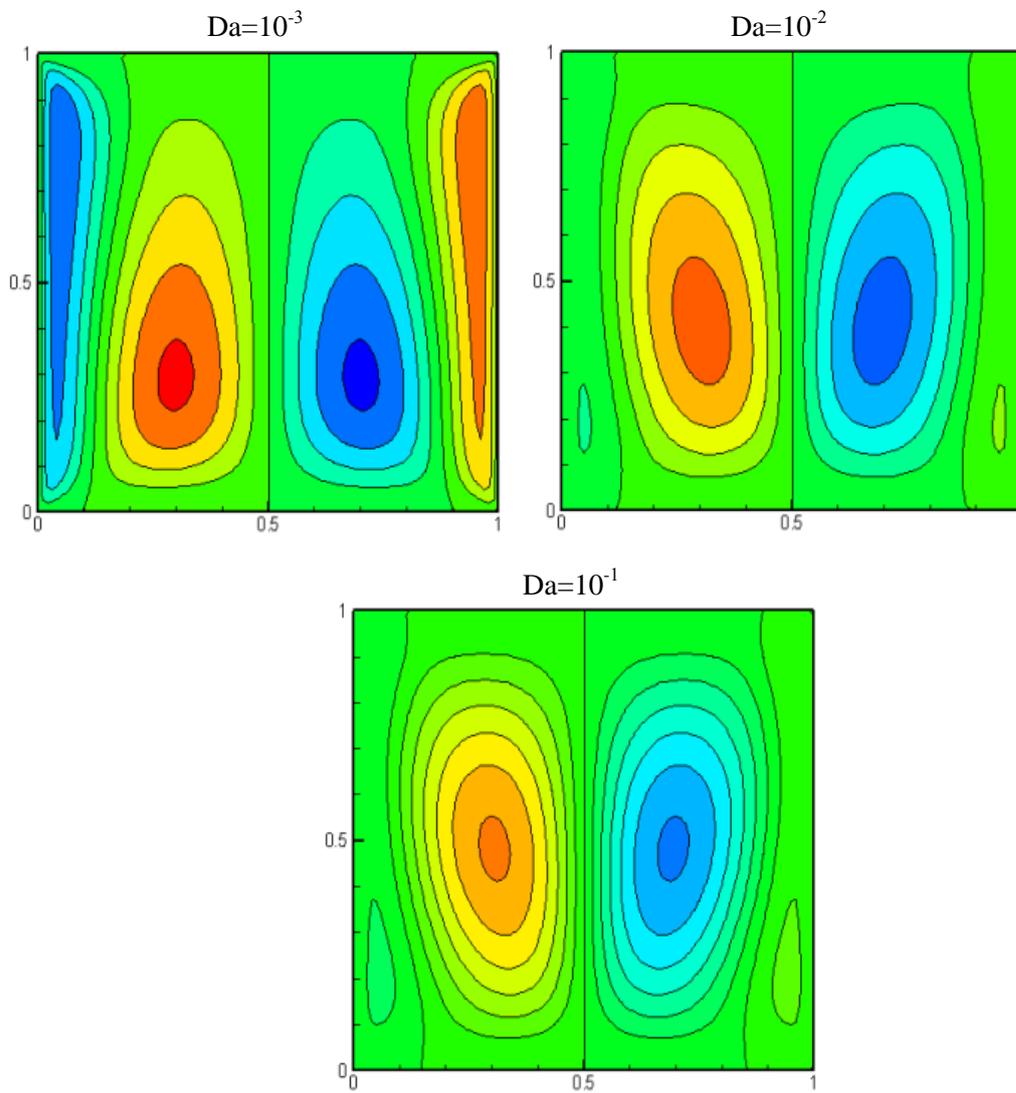


Figure 4.4 (h): Lignes de courant pour différents nombres de Darcy $Ri=11.77$

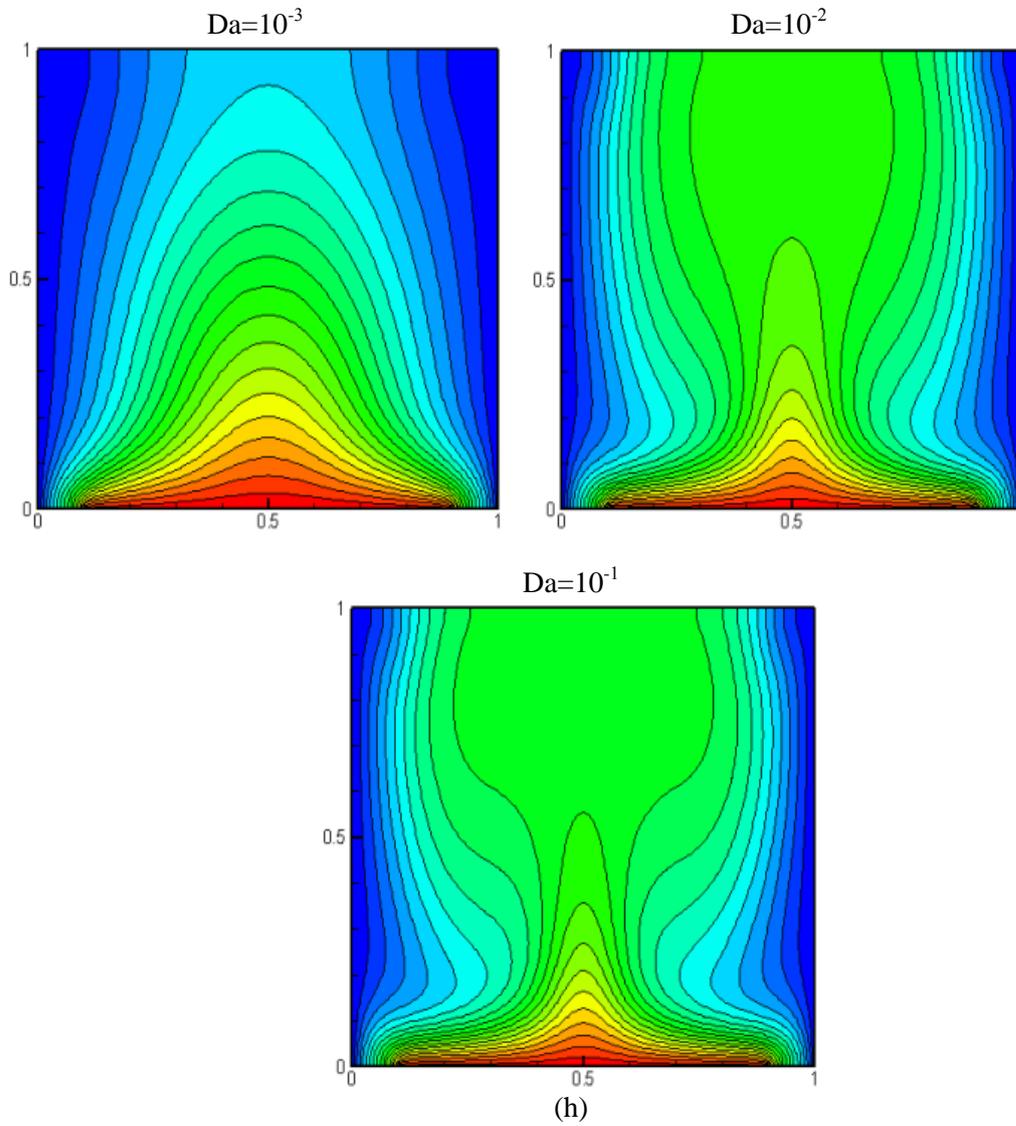


Figure 4.5 (h): Isothermes pour différents nombres de Darcy avec $Ri=11.77$

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

4.5.1. Nombre de Nusselt moyen

Pour $Da = 10^{-3}$, l'évolution temporelle du taux de transfert thermique représentée sur la figure 4.6 (a) montre que ce nombre décroît brusquement pendant tous les premiers instants, ensuite il diminue régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe, mais d'après la figure 4.6 (b) et la figure 4.6 (c) où $Da = 10^{-2}$ et $Da = 10^{-1}$ respectivement, nous avons remarqué que l'augmentation des nombres de Darcy ainsi que de Richardson ont pour conséquence d'augmenter le Nusselt moyen. D'une manière générale, ce nombre passe par des oscillations dont leurs intensités sont différentes pendant les tous premiers instants, ensuite il diminue régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe.

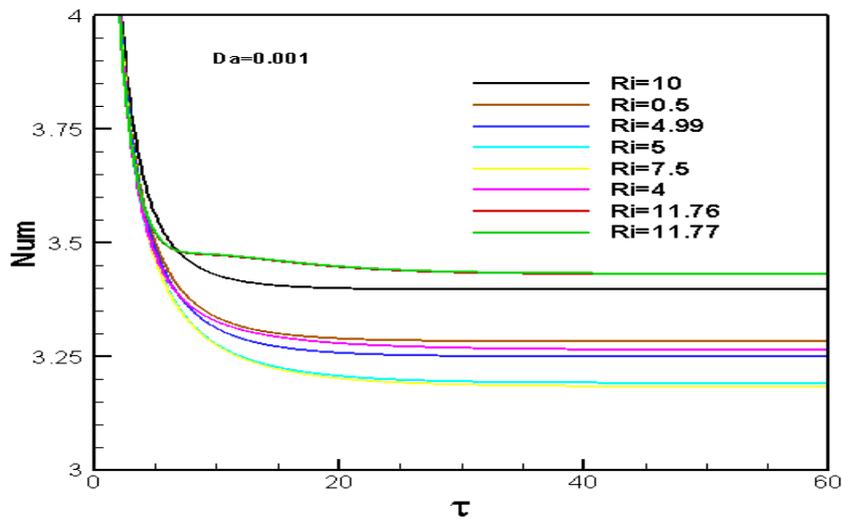


Figure 4.6 (a): Taux de transfert de chaleur moyen avec le temps pour Darcy $Da=10^{-3}$

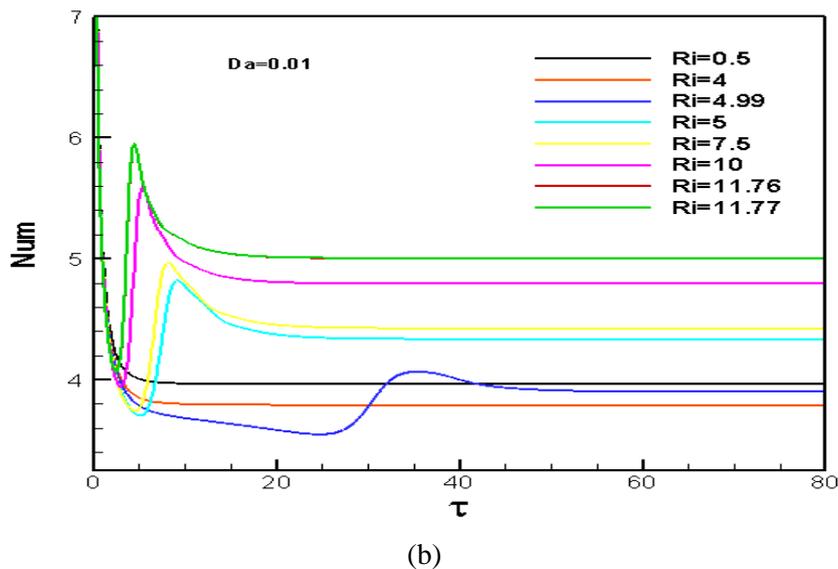
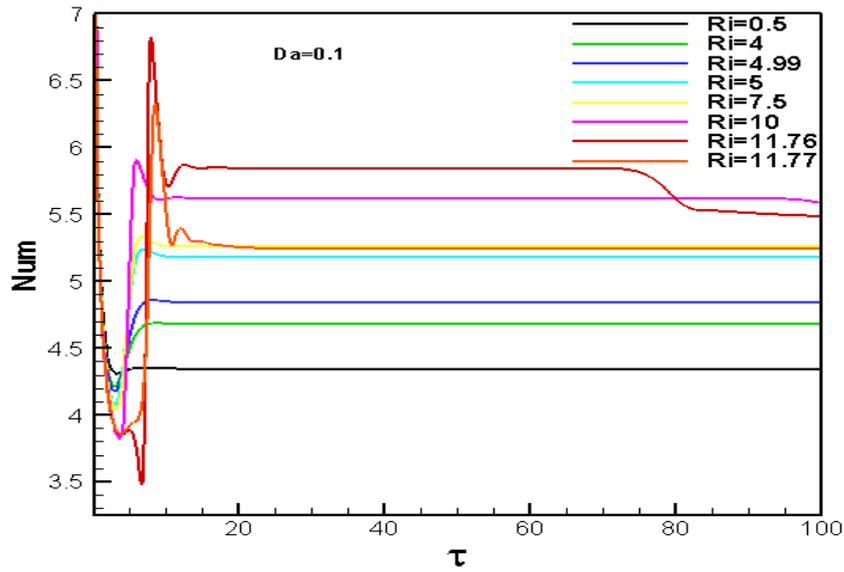


Figure 4.6 (b): Evolution du taux de transfert thermique moyen pour Darcy $Da=10^{-2}$



(c)

Figure 4.6 (c) :Nusselt moyen avec le temps dans le cas: $Da=10^{-1}$

4.5.2. Effet du nombre de Richardson sur le transfert thermique

Afin d'étudier le phénomène de transfert de chaleur dans l'enceinte, l'évolution temporelle du taux de transfert thermique le long de la partie chauffée est représentée sur la figure 4.7, Des principaux fluctuations tout au long une durée de temps comprise entre 0 et 13 (figure 4.7 (a)). Après cette instabilité initiale, ce paramètre décroît régulièrement comme l'indique la figure 4.7 (b) afin de se stabiliser à une valeur fixe ($\overline{Nu} = 5.239$) pour un nombre de Richardson $Ri=11.77$, tandis que pour $Ri=11.76$, l'écoulement présente un changement significatif dans son comportement qui se traduit par la transition de la stabilisation initiale de ($\overline{Nu} = 5.8459$) à une autre de ($\overline{Nu} = 5.4706$).

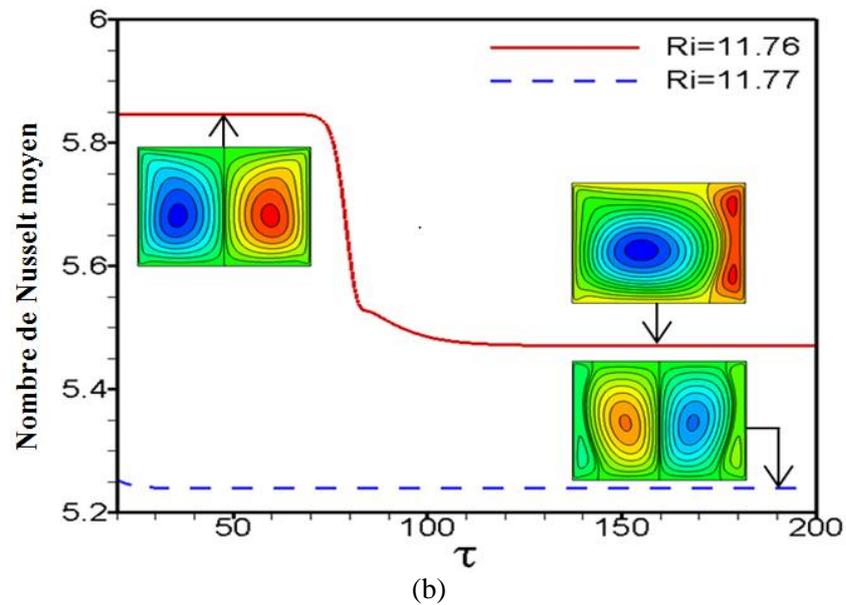
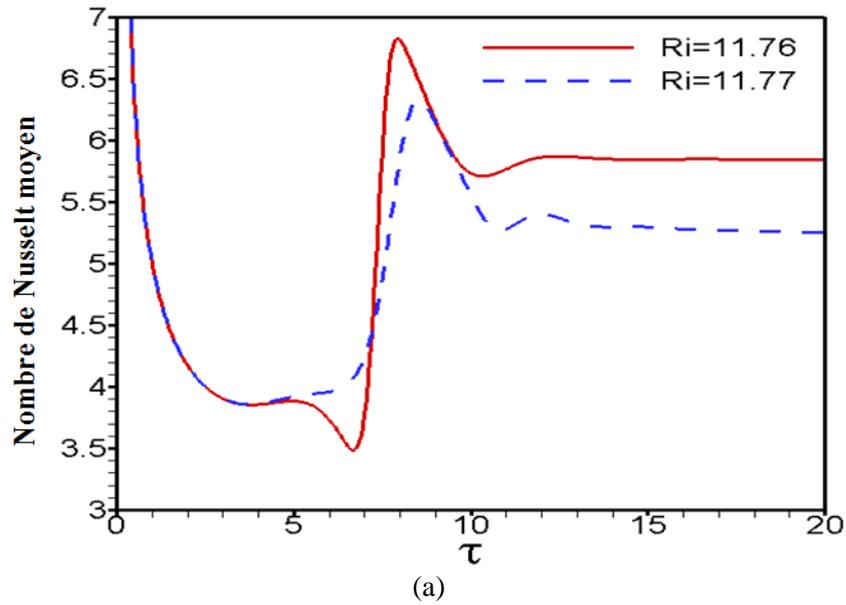


Figure 4.7: Evolution temporelle du Nusselt moyen pour
(a) $0 \leq \tau \leq 20$ et (b) $20 \leq \tau \leq 200$

4.5.3. Effet du paramètre de la convection mixte sur le comportement de l'écoulement

Concernant les deux valeurs critiques de Richardson considérées dans cette étude, les figures 4.8 (a) et (b) montrent les instantanés des contours de la fonction de courant en haut et de la température en bas, leur analyse indique qu'au tout début ($\tau \leq 2.5$) l'écoulement est caractérisé par deux cellules opposées générées par le mouvement des parois de la cavité. Ensuite, il apparaît deux autres cellules plus faibles juste au-dessus de

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

la partie chauffée qui se développent progressivement jusqu'à environ $\tau = 3.5$. C'est à partir de cet instant que les deux écoulements se distinguent. De plus, il vient de mentionner que pour Ri égale à 11.76, ces deux cellules secondaires commencent à se rétracter vers les coins en bas de la cavité sous l'effet des cellules principales créées par le mouvement des parois verticales afin de se disparaître entièrement à $\tau = 7.5$ laissant place au développement de deux cellules symétriques. La chaleur est transférée d'une manière équitable par les parois latérales. Cette symétrie va disparaître progressivement aux environs de $\tau = 3.5$. Par contre, lorsque le nombre de Richardson augmente seulement d'un centième pour qu'il soit égale à 11.77, l'écoulement se caractérise par deux cellules principales qui sont presque symétriquement opposées par rapport à l'axe vertical de la cavité, lesquelles induites par les forces de convection naturelle résultant de l'élément de chauffage située en bas. Au fur et à mesure que le temps passe, ces deux cellules tendent à confiner les deux autres dues aux forces de cisaillement vers les parois verticales. Dans ce cas toute la chaleur de la partie chauffée est transférée symétriquement au centre de la cavité.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

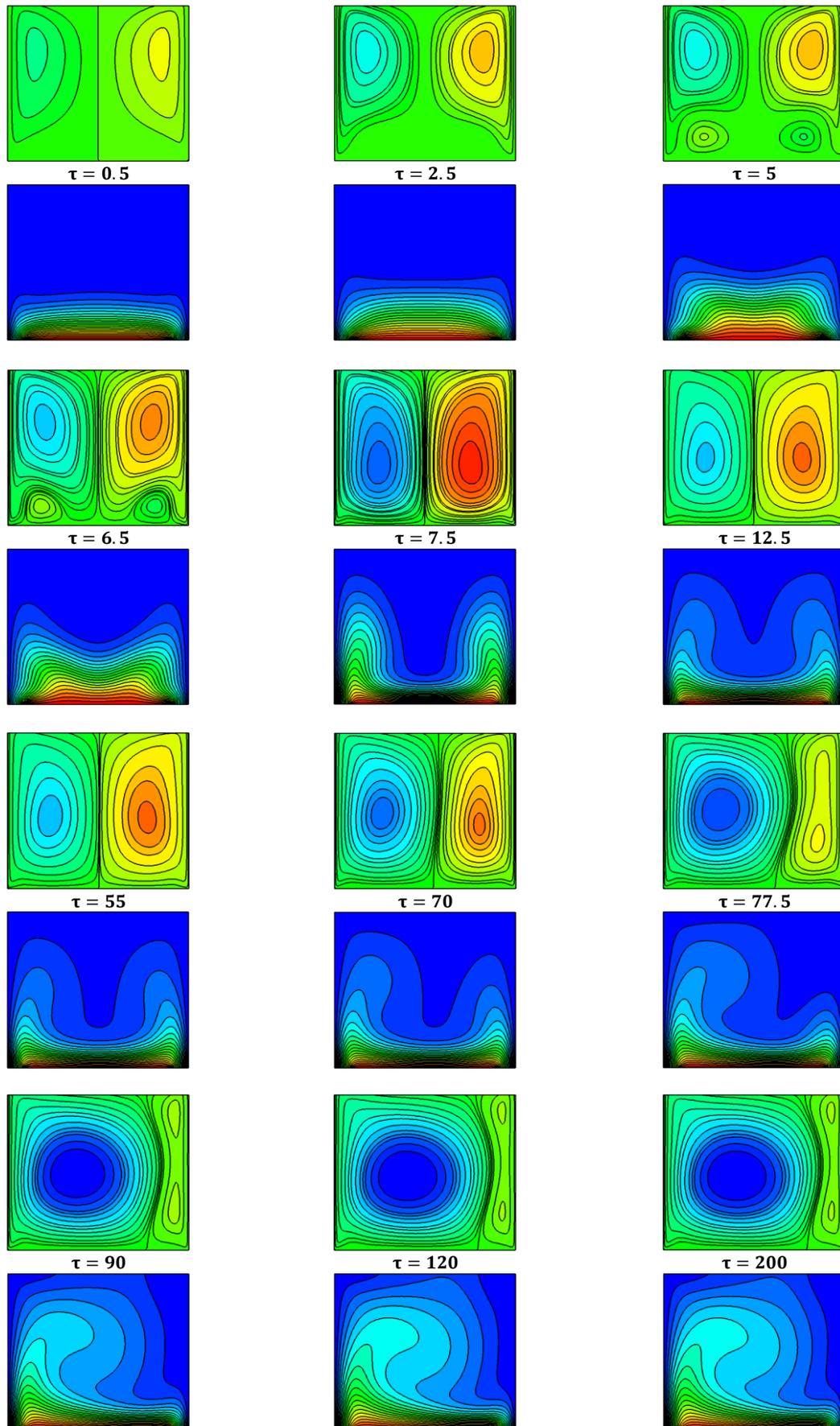


Figure 4.8 (a): Evolution de l'écoulement en fonction du temps pour $Ri=11.76$ avec $Da=0.1$

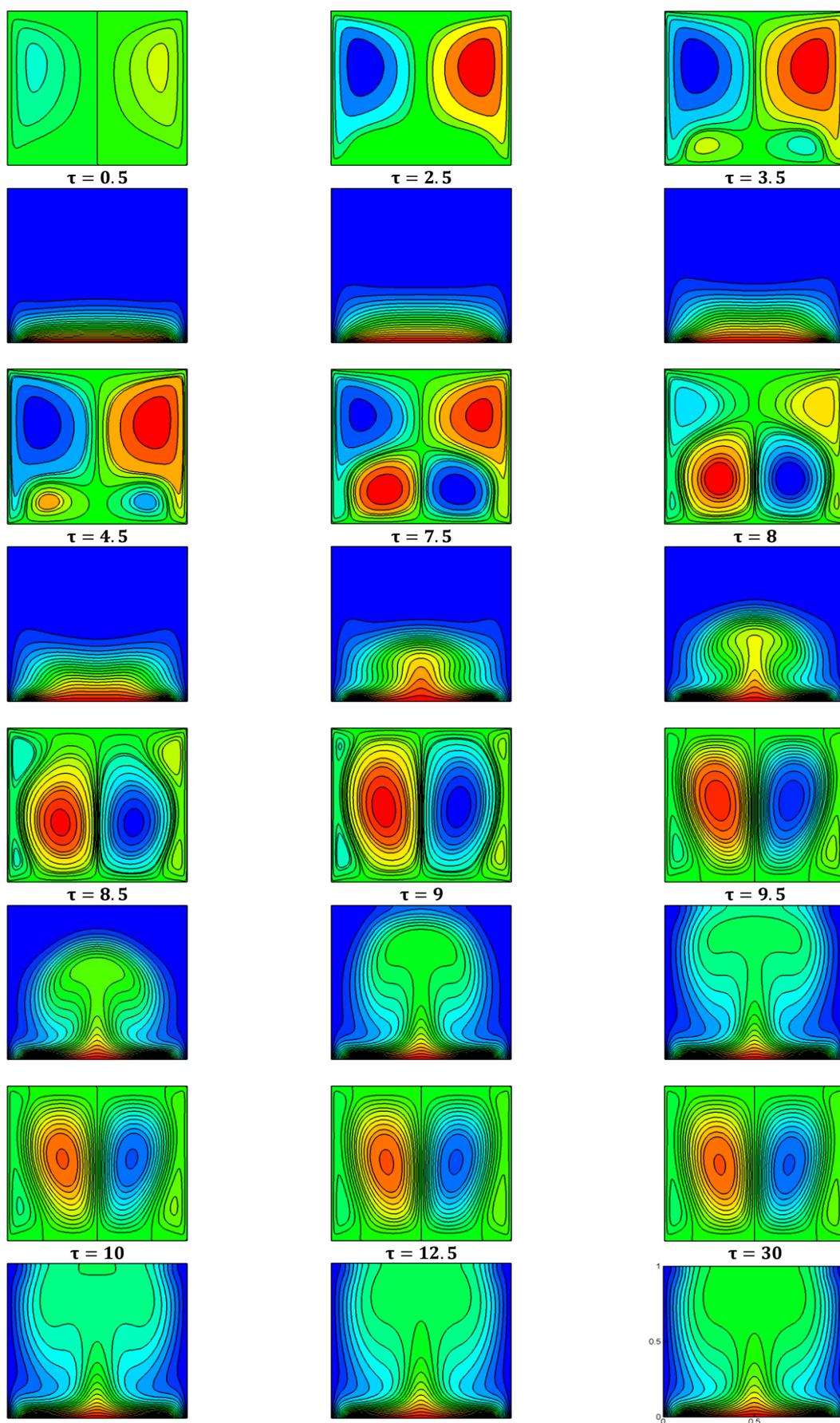


Figure 4.8 (b): Evolution temporelle de l'écoulement pour $Ri=11.77$ avec $Da=0.1$

4.5.4. Effet du nombre de Darcy sur le comportement de l'écoulement

Les figures 4.9 et 4.10 présentent l'évolution temporelle des lignes de courant et des contours de température pour deux valeurs différentes du nombre de Richardson $Ri=11,76$ et $Ri=11,77$ respectivement et pour chaque Ri deux nombres de Darcy différents $Da=10^{-3}$ et $Da=10^{-2}$ sont considérés. L'évolution structurelle de l'écoulement décrit pendant une durée de temps comprise entre 0 et 3 deux cellules contrarotatives qui sont générées par les forces visqueuses dues au mouvement des parois mobiles. Puis, deux cellules plus faibles dans le sens antihoraire sont formées juste au-dessus de la partie chauffée qui se développent progressivement jusqu'à $\tau=7$. A ce moment-là, les deux modes de distribution se distinguent. Comme le temps passe, un examen visuel de (figure 4.9 (a) et 4.10 (a)) révèle que pour $Da=10^{-3}$, ces deux cellules secondaires se développent progressivement compressant ainsi les deux cellules principales vers les coins du bas sous l'effet des forces de cisaillement dues à la viscosité du fluide. Elles s'éloignent des parois latérales, toutefois qu'elles remontent vers la paroi supérieure de la cavité. Ce régime d'écoulement qui se caractérise par deux paires de cellules parfaitement identiques est stabilisé autour du temps $\tau = 40$. Lorsque le nombre de Darcy augmente jusqu'à $Da=10^{-2}$ et que le temps passe (voir figure 4.9 (b) et 4.10 (b)), les deux cellules induites par les forces de cisaillement sont pressées vers les parois coulissantes par les deux autres engendrées par les forces de flottabilité dues au gradient de densité. Cela signifie des températures relativement élevées dans la partie centrale de la cavité par rapport à celles proches des parois latérales. Ces résultats ont détecté que la distribution des lignes de courant et des isothermes est presque la même pour les deux nombres de Darcy considérés et il est intéressant de mentionner que l'effet du faible nombre de Darcy n'est pas si important.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

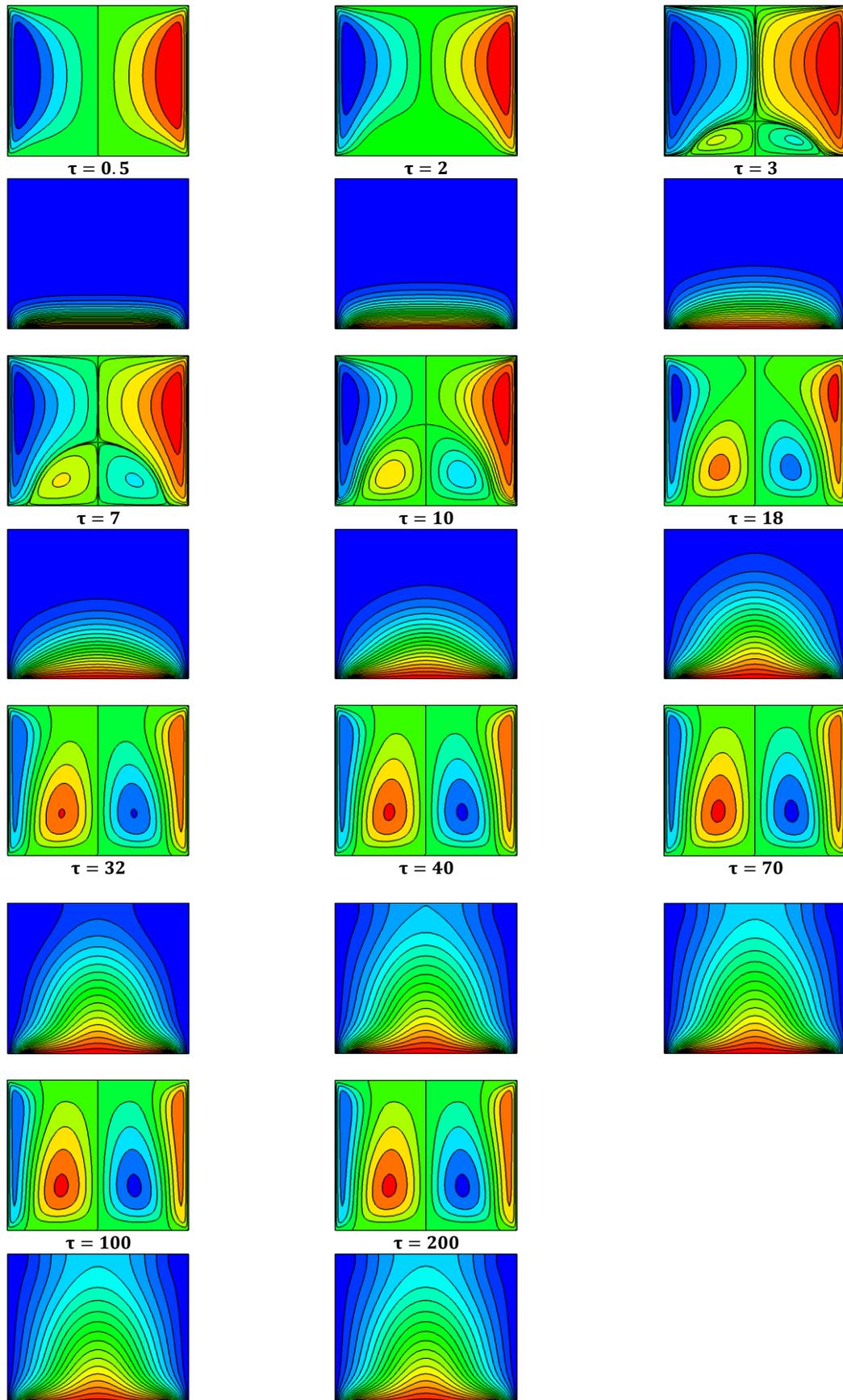


Figure 4.9 (a): Evolution temporelle des contours de l'écoulement et des isothermes correspondantes à $Ri=11.76$ pour $Da=10^{-3}$

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

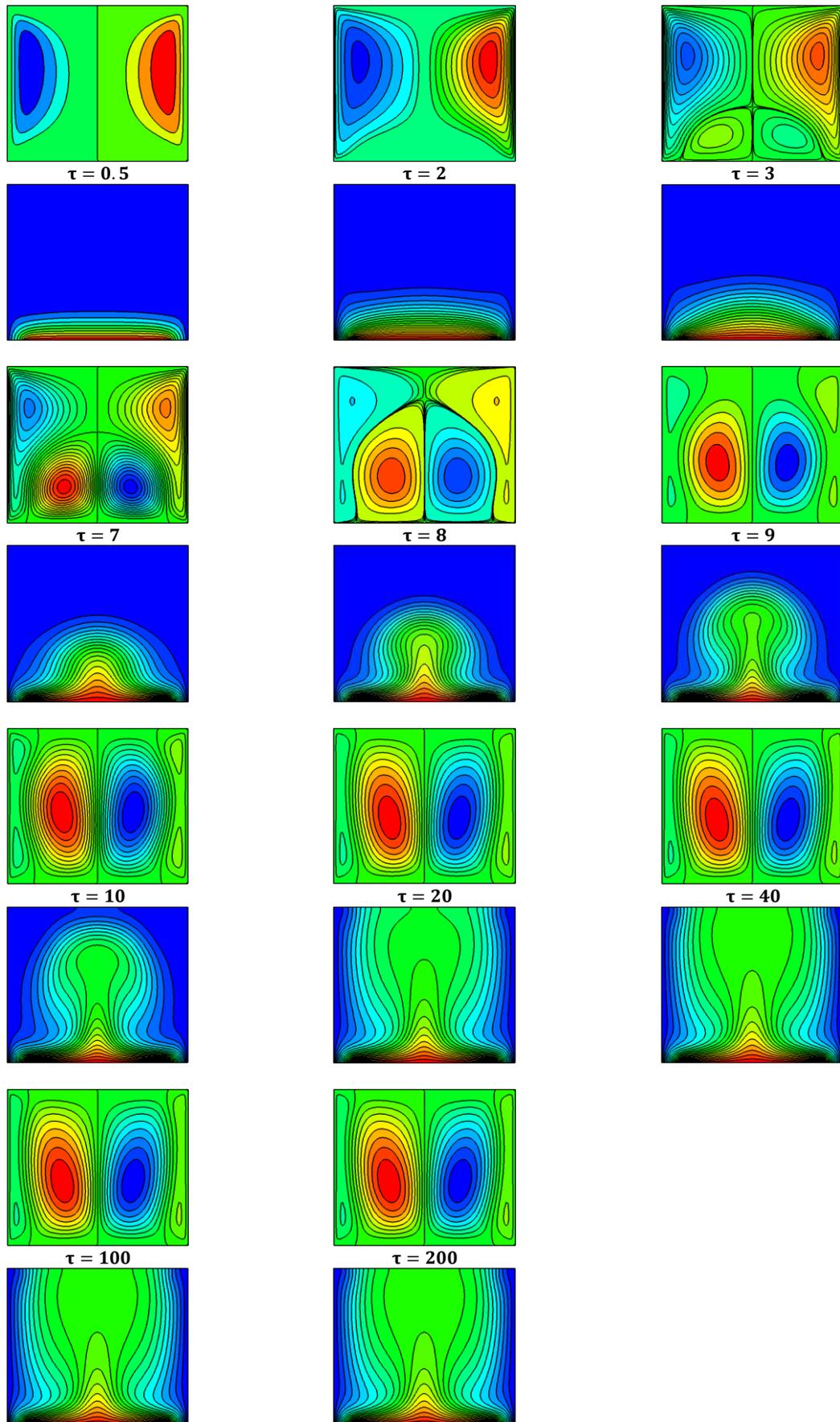


Figure 4.9 (b): Evolution temporelle des contours de l'écoulement et des isothermes correspondantes à $Ri=11.76$ pour $Da=10^{-2}$

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

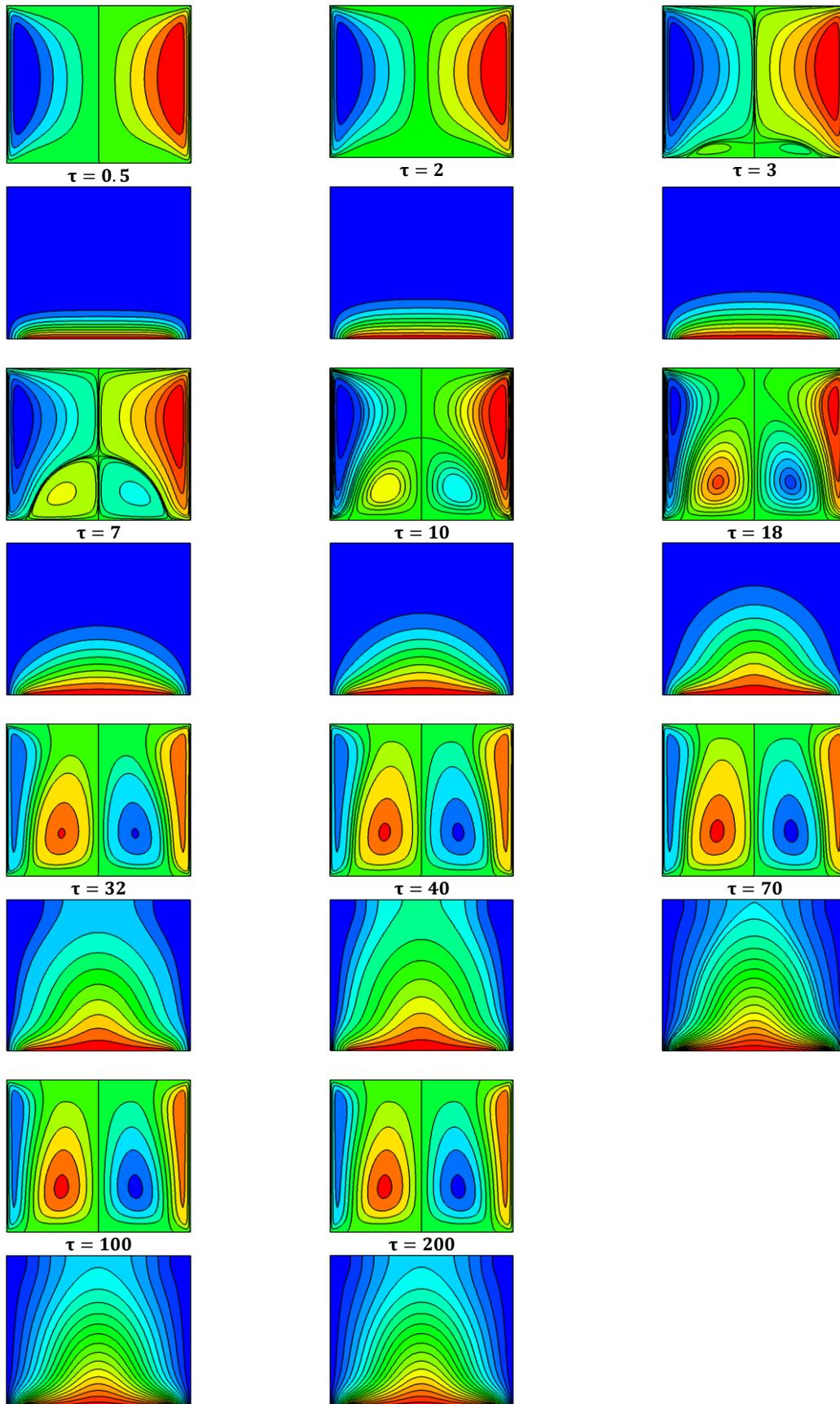


Figure 4.10 (a): Evolution temporelle des contours de l'écoulement et des isothermes correspondantes à $Ri=11.77$ pour $Da=10^{-3}$

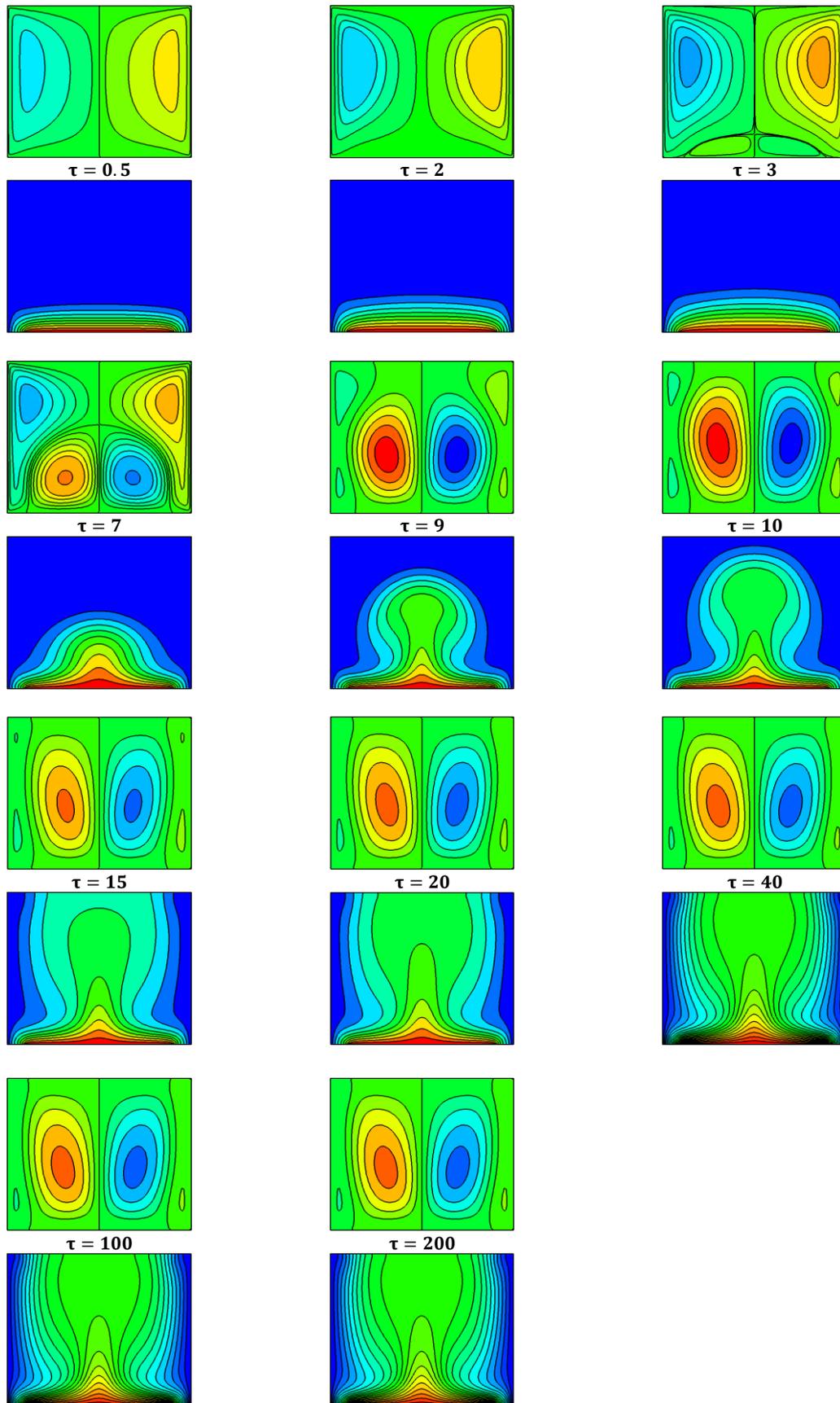


Figure 4.10 (b): Evolution temporelle des contours de l'écoulement et des isothermes correspondantes à $Ri=11.77$ pour $Da=10^{-2}$

4.5.5. Effet du nombre de Darcy sur le transfert thermique

Afin de comprendre l'effet de Darcy sur le flux thermique au niveau de la paroi chaude, une évolution temporelle de Nusselt moyen pour les deux valeurs de Richardson considérés ici est configurée sur la figure (4. 11). Pour les deux nombres de Darcy $Da=0.001$ et $Da=10^{-2}$, le taux de transfert diminue brusquement pendant les premiers instants, puis il diminue régulièrement, avant d'atteindre une valeur constante $\overline{Nu}= 3.435$. Un temps $\tau=20$ est suffisant pour atteindre cette valeur correspondante au paramètre $Da=0.001$. Cependant, lorsqu'on augmente à $Da=0.01$, le temps nécessaire afin de se stabiliser à une valeur fixe $\overline{Nu}= 5.0032$ est d'environ $\tau=40$. L'évolution du nombre de Nusselt local à travers la paroi chauffée est illustrée sur la figure (4. 12). Il est observé aussi qu'il prend sa valeur maximale aux bornes de la source chaude. Cela est dû à la symétrie des conditions aux limites. Tandis qu'il est clairement vu du profil de température le long du plan médian vertical (figure 4. 13) que le centre de la paroi inférieur devient une zone de stagnation de flux thermique et atteint une température maximale, cela signifie un minimal gradient thermique ici.

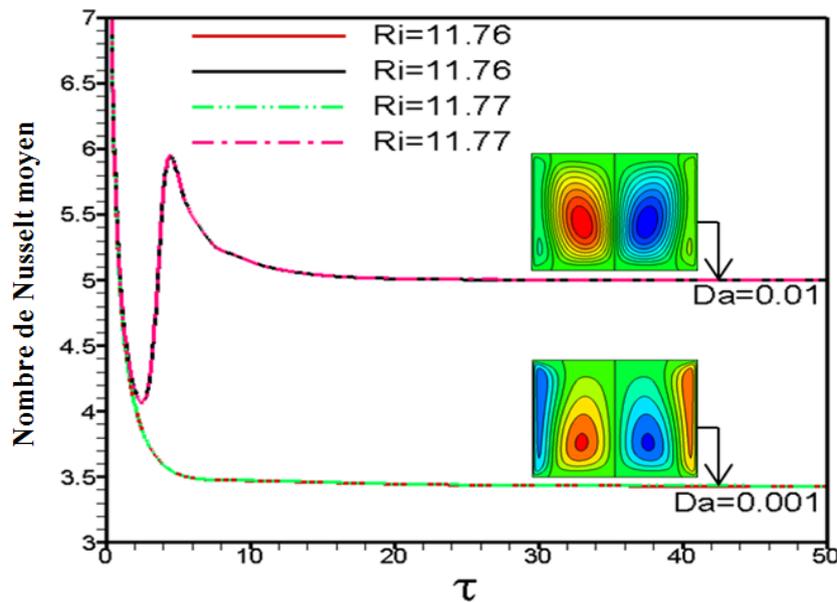


Figure 4.11: Evolution temporelle du nombre de Nusselt moyen pour $Ri=11.76$ et $Ri=11.77$ avec différents nombres de Darcy.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

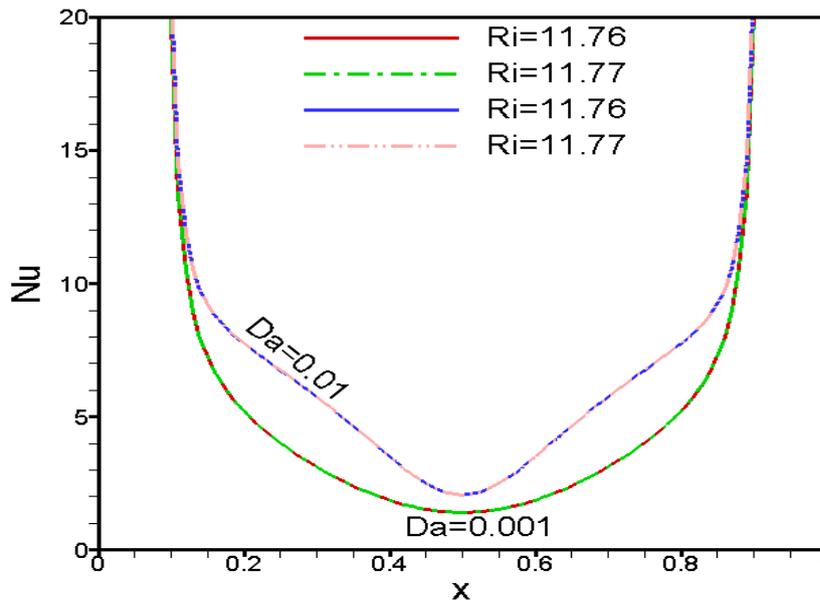


Figure 4.12: Evolution de Nusselt local le long de la partie chauffée pour $Ri=11.76$ et $Ri=11.77$ avec différents nombres de Darcy.

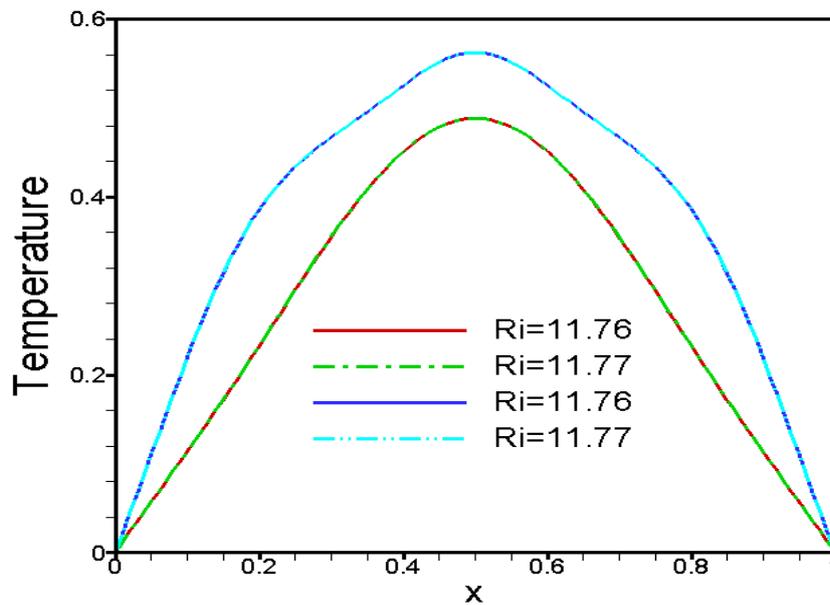


Figure 4.13: Profil de température à $Y=0.5$ pour $Ri=11.76$ et $Ri=11.77$ avec différents nombres de Darcy.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

Pour une porosité égale à 1 et un nombre de Darcy tend vers l'infinie, le comportement du milieu de la présente étude devient un fluide pur.

4.5.6. Lignes de contours pour la gamme $1 \leq Ri \leq 3.85$:

La figure 4. 14 présente un écoulement symétrique caractérisé par une paire de zone de recirculation contrarotative identique car les conditions aux limites sont symétriques.

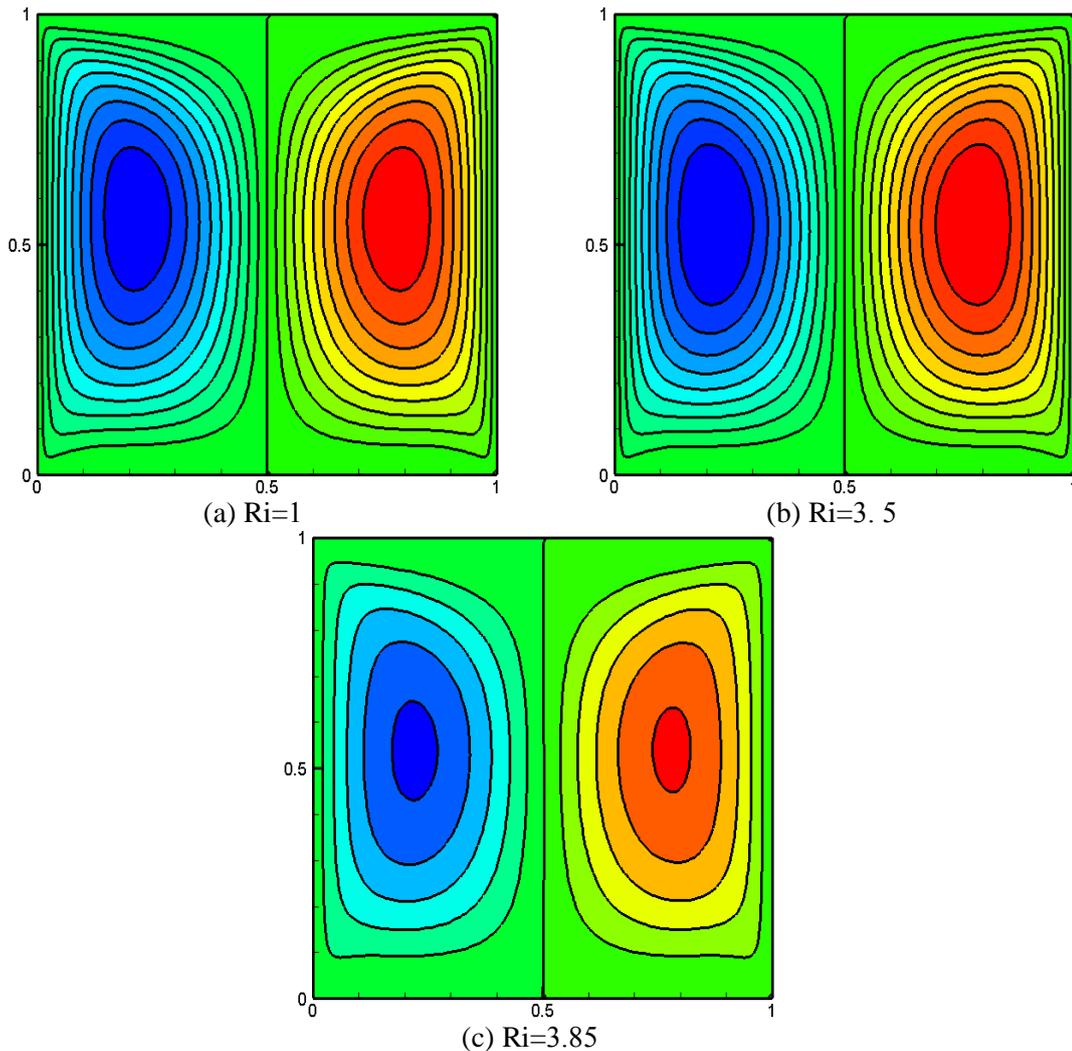


Figure 4.14: Lignes de contours pour différents nombres de Richardson: (a) $Ri=1$, (b) $Ri=3.5$ et (c) $Ri=3.85$

4.5.7. Nusselt moyen pour la gamme $1 \leq Ri \leq 3.85$:

L'évolution temporelle de ce nombre est représentée sur la figure 4. 15. D'une manière générale, cette grandeur décroît puis augmente brusquement pendant les tous premiers instants, ensuite elle diminue régulièrement pour se stabiliser à une valeur fixe.

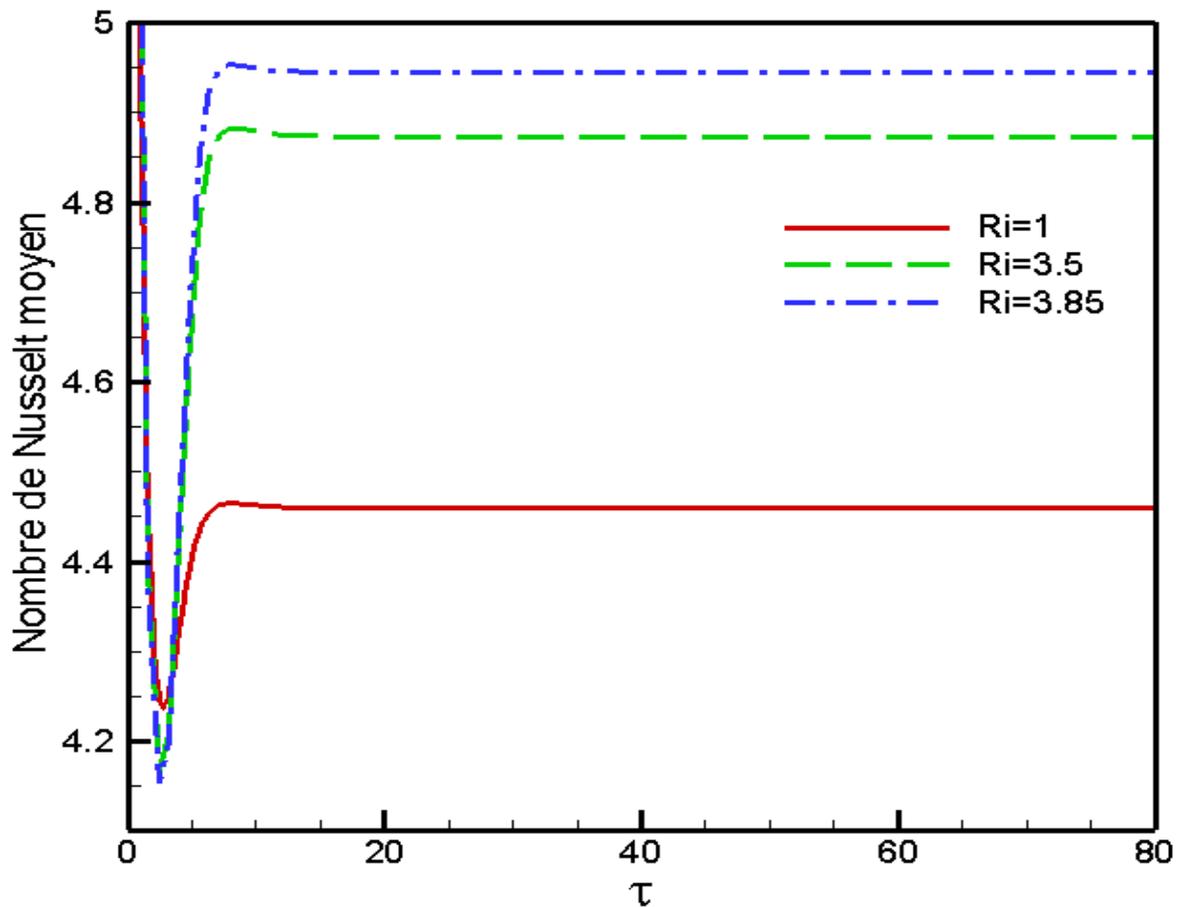


Figure 4.15: Taux de transfert moyen en fonction du temps pour $Ri=1$, $Ri=3.5$ et $Ri=3.85$

4.5.8. Contours de distributions de température pour $4 \leq Ri \leq 12.5$:

Ces contours sont illustrés dans la figure 4.16, nous constatons que la répartition de la température dans la cavité est caractérisée principalement par une contradiction avec la nature de symétrie. Les températures élevées occupent environ les deux tiers de la cavité. Il est à noter que pratiquement toute la chaleur récupérée de la source chaude est évacuée soit à travers la paroi gauche, soit à travers la paroi droite, démontrant ici la perte de symétrie de l'écoulement.

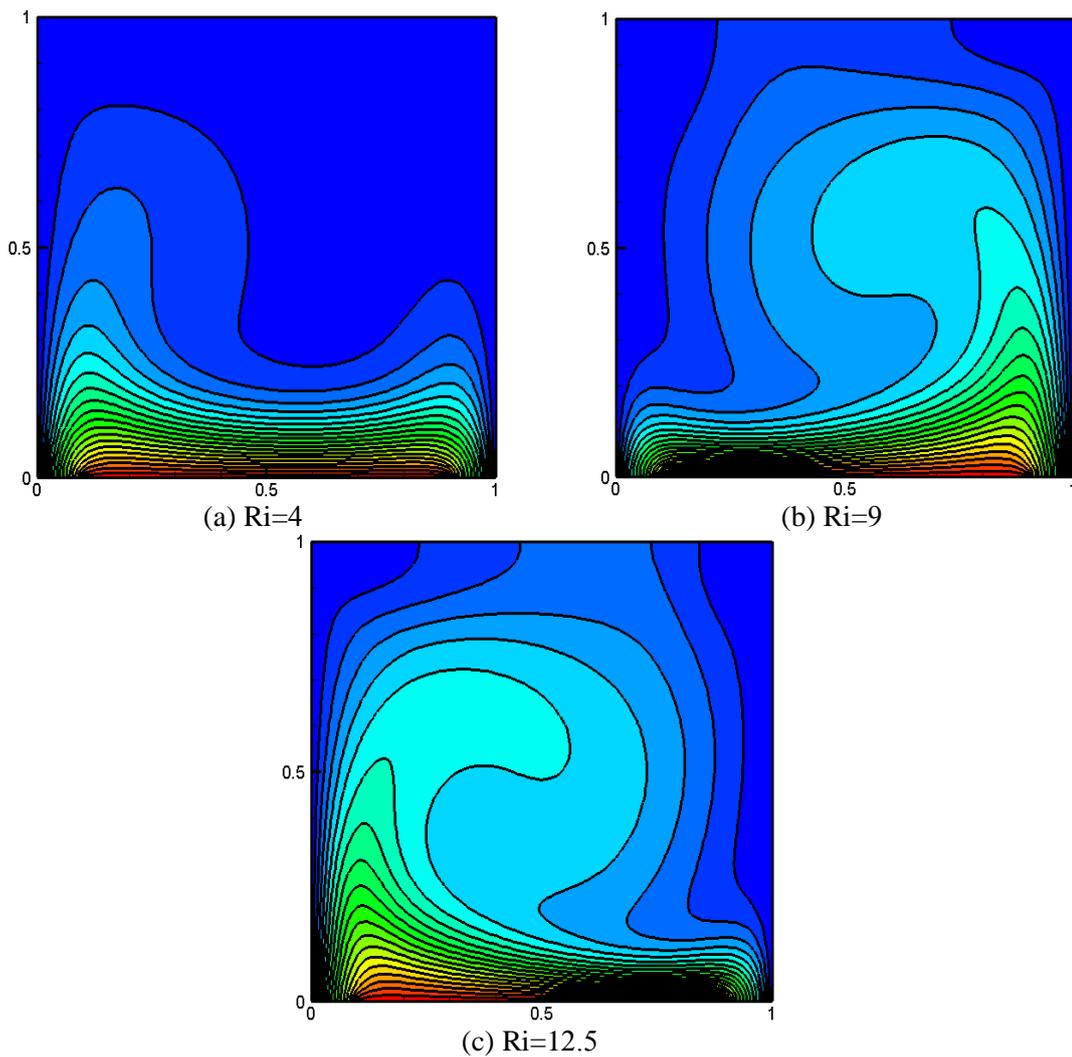


Figure 4.16: Contours de température pour (a) $Ri=4$, (b) $Ri=9$ et (c) $Ri=12.5$

4.5.9. Nusselt moyen pour la gamme $4 \leq Ri \leq 12.5$:

L'évolution de cette grandeur est représentée sur la figure 4. 17. Elle est strictement monotone, ensuite elle présente une diminution de Nusselt moyen de plus en plus importante lorsque le nombre de Richardson augmente, caractérisant ainsi le passage d'un écoulement symétrique à autre non-symétrique.

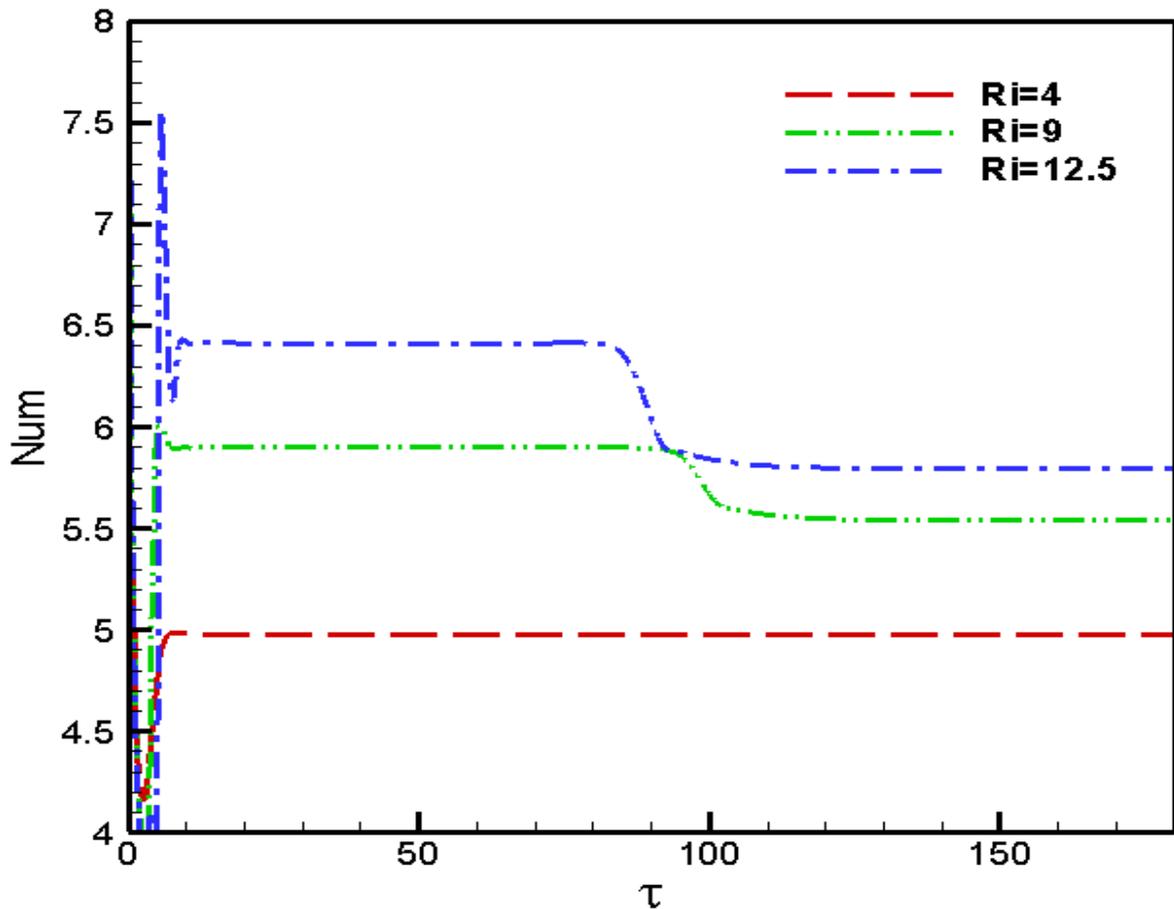


Figure 4.17: Evolution temporelle de Nusselt moyen pour $Ri=4$, $Ri=9$ et $Ri=12.5$

4.5.10. Contours de distributions de température pour $12.6 \leq Ri \leq 18.1$:

Ces champs sont représentés pour les mêmes valeurs de Ri dans la figure 4.18, la chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers le haut au centre de l'enceinte par la paire centrale de cellules. Raison pour laquelle les températures plus élevées sont concentrées au milieu de la cavité, la chaleur est évacuée de façon équitable à travers les deux parois latérales.

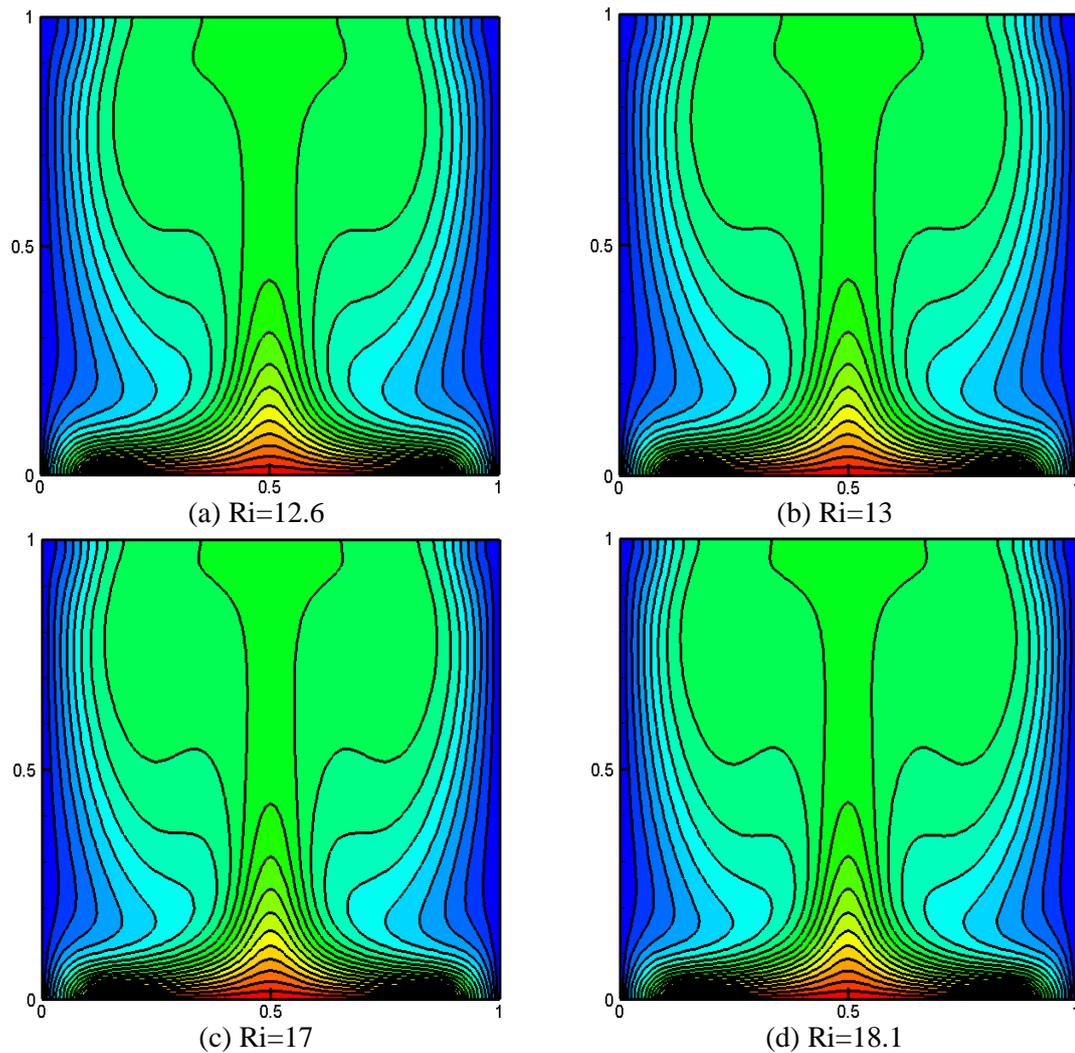


Figure 4.18: Isothermes pour différents nombres de Richardson: (a) $Ri=12.6$, (b) $Ri=13$, (c) $Ri=17$ et (d) $Ri=18.1$

4.5.11. Taux de transfert de chaleur pour la gamme $12.6 \leq Ri \leq 18.1$:

L'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen est représentée sur la figure 4.19. Cette grandeur passe par des oscillations dont leurs intensités sont différentes durant les instants du début, ensuite il diminue au fur et à mesure pour se stabiliser à une certaine valeur.

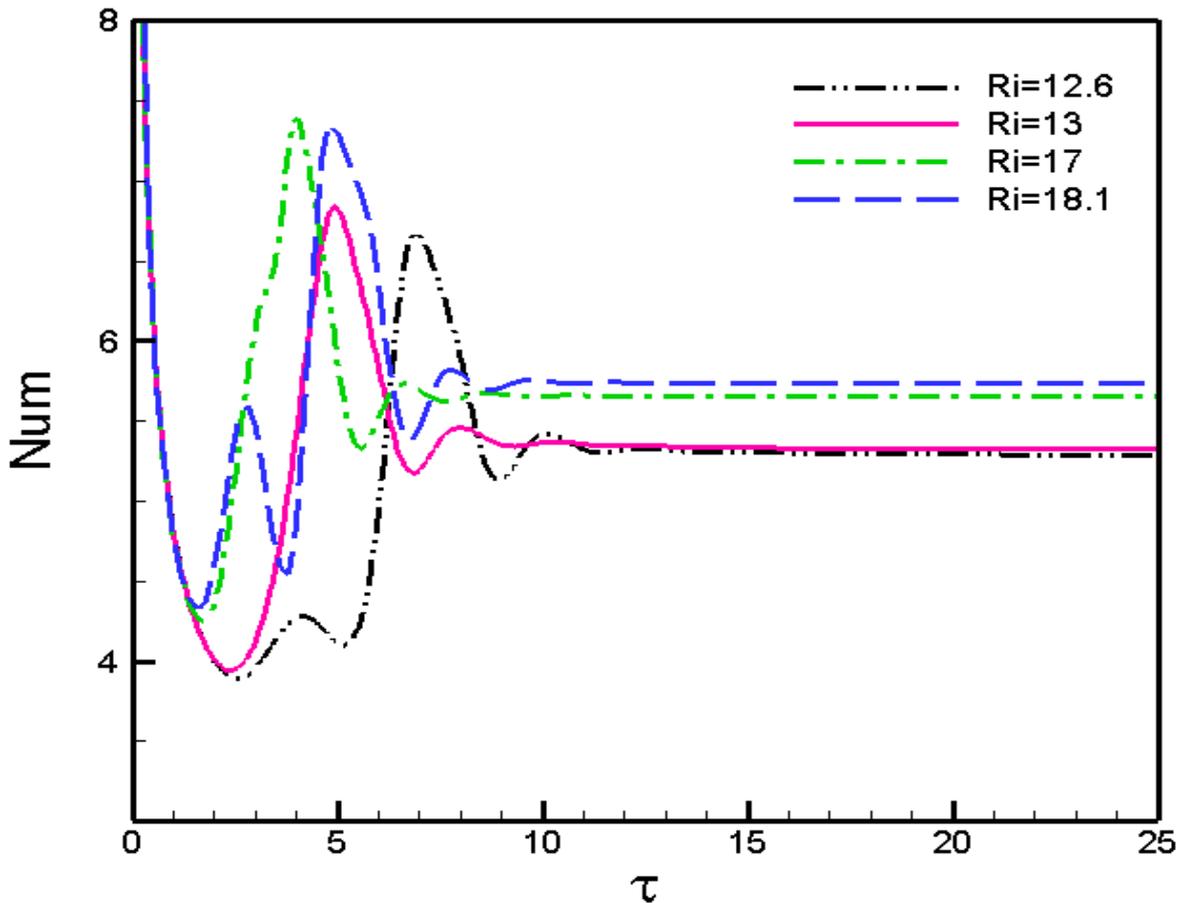


Figure 4.19: Taux de transfert moyen en fonction du temps pour différents nombres de Richardson

4.5.12. Champs thermiques pour la gamme $18.15 \leq Ri \leq 20.0$:

Ces champs sont représentés dans la figure 4.20. Nous constatons qu'une faible stratification thermique existe près de la partie chauffée. Le mouvement ascendant des parois latérales entraîne vers le haut les couches de fluide adjacent aux parois par les forces visqueuses, mais ces couches-là tendent vers un assemblage au centre de l'enceinte à cause des forces de flottabilité provoquées par la source chaude, nous remarquons aussi que l'évolution de la température froide règne dans une partie supérieure de la cavité plus petite que celle illustrée dans le premier type d'écoulement. En fait les faibles flux de chaleur récupérés, par le fluide, de la source chaude sont directement évacués à travers la partie inférieure des parois verticales. Par conséquent, le champ de température n'est pas affecté par l'incrément du nombre de Richardson.

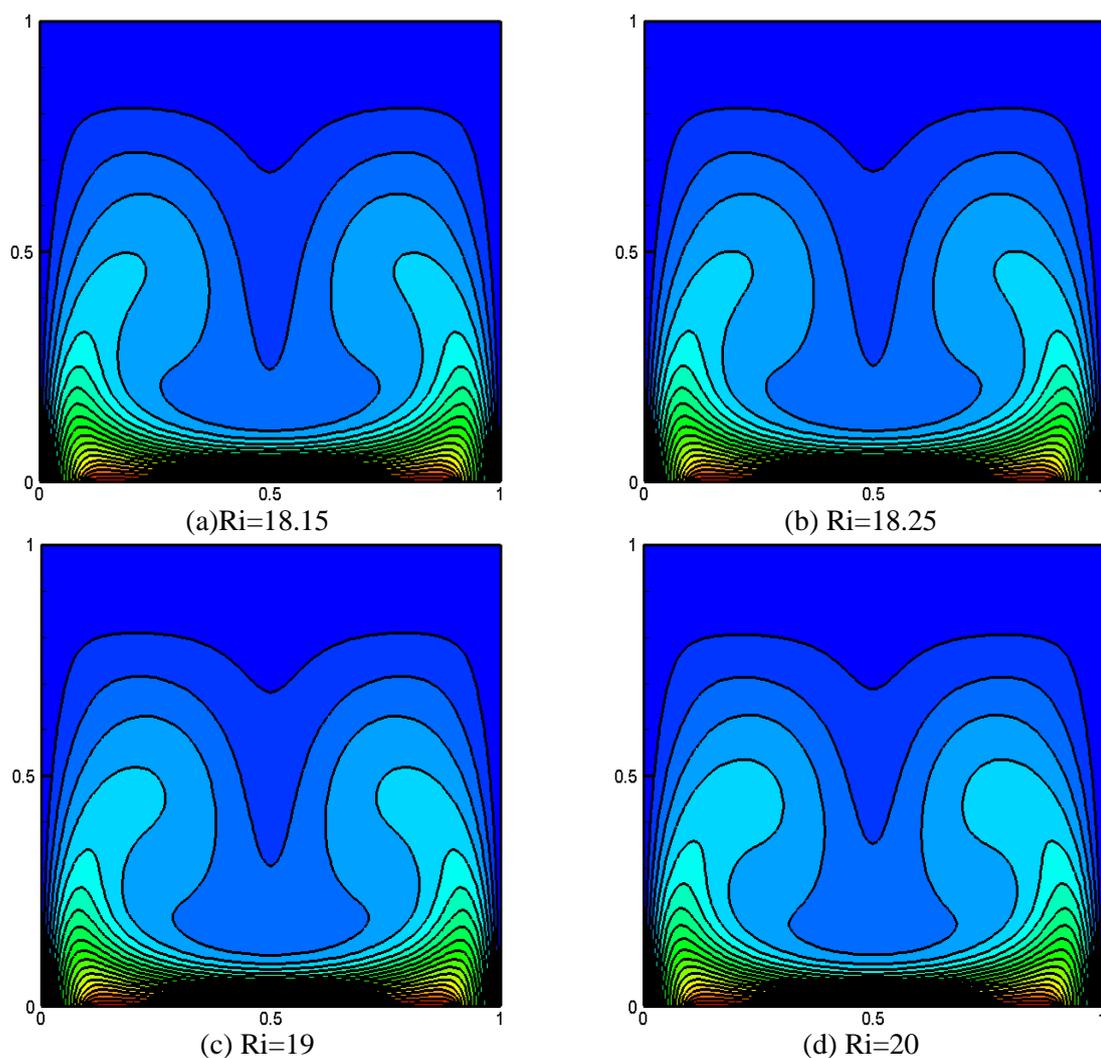


Figure 4.20: Isothermes correspondantes à différentes valeurs de Richardson (a) $Ri=18.15$, (b) $Ri=18.25$, (c) $Ri=19$ et (d) $Ri=20$

4.5.13. Taux de transfert de chaleur moyen pour la gamme $18.15 \leq Ri \leq 20.0$:

La variation de Nusselt moyen selon le temps est représentée sur le graphe 4.21. D'une manière générale, avant d'avoir sa décroissance régulière pour se fixer à une valeur stable, ce nombre passe par des oscillations dont leurs intensités sont différentes durant les tous premiers instants.

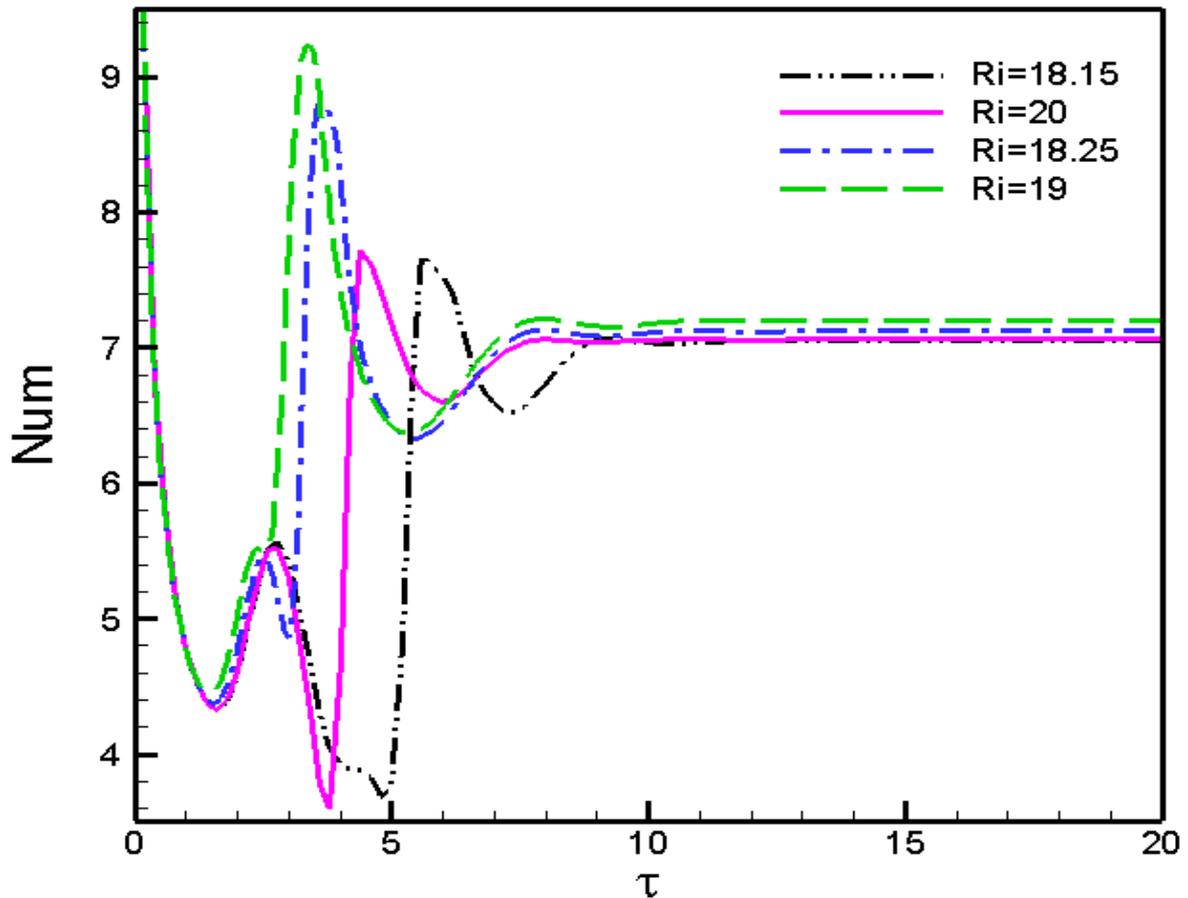


Figure 4.21: Variation temporelle du taux de chaleur moyen dans les cas: (a) $Ri=18.15$, (b) $Ri=18.25$, (c) $Ri=19$ et (d) $Ri=20$

4.5.14. Champs thermiques pour la gamme $21 \leq Ri \leq 50$:

Ces champs sont représentés pour les mêmes valeurs de Ri dans la figure 4.23, un passage vers un nouveau régime d'écoulement symétrique caractérisé par:

- Une première structure où les couches de fluide adjacentes aux parois tendent vers un assemblage au centre de l'enceinte et la température froide règne dans la partie supérieure. Au fur et à mesure il s'apparait une deuxième structure dont la répartition de la température dans la cavité est caractérisée par la perte de la symétrie qui se maintient jusqu'à l'apparition d'une troisième structure où la chaleur récupérée de la source chaude est transportée par convection vers la partie supérieure au milieu de la configuration géométrique considérée, elle est évacuée de façon équitable à travers les deux parois latérales pour les nombres de Richardson dont la valeur est comprise entre 21 et 25.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

- Dès le premier instant de l'évolution de ce régime, la chaleur récupérée de la source d'échauffement est transportée par convection vers le haut au milieu de la cavité, elle est évacuée de façon équitable à travers les deux parois latérales. Cette structure est obtenue pour un nombre de Richardson dont la valeur est comprise entre 30 et 50.

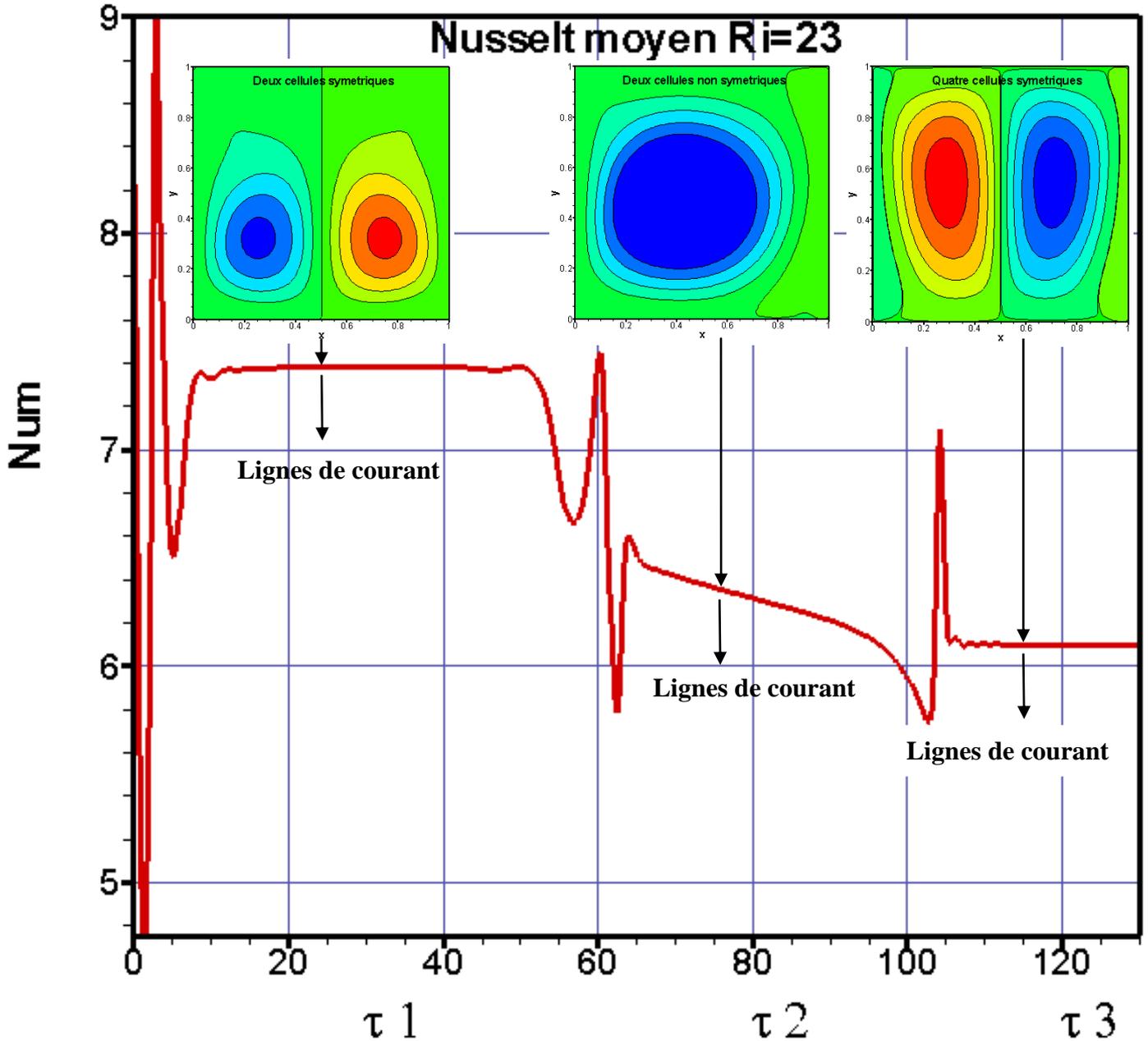


Figure 4.22 : Le passage des différentes formes de structures de l'écoulement selon l'évolution du paramètre de Nusselt moyen pour la valeur de Ri correspondant à 23

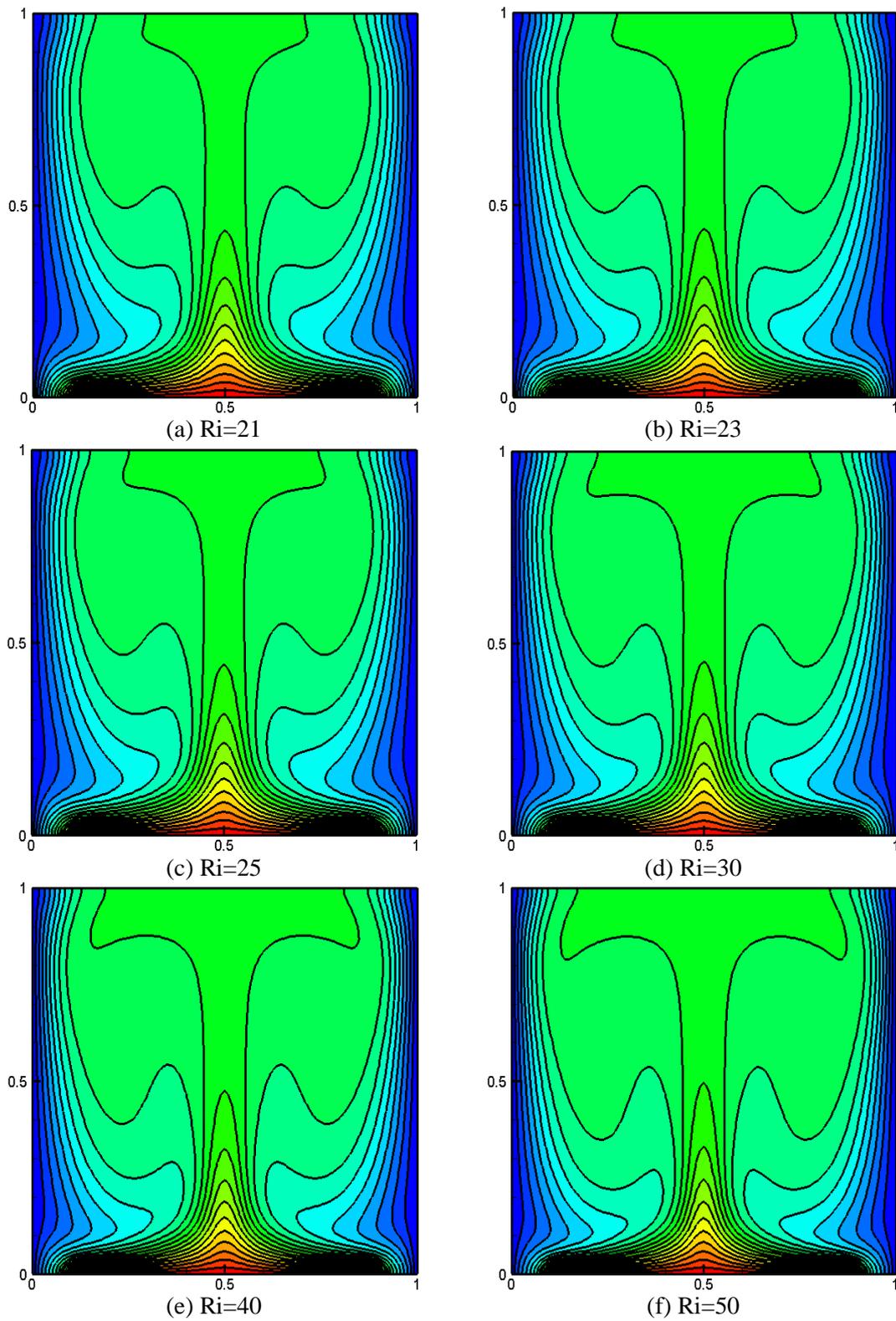


Figure 4.23: Contours de température pour (a) $Ri=21$, (b) $Ri=23$, (c) $Ri=25$, (d) $Ri=30$, (e) $Ri=40$ et (f) $Ri=50$

4.5.15. Taux de transfert thermique pour la gamme $21 \leq Ri \leq 50$:

L'évolution temporelle de la grandeur de Nusselt est représentée sur les figures 4.24 (a), 4.24 (b), et 4.24 (c). Cette variation est monotone. La croissance du paramètre de Richardson a pour effet la diminution du nombre de Nusselt moyen de plus en plus importante, ce qui traduit par le passage d'un écoulement symétrique à autre dissymétrique. Il est à noter que cette structure se maintient jusqu'à l'atteindre de sa stabilisation en revenant à un autre écoulement symétrique.

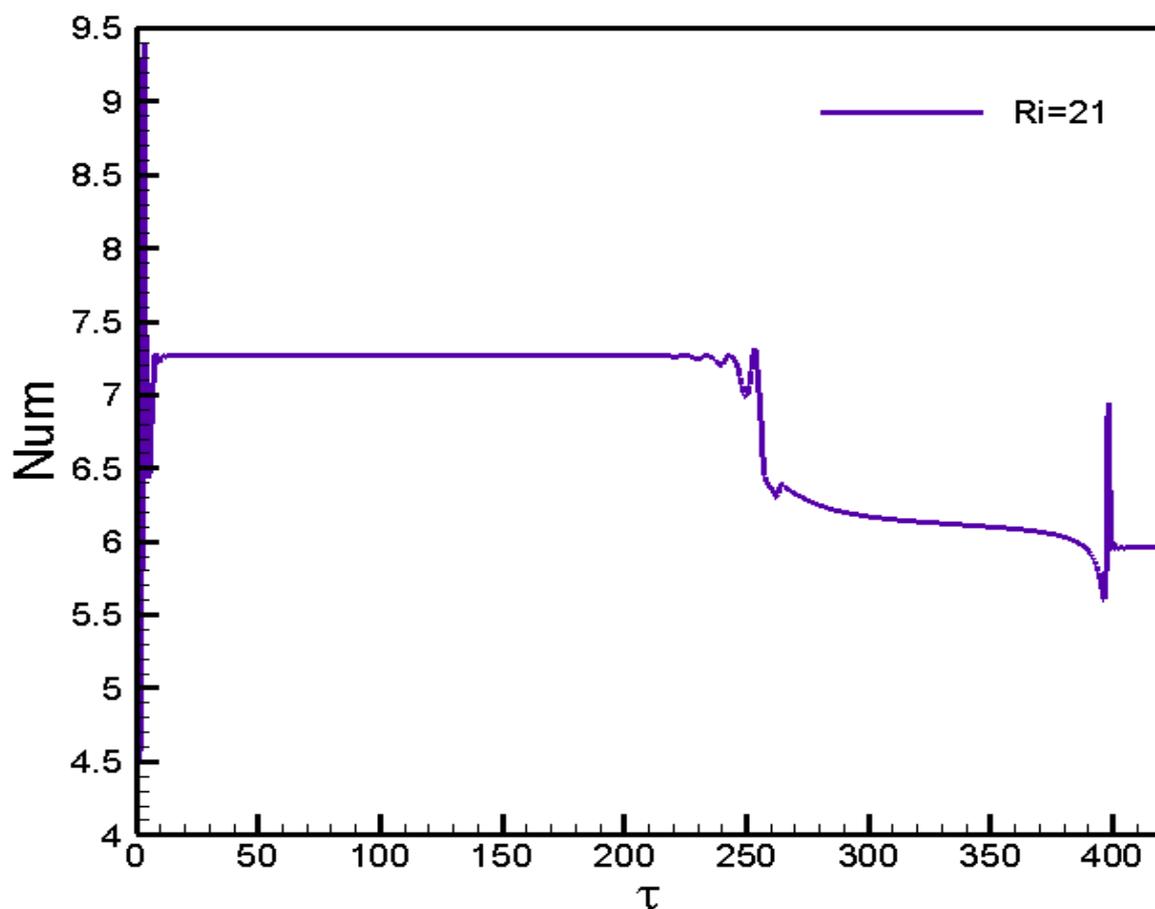


Figure 4.24 (a): Le taux de transfert thermique moyen pour $Ri=21$

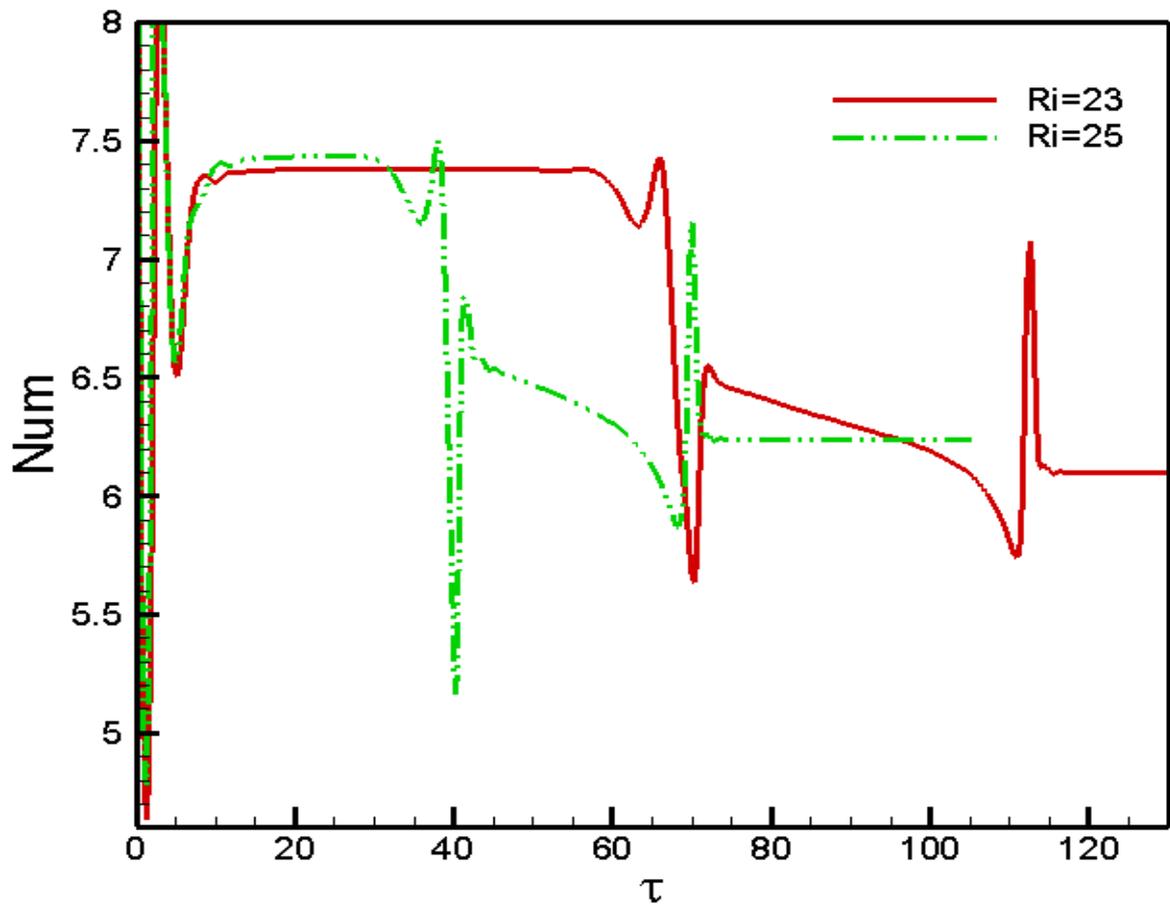


Figure 4.24 (b): Variation de Nusselt moyen suivant le temps pour Ri=23 et Ri=25

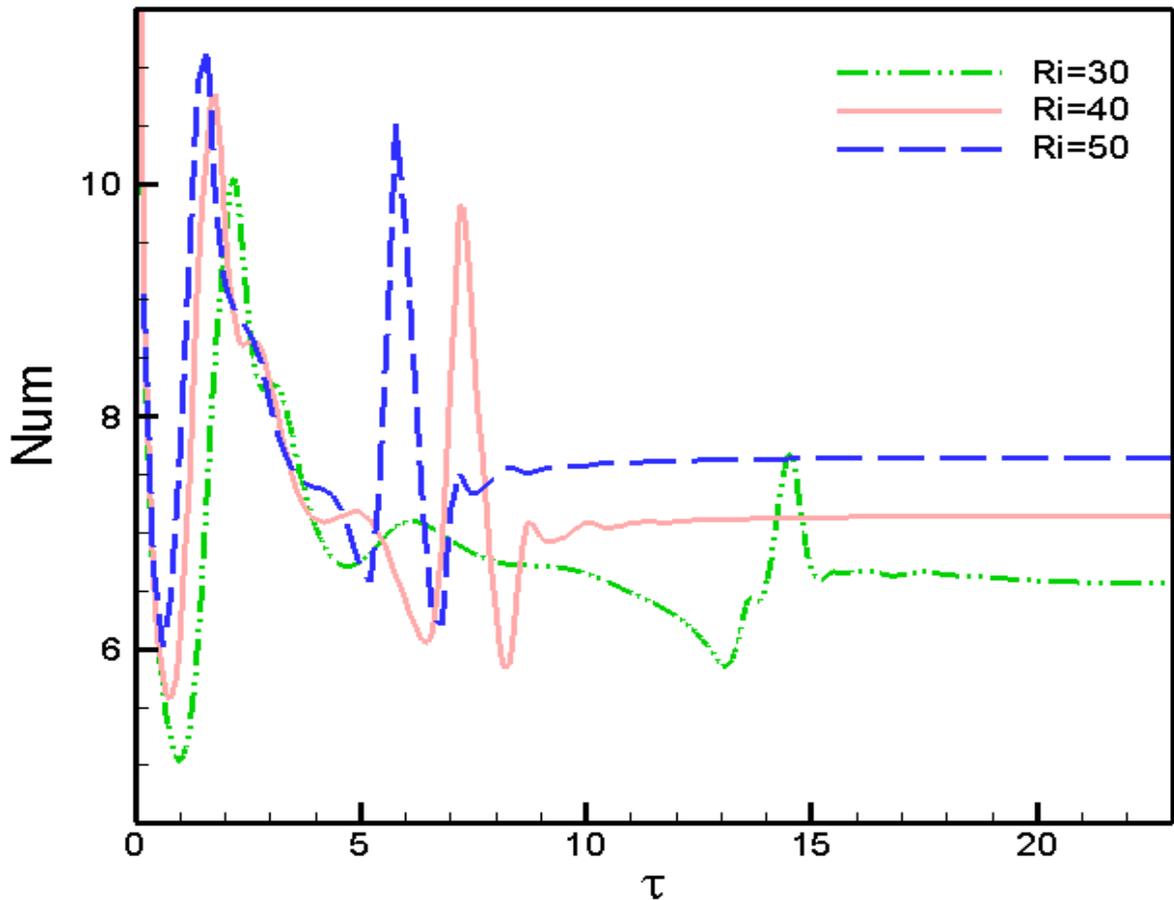
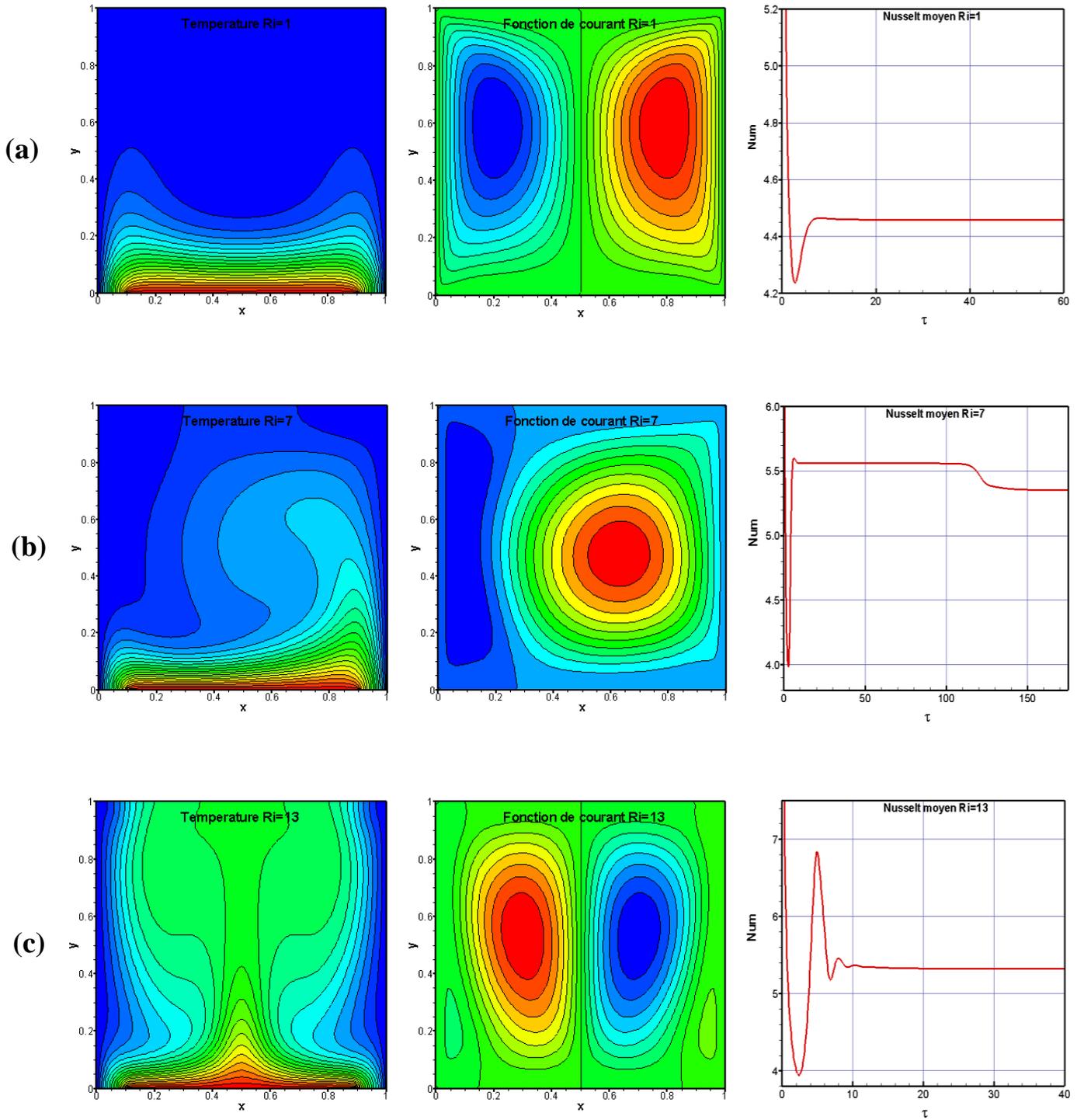


Figure 4.24 (c): Evolution temporelle du taux de chaleur pour les cas: $Ri=30$, $Ri=40$ et $Ri=50$

Les résultats obtenus montrent l'existence de cinq structures d'écoulement totalement différentes en fonction de la valeur de la grandeur caractérisant la convection mixte, sont présentés par la figure 4.25 où on a élaboré un exemple de chaque type d'écoulement qui schématise les champs de température, de fonction de courant, ainsi que l'évolution du taux de transfert thermique.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS



CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

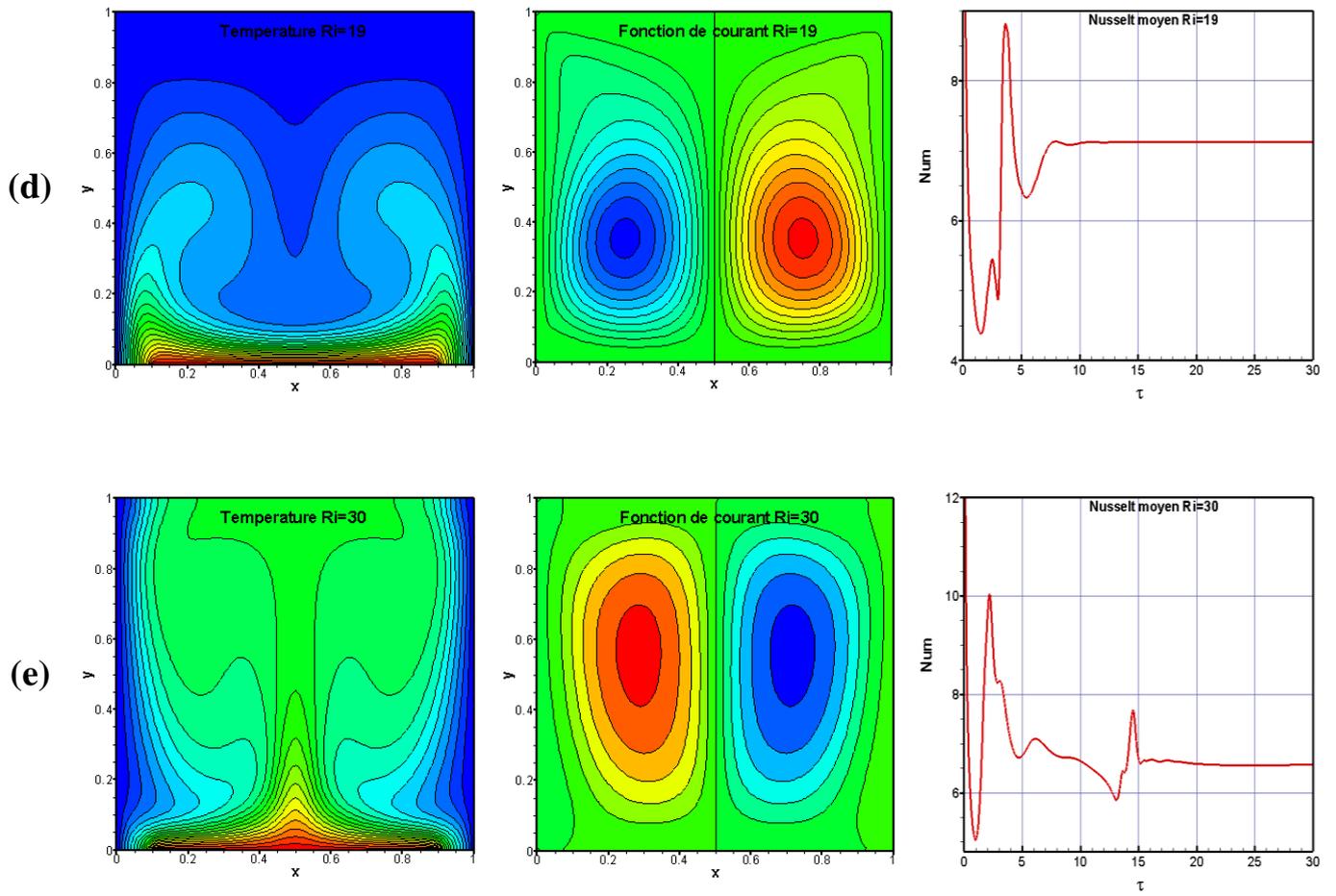


Figure 4.25: Evolution de l'écoulement et du taux de transfert thermique moyen

On peut résumer les différentes structures de l'écoulement qu'on a rencontré dans ce cas selon le tableau 4.5 ci-dessous qui identifie les différents intervalles du nombre de Richardson et les agencements de l'écoulement qui leurs correspondent.

CHAPITRE IV RESULTATS ET DISCUSSIONS

Tableau. 4.5

Les différents types d'écoulement selon les différents intervalles du nombre de Richardson.

<i>Intervalle du nombre de Richardson</i>	<i>Caractérisation de la structure de l'écoulement</i>
1-3.85	Deux cellules symétriques
4-12.5	Deux cellules non-symétriques
12.6-18.1	Quatre cellules symétriques
18.15-20	Deux cellules symétriques
21-50	Quatre cellules symétriques

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le travail présenté dans cette thèse porte sur l'étude des paramètres influençant la résolution numérique de l'écoulement d'air avec transfert de chaleur dans un massif poreux. L'impact des conditions aux frontières de type Dirichlet imposées en amont et en aval du domaine de calcul a été analysé afin de prédire plus d'assurance l'écoulement à l'intérieure de l'enceinte. Cette compréhension nous a configuré le rôle que jouent les différentes variables sur le phénomène de changement du comportement de l'écoulement du fluide.

5.1. Définition du Problème

Le sujet proposé dans cette recherche consiste en l'étude de l'écoulement en régime de convection mixte dans un substrat poreux confiné dans une géométrie bidimensionnelle, dont une source usée pour assurer le chauffage de la partie du fond, alors que les parois verticales sont maintenues en mouvement ascendant avec une vitesse fixée. Les autres côtés sont supposés isolés thermiquement.

5.2. Objectif du travail

La présente étude a pour objet de déterminer l'influence des différents paramètres qui sont susceptibles d'être la cause des phénomènes de changement de la nature. Les calculs préliminaires du problème de convection mixte dans un élément poreux ont révélé que des champs de vitesse et de température caractérisant des structures de l'écoulement qui sont totalement différentes suivant la valeur du nombre de Darcy ainsi que l'existence des perturbations sur le taux de transfert thermique. Ces résultats nous ont permis de détecter la perte de symétrie et un changement radical de l'écoulement.

5.3. Intérêt de l'étude

La communauté scientifique s'intéresse elle aussi à la modélisation de convection mixte dans des espaces poreux confinés depuis plusieurs années déjà. D'un côté, cette étude apportera un développement d'une meilleure compréhension de l'impact des

différents paramètres de calcul utilisés par le numéricien lors de la simulation dans ces espaces et de l'autre côté pratique, ce travail va faire l'objet d'une attention particulière pour le captage des rayons solaires pour les besoin de ventilation des bâtiments et sera aussi un outil de design pour l'amélioration de refroidissements des pièces dans les boites électroniques...etc.

5.4. Méthodologie utilisée

L'application des principes généraux de la physique nous permet d'établir les différentes équations qui régissent le phénomène pris en considération dans ce manuscrit. Ce système d'équations est transformé en un modèle mathématique reposant sur l'approche vorticité-fonction de courant. Le système d'équations gouvernant le problème aux valeurs propres est résolu numériquement par un code de calcul basé sur la méthode des différences finies en utilisant un schéma de quatrième ordre. L'accord obtenu entre nos résultats et ceux disponibles dans la littérature, témoigne de la bonne précision de ce programme.

5.5. Principaux résultats

Des solutions sont obtenues pour différents nombres de Darcy afin de bien caractériser la structure du mouvement de fluide en illustrant les champs de l'écoulement et de la température ainsi que le taux de transfert thermique à travers la cavité.

La compréhension du rôle que jouent les principaux paramètres influençant le comportement de la résolution numérique est un pas essentiel à franchir, le nombre de Darcy varie de 10^{-3} à 10^{-1} et le nombre de Richardson prend la gamme de 0.5 jusqu'à 11.77. L'examen visuel des lignes de courant révèle qu'il y'a un changement significatif sur les contours de l'écoulement pour différents nombres de Darcy avec une valeur fixe de celui de Richardson et vis vers ça.

- L'effet du faible nombre de Darcy sur la structure de l'écoulement n'est pas si important.
- La valeur $Da=0.1$ correspond à une perméabilité très élevée pour laquelle le comportement du milieu poreux est proche d'un fluide pur.

- Bien que les conditions aux limites parfaitement symétriques, les résultats montrent que le phénomène de transport à l'intérieur de la cavité est vraiment complexe. Pour $Da=10^{-1}$ et une différence d'un centième seulement à la valeur du nombre de Richardson, l'évolution temporelle de l'écoulement était en contradiction avec la nature symétrique. Les instantanés de cet écoulement mettent en évidence le passage d'une structure de deux cellules non symétriques pour une valeur du nombre de Richardson égale à 11.76 vers une autre structure de quatre cellules strictement symétriques pour une valeur du même nombre équivalente à 11.77.
- Pour des faibles nombres de Darcy, la distribution des circulations d'air et des contours de températures correspondants aux deux valeurs de Richardson $Ri=11.76$ et $Ri=11.77$, est éventuellement similaire.

Ces bifurcations n'auraient pas été révélées, si nous avions considéré la moitié du domaine, avec la condition de symétrie sur l'axe vertical passant par le centre de la cavité et si nous avions utilisé le test classique de convergence de la solution pour arrêter les calculs. Cela aurait conduit à des résultats erronés sur le comportement de l'écoulement du fluide et l'incapacité de trouver les solutions non symétriques. C'est pour ça que nous pouvons affirmer que dans un écoulement ou la concurrence entre les forces de cisaillement résultant du mouvement des parois latérales combinées aux forces de flottabilité résultant de la source de chaleur peuvent être à l'origine des phénomènes de bifurcation.

5.6. Perspectives et recommandations pour les travaux futurs

Nous avons présenté un portrait assez complet de la bifurcation qui change considérablement la structure du régime convectif qu'on peut trouver dans les écoulements fluides à travers les espaces poreux. Il est donc souhaitable pour toute personne voulant poursuivre dans cette voie:

- ❖ De traiter les transferts de chaleur et de masse couplés dans un milieu poreux saturé par un fluide binaire.
- ❖ de considérer des conditions dynamiques aux frontières (température ou flux périodique imposé).

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

- ❖ De généraliser le modèle par une approche tridimensionnelle qui tient compte des géométries complexes. Dans ce cas, d'autres techniques numériques devront être envisagées pour la résolution du modèle mathématique décrivant le phénomène.
- ❖ D'étudier le système en tenant compte de l'interaction entre les effets thermiques et solutaux (effet Soret et Dufour) et de l'anisotropie en perméabilité et en conductivité thermique.
- ❖ De prendre en considération le rapport d'aspect de la cavité.

BIBLIOGRAPHIE

1. Ahmed HB. Étude de la convection mixte d'origine thermosolutale sous l'influence de l'effet SORET dans un milieu poreux: analyse de stabilité linéaire et simulations 3D: Université de Cergy Pontoise; Faculté des Sciences de Tunis; 2008.
2. Bories S, Mojtabi A, Prat M, Quintard M. Transferts de chaleur dans les milieux poreux: Conduction, convection, rayonnement. Techniques de l'ingénieur Génie énergétique. 2008(BE8250).
3. Nield DA, Bejan A. Convection in porous media: Springer; 2006.
4. De Lemos MJ. Turbulence in porous media: modeling and applications: Elsevier; 2012.
5. Kaviany M. Principles of heat transfer in porous media: Springer Science & Business Media; 2012.
6. VANTOMME P, BEJI H. Analyse numérique de l'instabilité thermodiffusive de fluides viscoélastique saturant un milieu poreux. *Nous*.1:1.
7. Bennacer R, Tobbal A, Beji H. Convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse anisotrope: formulation de Darcy-Brinkman. *Rev Energ Ren*. 2002;5:1-21.
8. Horton C, Rogers Jr F. Convection currents in a porous medium. *Journal of Applied Physics*. 1945;16(6):367-70.
9. Lapwood E, editor. Convection of a fluid in a porous medium. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*; 1948: Cambridge University Press.
10. Kalla L. Convection naturelle au sein d'une couche horizontale poreuse soumise à des flux de chaleur uniformes (French text). 2000.
11. Mliki B, Abbassi MA, Omri A, Belkacem Z. Lattice Boltzmann analysis of MHD natural convection of CuO-water nanofluid in inclined C-shaped enclosures under the effect of nanoparticles Brownian motion. *Powder Technology*. 2017;308:70-83.
12. Singh K, Pandey AK, Kumar M. Slip flow of micropolar fluid through a permeable wedge due to the effects of chemical reaction and heat source/sink with Hall and ion-slip currents: an analytic approach. *Propulsion and Power Research*. 2020;9(3):289-303.
13. Cianfrini C, Corcione M, Habib E, Quintino A. Natural convection of water near 4 C in a bottom-cooled enclosure. *Energy Procedia*. 2015;82:322-7.
14. Abu-Hamdeh NH, Oztop HF, Alnefaie KA. A computational study on mixed convection in a porous media filled and partially heated lid-driven cavity with an open side. *Alexandria Engineering Journal*. 2020;59(3):1735-50.
15. Saleem M, Asghar S, Hossain MA. Natural convection flow of micropolar fluid in a rectangular cavity heated from below with cold sidewalls. *Mathematical and Computer Modelling*. 2011;54(1-2):508-18.
16. Fontana É, Da Silva A, Mariani VC. Natural convection in a partially open square cavity with internal heat source: An analysis of the opening mass flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2011;54(7-8):1369-86.
17. Mishra A, Pandey AK, Kumar M. Ohmic-viscous dissipation and slip effects on nanofluid flow over a stretching cylinder with suction/injection. *Nanoscience and Technology: An International Journal*. 2018;9(2):99-115.
18. Mishra A, Pandey AK, Kumar M. Velocity, thermal and concentration slip effects on MHD silver-water nanofluid flow past a permeable cone with suction/injection and viscous-Ohmic dissipation. *Heat Transfer Research*. 2019;50(14):1351-67.

19. Obayedullah M, Chowdhury M. MHD natural convection in a rectangular cavity having internal energy sources with non-uniformly heated bottom wall. *Procedia Engineering*. 2013;56:76-81.
20. Ouattara B. Prise en compte des caractéristiques thermophysiques des parois dans le processus de séparation des constituants d'un mélange binaire ou d'un nanofluide par diffusion thermogravitationnelle en milieu poreux: Université Paul Sabatier-Toulouse III; 2012.
21. Upreti H, Pandey AK, Kumar M, Makinde O. Ohmic Heating and Non-uniform Heat Source/Sink Roles on 3D Darcy–Forchheimer Flow of CNTs Nanofluids Over a Stretching Surface. *Arabian Journal for Science and Engineering*. 2020;45(9):7705-17.
22. Khouzam A. Étude analytique et numérique de la thermodiffusion en fluide binaire en présence de convection mixte: Université de Toulouse, Université de Toulouse III-Paul Sabatier; 2013.
23. Yacine L. Etude de la séparation thermogravitationnelle en milieu fluide ou poreux dans une enceinte soumise à des flux thermiques croisés: Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier; 2015.
24. Pandey AK, Kumar M. Effect of viscous dissipation and suction/injection on MHD nanofluid flow over a wedge with porous medium and slip. *Alexandria Engineering Journal*. 2016;55(4):3115-23.
25. Upreti H, Pandey AK, Kumar M. MHD flow of Ag-water nanofluid over a flat porous plate with viscous-Ohmic dissipation, suction/injection and heat generation/absorption. *Alexandria Engineering Journal*. 2018;57(3):1839-47.
26. Ghalambaz M, Tahmasebi A, Chamkha A, Wen D. Conjugate local thermal non-equilibrium heat transfer in a cavity filled with a porous medium: analysis of the element location. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2019;138:941-60.
27. Fadaei F, Shahrokhi M, Dehkordi AM, Abbasi Z. Forced-convection heat transfer of ferrofluids in a circular duct partially filled with porous medium in the presence of magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. 2019;475:304-15.
28. Combarous M. Convection naturelle et convection mixte en milieu poreux: Institut français du pétrole; 1970.
29. Guerroudj N, editor. Convection mixte dans un canal vertical muni de blocs poreux et soumis à des conditions aux limites oscillatoires (S23). Congrès français de mécanique; 2015: AFM, Association Française de Mécanique.
30. Joulin A. Instabilités convectives et absolues d'un mélange binaire en convection mixte dans un milieu poreux: Lille 1; 2001.
31. Joulin A, Ouarzazi MN. Convection mixte d'un mélange binaire en milieu poreux. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics-Physics-Astronomy*. 2000;328(4):311-6.
32. Hirata SC, Ouarzazi MN. Influence of horizontal through-flow on the linear properties of viscoelastic fluids convection in porous media. *Academie des Sciences Comptes Rendus Mecanique*. 2010;338(9):538-44.
33. Hussein IY, Ali LF. Mixed Convection in a Square Cavity Filled with Porous Medium with Bottom Wall Periodic Boundary Condition. *Journal of Engineering*. 2014;20(4):99-119.
34. Delache A, Ouarzazi N, Neel M-C. Structuration de la convection mixte en milieu poreux confiné latéralement et chauffé par le bas: effets d'inertie. *Comptes Rendus Mécanique*. 2002;330(12):885-91.
35. CHARRIER-MOJTABI M-C, MOJTABI A, ELHAJJAR B, editors. Nouvelle approche pour la séparation des constituants d'un mélange binaire en milieu poreux.

Congrès français de mécanique; 2007: AFM, Maison de la Mécanique, 39/41 rue Louis Blanc-92400 Courbevoie.

36. Delache A. Etude analytique et numérique des instabilités spatio-temporelles des écoulements de convection mixte en milieu poreux: comparaison avec l'expérience: Université des Sciences et Technologie de Lille-Lille I; 2005.
37. Mejni F. Structures synchronisées dans les écoulements inhomogènes de convection mixte en milieu poreux: université des sciences et technologies de lille, lille1; 2008.
38. Chattopadhyay A, Pandit SK, Sarma SS, Pop I. Mixed convection in a double lid-driven sinusoidally heated porous cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2016;93:361-78.
39. Kandaswamy P, Eswaramurthi M, Ng C. Transient buoyancy-driven convection of water around 4 C in a porous cavity with internal heat generation. *Physics of Fluids*. 2008;20(8):087104.
40. Saatdjian E. Phénomènes de transport et leurs résolutions numériques. 1998.
41. Pletcher RH, Tannehill JC, Anderson D. *Computational fluid mechanics and heat transfer*: CRC press; 2012.
42. Kawamura T, Takami H, Kuwahara K, editors. New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations. *Ninth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*; 1985: Springer.
43. Lamoitier JP. Exercices de programmation en Fortran IV. 1974.
44. Tu J, Yeoh GH, Liu C. *Computational fluid dynamics: a practical approach*: Butterworth-Heinemann; 2018.
45. Kumar DS, Dass AK, Dewan A. Analysis of non-Darcy models for mixed convection in a porous cavity using a multigrid approach. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*. 2009;56(8):685-708.
46. Iwatsu R, Hyun JM, Kuwahara K. Mixed convection in a driven cavity with a stable vertical temperature gradient. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1993;36(6):1601-8.
47. Waheed M, Odewole G, Alagbe S. Mixed convective heat transfer in rectangular enclosures filled with porous media. *ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2011;6(8):47-60.
48. Khanafer KM, Chamkha AJ. Mixed convection flow in a lid-driven enclosure filled with a fluid-saturated porous medium. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1999;42(13):2465-81.

ANNEXE A

A. DISCRETISATION DU THERME CONVECTIF $\left(U \frac{\partial \phi}{\partial X}, V \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)$

Un schéma Upwind du 3^{ème} ordre a été employé pour la discrétisation du terme convectif figurant dans le système d'équations décrivant le problème.

A.1 Schéma Upwind du 3^{ème} ordre

Considérons le développement en série de Taylor d'une variable dépendante ϕ négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, ce schéma est représenté comme suit :

$$U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_i^{3^{\text{ème}} \text{ ordre}} = U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_c^{4^{\text{ème}} \text{ ordre}} + \frac{1}{2} |U| \left\{ \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{\text{arr}}^{2^{\text{nd}} \text{ ordre}} - \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{\text{av}}^{2^{\text{nd}} \text{ ordre}} \right\} \quad [33] \quad (\text{A.1})$$

A.1.1 Différence centrale

$$spx_i = \Delta x_i + \Delta x_{i+1}$$

$$smx_i = \Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1}$$

$$\phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + spx_i \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} \quad (\text{A.2})$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta x_i \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x_i^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x_i^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} \quad (\text{A.3})$$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta x_{i-1} \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} - \frac{\Delta x_{i-1}^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} \quad (\text{A.4})$$

$$\phi_{i-2,j} = \phi_{i,j} - smx_i \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{smx_i^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} - \frac{smx_i^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} \quad (\text{A.5})$$

Pour arriver à l'expression donnant la différence centrale, trois étapes sont indispensables. L'étape de départ a pour but d'éliminer la dérivée troisième (ϕ^{III}) et la dernière étape pour éliminer la dérivée seconde (ϕ^{II}).

Multipliant (A.2) par $(-\Delta x_i^3)$ et (A.3) par spx_i^3 et faire la sommation :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta x_i^3 \phi_{i+2,j} = -\Delta x_i^3 \phi_{i,j} - spx_i \Delta x_i^3 \phi^I - \frac{\Delta x_i^3 spx_i^2}{2} \phi^{II} \\ + \\ spx_i^3 \phi_{i+1,j} = spx_i^3 \phi_{i,j} + spx_i^3 \Delta x_i \phi^I + \frac{spx_i^3 \Delta x_i^2}{2} \phi^{II} \end{array} \right.$$

$$-\Delta x_i^3 \phi_{i+2,j} + spx_i^3 \phi_{i+1,j} - (spx_i^3 - \Delta x_i^3) \phi_{i,j} = spx_i \Delta x_i (spx_i^2 - \Delta x_i^2) \phi^I + \frac{\Delta x_i^2 spx_i^2}{2} (spx_i - \Delta x_i) \phi^{II}$$

Prenant:

$$spx_i^2 - \Delta x_i^2 = \Delta x_{i+1} (2\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$$

Nous obtenons :

$$-\Delta x_i^3 \phi_{i+2,j} + spx_i^3 \phi_{i+1,j} - (spx_i^3 - \Delta x_i^3) \phi_{i,j} = (2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) spx_i \Delta x_i \Delta x_{i+1} \phi^I + \frac{\Delta x_i^2 spx_i^2 \Delta x_{i+1}}{2} \phi^{II}$$

(A.I)

De la même façon pour (A.4) et (A.5) :

$$\left\{ \begin{array}{l} smx_i^3 \phi_{i-1,j} = smx_i^3 \phi_{i,j} - smx_i^3 \Delta x_{i-1} \phi^I + \frac{smx_i^3 \Delta x_{i-1}^2}{2} \phi^{II} \\ + \\ -\Delta x_{i-1}^3 \phi_{i-2,j} = -\Delta x_{i-1}^3 \phi_{i,j} + smx_i \Delta x_{i-1}^3 \phi^I - \frac{smx_i^2 \Delta x_{i-1}^3}{2} \phi^{II} \end{array} \right.$$

$$-\Delta x_{i-1}^3 \phi_{i-2,j} + smx_i^3 \phi_{i-1,j} - (smx_i^3 - \Delta x_{i-1}^3) \phi_{i,j} = -smx_i \Delta x_{i-1} (smx_i^2 - \Delta x_{i-1}^2) \phi^I + \frac{smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2}{2} (smx_i - \Delta x_{i-1}) \phi^{II}$$

Prenant :

$$smx_i^2 - \Delta x_{i-1}^2 = \Delta x_{i-2}(2\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2})$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned} & -\Delta x_{i-1}^3 \phi_{i-2,j} + smx_i^3 \phi_{i-1,j} - (smx_i^3 - \Delta x_{i-1}^3) \phi_{i,j} \\ & = -(2\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2}) smx_i \Delta x_{i-1} \Delta x_{i-2} \phi^I + \frac{smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2}}{2} \phi^{II} \end{aligned} \quad (A.II)$$

L'extraction de la dérivée première des deux équations (A.I) et (A.II) nous donne :

$$\left\{ \begin{aligned} (2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) spx_i \Delta x_i \Delta x_{i+1} \phi^I &= -\Delta x_i^3 \phi_{i+2,j} + spx_i^3 \phi_{i+1,j} - (spx_i^3 - \Delta x_i^3) \phi_{i,j} \\ &\quad - \frac{\Delta x_i^2 spx_i^2 \Delta x_{i+1}}{2} \phi^{II} \end{aligned} \right. \quad (A.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} (2\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2}) smx_i \Delta x_{i-1} \Delta x_{i-2} \phi^I &= \Delta x_{i-1}^3 \phi_{i-2,j} - smx_i^3 \phi_{i-1,j} \\ &\quad + (smx_i^3 - \Delta x_{i-1}^3) \phi_{i,j} + \frac{smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2}}{2} \phi^{II} \end{aligned} \right. \quad (A.7)$$

Afin d'éliminer la dérivée seconde, multipliant (A.6) par $smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2}$ et (A.7) par $\Delta x_i^2 spx_i^2 \Delta x_{i+1}$ et faire la sommation

$$\left\{ \begin{aligned} smx_i^2 spx_i \Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i \Delta x_{i+1} (2\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) \phi^I &= -smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2} \Delta x_i^3 \phi_{i+2,j} \\ &\quad + spx_i^3 smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2} \phi_{i+1,j} \\ &\quad - smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2} (spx_i^3 - \Delta x_i^3) \phi_{i,j} \\ &\quad - \frac{smx_i^2 spx_i^2 \Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1}}{2} \phi^{II} \\ smx_i spx_i^2 \Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1} \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1} (2\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2}) \phi^I &= spx_i^2 \Delta x_{i-1}^3 \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1} \phi_{i-2,j} \\ &\quad - smx_i^3 spx_i^2 \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1} \phi_{i-1,j} \\ &\quad + spx_i^2 \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1} (smx_i^3 - \Delta x_{i-1}^3) \phi_{i,j} \\ &\quad + \frac{smx_i^2 spx_i^2 \Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1}}{2} \phi^{II} \end{aligned} \right.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_c^{i,j} &= d1xm2(i) \phi_{i-2,j} + d1xm1(i) \phi_{i-1,j} + d1xo(i) \phi_{i,j} + d1xp1(i) \phi_{i+1,j} \\ &\quad + d1xp2(i) \phi_{i+2,j} \end{aligned}} \quad (A)$$

Avec :

$$d1cx = smx_i spx_i^2 \Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1} \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1} (2\Delta x_{i-1} + \Delta x_{i-2}) \\ + smx_i^2 spx_i \Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i \Delta x_{i+1} (2\Delta x_i + \Delta x_{i+1})$$

$$d1xm2(i) = \frac{spx_i^2 \Delta x_{i-1}^3 \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1}}{d1cx}$$

$$d1xm1(i) = \frac{-smx_i^3 spx_i^2 \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1}}{d1cx}$$

$$d1xo(i) = \frac{spx_i^2 \Delta x_i^2 \Delta x_{i+1} (smx_i^3 - \Delta x_{i-1}^3) - smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2} (spx_i^3 - \Delta x_i^3)}{d1cx}$$

$$d1xp1(i) = \frac{spx_i^3 smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2}}{d1cx}$$

$$d1xp2(i) = \frac{-smx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_{i-2} \Delta x_i^3}{d1cx}$$

A.1.2 Différence arrière

De façon analogue que la différence centrale

$$smx_i = \Delta x_{i-2} + \Delta x_{i-1}$$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta x_{i-1} \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{i,j} \quad (\text{A.8})$$

$$\phi_{i-2,j} = \phi_{i,j} - smx_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{smx_i^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_{i,j} \quad (\text{A.9})$$

Multipliant (A.8) par smx_i^2 et (A.9) par $(-\Delta x_{i-1}^2)$ et faire la sommation, on aura:

$$\begin{cases} smx_i^2 \phi_{i-1,j} = smx_i^2 \phi_{i,j} - smx_i^2 \Delta x_{i-1} \phi^l \\ + \\ -\Delta x_{i-1}^2 \phi_{i-2,j} = -\Delta x_{i-1}^2 \phi_{i,j} + smx_i \Delta x_{i-1}^2 \phi^l \end{cases}$$

$$-\Delta x_{i-1}^2 \phi_{i-2,j} + smx_i^2 \phi_{i-1,j} = (smx_i^2 - \Delta x_{i-1}^2) \phi_{i,j} + smx_i \Delta x_{i-1} (\Delta x_{i-1} - smx_i) \phi^l$$

D'où :

$$smx_i \Delta x_{i-1} (\Delta x_{i-1} - smx_i) \phi^l = -\Delta x_{i-1}^2 \phi_{i-2,j} + smx_i^2 \phi_{i-1,j} - (smx_i^2 - \Delta x_{i-1}^2) \phi_{i,j}$$

Sachant que :

$$\Delta x_{i-1} - smx_i = \Delta x_{i-2}$$

Il vient alors :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{arr} = \frac{\Delta x_{i-1}}{smx_i \Delta x_{i-2}} \phi_{i-2,j} - \frac{smx_i}{\Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}} \phi_{i-1,j} + \frac{smx_i + \Delta x_{i-1}}{smx_i \Delta x_{i-1}} \phi_{i,j} \quad (B)$$

A.1.3 Différence avant

De même :

$$spx_i = \Delta x_i + \Delta x_{i+1}$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta x_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta x_i^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (A.10)$$

$$\phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + spx_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{spx_i^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (A.11)$$

Multipliant (A.10) par spx_i^2 et (A.11) par $(-\Delta x_i^2)$ et faire la sommation, on aura:

$$\begin{cases} spx_i^2 \phi_{i+1,j} = spx_i^2 \phi_{i,j} + spx_i^2 \Delta x_i \phi^l \\ + \\ -\Delta x_i^2 \phi_{i+2,j} = -\Delta x_i^2 \phi_{i,j} - spx_i \Delta x_i^2 \phi^l \end{cases}$$

$$-\Delta x_i^2 \phi_{i+2,j} + spx_i^2 \phi_{i+1,j} = (spx_i^2 - \Delta x_i^2) \phi_{i,j} + spx_i \Delta x_i (spx_i - \Delta x_i) \phi^l$$

D'où :

$$spx_i \Delta x_i (spx_i - \Delta x_i) \phi^l = -(spx_i^2 - \Delta x_i^2) \phi_{i,j} + spx_i^2 \phi_{i+1,j} - \Delta x_i^2 \phi_{i+2,j}$$

Il vient alors :

$$\boxed{sp x_i \Delta x_i (sp x_i - \Delta x_i) \phi^l = -(sp x_i^2 - \Delta x_i^2) \phi_{ij} + sp x_i^2 \phi_{i+1,j} - \Delta x_i^2 \phi_{i+2,j}} \quad (C)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{\text{arr}}^{\text{2nd ordre}} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{\text{av}}^{\text{2nd ordre}} \right\} &= \frac{\Delta x_i}{2smx_i \Delta x_{i-2}} \phi_{i-2,j} - \frac{smx_i}{2\Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}} \phi_{i-1,j} \\ &+ \left\{ \frac{sp x_i + \Delta x_i}{2sp x_i \Delta x_i} + \frac{smx_i + \Delta x_{i-1}}{2smx_i \Delta x_{i-1}} \right\} \phi_{i,j} \\ &- \frac{sp x_i}{2\Delta x_i \Delta x_{i+1}} \phi_{i+1,j} + \frac{\Delta x_i}{2sp x_i \Delta x_{i+1}} \phi_{i+2,j} \end{aligned}$$

Avec :

$$ai(i) = \frac{\Delta x_i}{2smx_i \Delta x_{i-2}}$$

$$bi(i) = -\frac{smx_i}{2\Delta x_{i-2} \Delta x_{i-1}}$$

$$ci(i) = \frac{sp x_i + \Delta x_i}{2sp x_i \Delta x_i} + \frac{smx_i + \Delta x_{i-1}}{2smx_i \Delta x_{i-1}}$$

$$di(i) = -\frac{sp x_i}{2\Delta x_i \Delta x_{i+1}}$$

$$ei(i) = \frac{\Delta x_i}{2sp x_i \Delta x_{i+1}}$$

Nœuds internes

$i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2$

$$\boxed{U \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|^i = (d1xm2(i)U + ai(i)|U|) \phi_{i-2,j} + (d1xm1(i)U + bi(i)|U|) \phi_{i-1,j} + (d1xo(i)U + ci(i)|U|) \phi_{i,j} + (d1xp1(i)U + di(i)|U|) \phi_{i+1,j} + (d1xp2(i)U + ei(i)|U|) \phi_{i+2,j}} \quad (D)$$

Nœuds près des parois

Pour les nœuds près des parois on va établir un schéma de Kawamura du premier ordre comme suit :

$i - 1, i$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta x_{i-1} \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|^i + \frac{(\Delta x_{i-1})^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|^i \quad (\text{A.12})$$

$i, i + 1$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta x_i \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|^i + \frac{(\Delta x_i)^2}{2} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|^i \quad (\text{A.13})$$

Multipliant (A.12) par $(-\Delta x_i^2)$ et (A.13) par $(\Delta x_{i-1})^2$ et faire la sommation, on aura:

$$\begin{cases} -\Delta x_i^2 \phi_{i-1,j} = -\Delta x_i^2 \phi_{i,j} + \Delta x_i^2 \Delta x_{i-1} \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|^i \\ + \\ \Delta x_{i-1}^2 \phi_{i+1,j} = \Delta x_{i-1}^2 \phi_{i,j} + \Delta x_i \Delta x_{i-1}^2 \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|^i \end{cases}$$

$$-\Delta x_i^2 \phi_{i-1,j} + \Delta x_{i-1}^2 \phi_{i+1,j} = (\Delta x_{i-1}^2 - \Delta x_i^2) \phi_{i,j} + \Delta x_i \Delta x_{i-1} (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i) \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|^i$$

Prenant :

$$s x_i = \Delta x_{i-1} + \Delta x_i$$

Nous obtenons :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|^i = \frac{-\Delta x_i^2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1} s x_i} \phi_{i-1,j} - \frac{(\Delta x_{i-1} - \Delta x_i)}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} \phi_{i,j} + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{\Delta x_i \Delta x_{i-1} s x_i} \phi_{i+1,j}$$

Il vient enfin :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_c^{i=2} = \frac{-\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} s x_i} \phi_{i-1,j} - \frac{(\Delta x_{i-1} - \Delta x_i)}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}} \phi_{i,j} + \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i s x_i} \phi_{i+1,j}$$

Avec :

$$d1xm1(i) = \frac{-\Delta x_i}{\Delta x_{i-1} s x_i}$$

$$d1xo(i) = -\frac{(\Delta x_{i-1} - \Delta x_i)}{\Delta x_i \Delta x_{i-1}}$$

$$d1xp1(i) = \frac{\Delta x_{i-1}}{\Delta x_i s x_i}$$

$$(A.12) \Rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{arr} = \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}}$$

$$(A.13) \Rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{av} = \frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}}{\Delta x_i}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{arr} = \frac{-1}{\Delta x_{i-1}} \phi_{i-1,j} + \frac{1}{\Delta x_{i-1}} \phi_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{av} = \frac{-1}{\Delta x_i} \phi_{i,j} + \frac{1}{\Delta x_i} \phi_{i+1,j}$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{arr}^{i=2} - \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_{av}^{i=2} \right\} = \frac{-1}{2\Delta x_{i-1}} \phi_{i-1,j} + \left(\frac{1}{2\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{2\Delta x_i} \right) \phi_{i,j} - \frac{1}{2\Delta x_i} \phi_{i+1,j}$$

Il vient alors :

$U \left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right ^{i=2} = (d1xm1(i)U + bi(i) U)\phi_{i-1,j} + (d1xo(i)U + ci(i) U)\phi_{i,j} + (d1xp1(i)U + di(i) U)\phi_{i+1,j}$	(E)
---	-----

Avec :

$$bi(i) = \frac{-1}{2\Delta x_{i-1}}$$

$$ci(i) = \frac{1}{2\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{2\Delta x_i}$$

$$di(i) = \frac{-1}{2\Delta x_i}$$

ANNEXE B

B. DISCRETISATION DU THERME DIFFUSIF $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2}\right)$ **Noeudsinterns**

Considérons le développement en séries de Taylor d'une variable dépendante ϕ négligeant les termes d'ordre supérieur à quatre.

$$\phi_{i+2,j} = \phi_{i,j} + spx_i \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^4}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j} ;$$

$$*-\Delta x_i^4; -\Delta x_{i-1}^4; -smx_i^4$$

$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} + \Delta x_i \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x_i^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x_i^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x_i^4}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j} ; *spx_i^4$$

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} - \Delta x_{i-1} \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x_{i-1}^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} - \frac{\Delta x_{i-1}^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta x_{i-1}^4}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j} ; *spx_i^4$$

$$\phi_{i-2,j} = \phi_{i,j} - smx_i \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{smx_i^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} - \frac{smx_i^3}{6} \frac{\partial^3 \phi}{\partial X^3} \Big|_{i,j} + \frac{smx_i^4}{24} \frac{\partial^4 \phi}{\partial X^4} \Big|_{i,j} ; *spx_i^4$$

Pour arriver à l'expression donnant la discrétisation du terme diffusif, trois étapes sont indispensables. L'étape de départ a pour but d'éliminer la dérivée quatrième (ϕ^{IV}), la suivante est l'élimination de la dérivée troisième (ϕ^{III}) et la dernière pour éliminer la dérivée première (ϕ^I).

Multipliant la première équation par $(-\Delta x_i^4)$ et la deuxième par spx_i^4 :

$$\begin{cases} -\Delta x_i^4 \phi_{i+2,j} = -\Delta x_i^4 \phi_{i,j} - \Delta x_i^4 spx_i \phi^I - \frac{\Delta x_i^4 spx_i^2}{2} \phi^{II} - \frac{\Delta x_i^4 spx_i^3}{6} \phi^{III} \\ spx_i^4 \phi_{i+1,j} = spx_i^4 \phi_{i,j} + spx_i^4 \Delta x_i \phi^I + \frac{spx_i^4 \Delta x_i^2}{2} \phi^{II} + \frac{spx_i^4 \Delta x_i^3}{6} \phi^{III} \end{cases}$$

$$\boxed{-\Delta x_i^4 \phi_{i+2,j} + spx_i^4 \phi_{i+1,j} = (spx_i^4 - \Delta x_i^4) \phi_{i,j} + spx_i \Delta x_i (spx_i^3 - \Delta x_i^3) \phi^I + \frac{spx_i^2 \Delta x_i^2}{2} (spx_i^2 - \Delta x_i^2) \phi^{II} + \frac{spx_i^3 \Delta x_i^3}{6} (spx_i - \Delta x_i) \phi^{III}}$$

(B.I)

De la même façon pour la première équation et la troisième

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta x_{i-1}^4 \Phi_{i+2,j} = -\Delta x_{i-1}^4 \Phi_{i,j} - \Delta x_{i-1}^4 s p x_i \phi^I - \frac{\Delta x_{i-1}^4 s p x_i^2}{2} \phi^{II} - \frac{\Delta x_{i-1}^4 s p x_i^3}{6} \phi^{III} \\ s p x_i^4 \Phi_{i-1,j} = s p x_i^4 \Phi_{i,j} - s p x_i^4 \Delta x_{i-1} \phi^I + \frac{s p x_i^4 \Delta x_{i-1}^2}{2} \phi^{II} - \frac{s p x_i^4 \Delta x_{i-1}^3}{6} \phi^{III} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} -\Delta x_{i-1}^4 \Phi_{i+2,j} + s p x_i^4 \Phi_{i+1,j} &= (s p x_i^4 - \Delta x_{i-1}^4) \Phi_{i,j} \\ -s p x_i \Delta x_{i-1} (s p x_i^3 + \Delta x_{i-1}^3) \phi^I & \\ + \frac{s p x_i^2 \Delta x_{i-1}^2}{2} (s p x_i^2 - \Delta x_{i-1}^2) \phi^{II} &- \frac{s p x_i^3 \Delta x_{i-1}^3}{6} (s p x_i + \Delta x_{i-1}) \phi^{III} \end{aligned}$$

(B.II)

Pour la première équation et la quatrième

$$\left\{ \begin{array}{l} -s m x_i^4 \Phi_{i+2,j} = -s m x_i^4 \Phi_{i,j} - s m x_i^4 s p x_i \phi^I - \frac{s m x_i^4 s p x_i^2}{2} \phi^{II} - \frac{s m x_i^4 s p x_i^3}{6} \phi^{III} \\ s p x_i^4 \Phi_{i-2,j} = s p x_i^4 \Phi_{i,j} - s p x_i^4 s m x_i \phi^I + \frac{s p x_i^4 s m x_i^2}{2} \phi^{II} - \frac{s p x_i^4 s m x_i^3}{6} \phi^{III} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} -s m x_i^4 \Phi_{i+2,j} + s p x_i^4 \Phi_{i-2,j} &= (s p x_i^4 - s m x_i^4) \Phi_{i,j} \\ -s p x_i s m x_i (s p x_i^3 + s m x_i^3) \phi^I &+ \frac{s p x_i^2 s m x_i^2}{2} (s p x_i^2 - s m x_i^2) \phi^{II} \\ - \frac{s p x_i^3 s m x_i^3}{6} (s p x_i + s m x_i) \phi^{III} & \end{aligned}$$

(B.III)

Afin d'éliminer la dérivée troisième, multipliant (B.I) par $\Delta x_{i-1}^3 (spx_i + \Delta x_{i-1})$ et (B.II) par $\Delta x_i^3 (spx_i - \Delta x_i)$

$$\begin{aligned} & -\Delta x_i^4 \Delta x_{i-1}^3 (spx_i + \Delta x_{i-1}) \phi_{i+2,j} + spx_i^4 \Delta x_{i-1} (spx_i + \Delta x_{i-1}) \phi_{i+1,j} = \\ & \Delta x_{i-1}^3 (spx_i + \Delta x_{i-1}) (\Delta x_i^4 - spx_i^4) \phi_{i,j} \\ & + spx_i \Delta x_i \Delta x_{i-1}^3 (spx_i^3 - \Delta x_i^3) (spx_i + \Delta x_{i-1}) \phi^I \\ & + \frac{spx_i^2 \Delta x_i^2 \Delta x_{i-1}^3}{2} (spx_i^2 - \Delta x_i^2) (spx_i + \Delta x_{i-1}) \phi^{II} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\Delta x_{i-1}^4 \Delta x_i^3 (spx_i - \Delta x_i) \phi_{i+2,j} + spx_i^4 \Delta x_i^3 (spx_i - \Delta x_i) \phi_{i-1,j} = \\ & \Delta x_i^3 (spx_i^4 - \Delta x_{i-1}^4) (spx_i - \Delta x_i) \phi_{i,j} \\ & - spx_i \Delta x_{i-1} \Delta x_i^3 (spx_i^3 + \Delta x_{i-1}^3) (spx_i - \Delta x_i) \phi^I \\ & + \frac{spx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i^3}{2} (spx_i^2 - \Delta x_{i-1}^2) (spx_i - \Delta x_i) \phi^{II} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\Delta x_{i-1}^3 \Delta x_i^3 (\Delta x_i (spx_i + \Delta x_{i-1}) + \Delta x_{i-1} (spx_i - \Delta x_i)) \phi_{i+2,j} \\ & + spx_i^4 \Delta x_{i-1}^3 (spx_i + \Delta x_{i-1}) \phi_{i+1,j} + spx_i^4 \Delta x_i^3 (spx_i - \Delta x_i) \phi_{i-1,j} = \\ & [\Delta x_{i-1}^3 (spx_i^4 - \Delta x_i^4) (spx_i + \Delta x_{i-1}) + \Delta x_i^3 (spx_i^4 - \Delta x_{i-1}^4) (spx_i - \Delta x_i)] \phi_{i,j} \\ & + spx_i \Delta x_{i-1} \Delta x_i \left[\begin{array}{l} \Delta x_{i-1}^2 (spx_i^3 - \Delta x_i^3) (spx_i + \Delta x_{i-1}) \\ -\Delta x_i^2 (spx_i^3 + \Delta x_{i-1}^3) (spx_i - \Delta x_i) \end{array} \right] \phi^I \\ & + \frac{spx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} \Delta x_{i-1} (spx_i^2 - \Delta x_i^2) (spx_i + \Delta x_{i-1}) \\ + \Delta x_i (spx_i^2 - \Delta x_{i-1}^2) (spx_i - \Delta x_i) \end{array} \right] \phi^{II} \end{aligned} \quad (A)$$

De la même façon pour (B.I) et (B.III)

$$\begin{aligned}
& -\Delta x_i^4 s m x_i^3 (s p x_i + s m x_i) \phi_{i+2,j} + s p x_i^4 s m x_i^3 (s p x_i + s m x_i) \phi_{i+1,j} = \\
& s m x_i^3 (s p x_i^4 - \Delta x_i^4) (s p x_i + s m x_i) \phi_{i,j} \\
& + s p x_i \Delta x_i s m x_i^3 (s p x_i^3 - \Delta x_i^3) (s p x_i + s m x_i) \phi^I \\
& + \frac{s p x_i^2 \Delta x_i^2 s m x_i^3}{2} (s p x_i^2 - \Delta x_i^2) (s p x_i + s m x_i) \phi^{II}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta x_i^3 s m x_i^4 (s p x_i - \Delta x_i) \phi_{i+2,j} + s p x_i^4 \Delta x_i^3 (s p x_i - \Delta x_i) \phi_{i-2,j} = \\
& \Delta x_i^3 (s p x_i^4 - s m x_i^4) (s p x_i - \Delta x_i) \phi_{i,j} \\
& - s p x_i \Delta x_i^3 s m x_i (s p x_i^3 + s m x_i^3) (s p x_i - \Delta x_i) \phi^I \\
& + \frac{s p x_i^2 \Delta x_i^3 s m x_i^2}{2} (s p x_i^2 - s m x_i^2) (s p x_i - \Delta x_i) \phi^{II}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta x_i^3 s m x_i^3 [\Delta x_i (s p x_i + s m x_i) + s m x_i (s p x_i - \Delta x_i)] \phi_{i+2,j} \\
& + s p x_i^4 s m x_i^3 (s p x_i + s m x_i) \phi_{i+1,j} + s p x_i^4 \Delta x_i^3 (s p x_i - \Delta x_i) \phi_{i-2,j} = \\
& [s m x_i^3 (s p x_i^4 - \Delta x_i^4) (s p x_i + s m x_i) + \Delta x_i^3 (s p x_i^4 - s m x_i^4) (s p x_i - \Delta x_i)] \phi_{i,j} \\
& + s p x_i \Delta x_i s m x_i \left[\begin{array}{l} s m x_i^2 (s p x_i^3 - \Delta x_i^3) (s p x_i + s m x_i) \\ - \Delta x_i^2 (s p x_i^3 + s m x_i^3) (s p x_i - \Delta x_i) \end{array} \right] \phi^I \\
& + \frac{s p x_i^2 \Delta x_i^2 s m x_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} s m x_i (s p x_i^2 - \Delta x_i^2) (s p x_i + s m x_i) \\ + \Delta x_i (s p x_i^2 - s m x_i^2) (s p x_i - \Delta x_i) \end{array} \right] \phi^{II} \tag{B}
\end{aligned}$$

Finalement l'élimination de la dérivée première rend le terme diffusif :

$$(A) \Rightarrow a p 2 \phi_{i+2,j} + a p 1 \phi_{i+1,j} + a m 1 \phi_{i-1,j} = a 0 \phi_{i,j} + a \phi^I \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i + a \phi^{II} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i$$

Avec :

$$a p 2 = -\Delta x_{i-1}^3 \Delta x_i^3 (\Delta x_i (s p x_i + \Delta x_{i-1}) + \Delta x_{i-1} (s p x_i - \Delta x_i))$$

$$a p 1 = s p x_i^4 \Delta x_{i-1}^3 (s p x_i + \Delta x_{i-1})$$

$$a 0 = \Delta x_{i-1}^3 (s p x_i^4 - \Delta x_i^4) (s p x_i + \Delta x_{i-1}) + \Delta x_i^3 (s p x_i^4 - \Delta x_{i-1}^4) (s p x_i - \Delta x_i)$$

$$a m 1 = s p x_i^4 \Delta x_i^3 (s p x_i - \Delta x_i)$$

$$a\phi^I = spx_i \Delta x_{i-1} \Delta x_i \left[\begin{array}{l} \Delta x_{i-1}^2 (spx_i^3 + \Delta x_i^3) (spx_i + \Delta x_{i-1}) \\ - \Delta x_i^2 (spx_i^3 + \Delta x_{i-1}^3) (spx_i - \Delta x_i) \end{array} \right]$$

$$a\phi^{II} = \frac{spx_i^2 \Delta x_{i-1}^2 \Delta x_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} \Delta x_{i-1} (spx_i^2 - \Delta x_i^2) (spx_i + \Delta x_{i-1}) \\ + \Delta x_i (spx_i^2 - \Delta x_{i-1}^2) (spx_i - \Delta x_i) \end{array} \right]$$

$$(B) \Rightarrow bp2\phi_{i+2,j} + bp1\phi_{i+1,j} + bm2\phi_{i-2,j} = b0\phi_{i,j} + b\phi^I \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i + b\phi^{II} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i$$

Avec :

$$bp2 = -\Delta x_i^3 smx_i^3 [\Delta x_i (spx_i + smx_i) + smx_i (spx_i - \Delta x_i)]$$

$$bp1 = spx_i^4 smx_i^3 (spx_i + smx_i)$$

$$b0 = smx_i^3 (spx_i^4 - \Delta x_i^4) (spx_i + smx_i) + \Delta x_i^3 (spx_i^4 - smx_i^4) (spx_i - \Delta x_i)$$

$$bm2 = spx_i^4 \Delta x_i^3 (spx_i - \Delta x_i)$$

$$b\phi^I = spx_i \Delta x_i smx_i \left[\begin{array}{l} smx_i^2 (spx_i^3 - \Delta x_i^3) (spx_i + smx_i) \\ - \Delta x_i^2 (spx_i^3 + smx_i^3) (spx_i - \Delta x_i) \end{array} \right]$$

$$b\phi^{II} = \frac{spx_i^2 \Delta x_i^2 smx_i^2}{2} \left[\begin{array}{l} smx_i (spx_i^2 - \Delta x_i^2) (spx_i + smx_i) \\ + \Delta x_i (spx_i^2 - smx_i^2) (spx_i - \Delta x_i) \end{array} \right]$$

Multipliant(A) par $b\phi^I$ et (B) par $(-a\phi^I)$ et faire la sommation :

$$\left\{ \begin{array}{l} b\phi^I ap2\phi_{i+2,j} + b\phi^I ap1\phi_{i+1,j} + b\phi^I am1\phi_{i-1,j} = b\phi^I a0\phi_{i,j} + b\phi^I a\phi^{II} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_i \\ -a\phi^I bp2\phi_{i+2,j} - a\phi^I bp1\phi_{i+1,j} - a\phi^I bm2\phi_{i-2,j} = -a\phi^I b0\phi_{i,j} - a\phi^I b\phi^{II} \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_i \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \Big|_i = \frac{1}{\underbrace{b\phi^I a\phi^{II} - a\phi^I b\phi^{II}}_{d2cx}} \left\{ \begin{array}{l} (b\phi^I ap2 - a\phi^I bp2)\phi_{i+2,j} \\ + (b\phi^I ap1 - a\phi^I bp1)\phi_{i+1,j} \\ - (b\phi^I a0 - a\phi^I b0)\phi_{i,j} \\ + (b\phi^I am1)\phi_{i-1,j} \\ - (a\phi^I bm2)\phi_{i-2,j} \end{array} \right.$$

Il vient alors :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial X^2} \right|_i = d2xp2(i)\phi_{i+2,j} + d2xp1(i)\phi_{i+1,j} + d2xo(i)\phi_{i,j} + d2xm1(i)\phi_{i-1,j} \\ + d2xm2(i)\phi_{i-2,j}$$

Avec :

$$d2xp2(i) = \frac{b\phi^l ap2 - a\phi^l bp2}{d2cx}$$

$$d2xp1(i) = \frac{b\phi^l ap1 - a\phi^l bp1}{d2cx}$$

$$d2xo(i) = \frac{(a\phi^l b0 - b\phi^l a0)}{d2cx}$$

$$d2xm1(i) = \frac{b\phi^l am1}{d2cx}$$

$$d2xm2(i) = \frac{-(a\phi^l bm2)}{d2cx}$$

ANNEXE C

DISCRETISATION DU THERME SOURCE

De façon analogue que précédemment pour discrétiser la dérivée première, la dernière étape a pour but d'éliminer la dérivée seconde. Il en découle l'expression suivante pour la dérivée première :

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{i,j} = d1xm2(i)\theta_{i-2,j} + d1xm1(i)\theta_{i-1,j} + d1xo(i)\theta_{i,j} + d1xp1(i)\theta_{i+1,j} + d1xp2(i)\theta_{i+2,j}$$

Symmetry-breaking in a porous cavity with moving side walls

Dalila Menacer^{1, 2, a *}, Saadoun Boudebous^{3, b}, Abdeldjalil Slimani^{2, c},
Lakhdar Saihi^{2, d}

¹Department of chemical engineering, University of Constantine3, Salah Boubnider,
25000, Algeria

²Unité de Recherche en Energies Renouvelables en Milieu Saharien URERMS, Centre de
Développement des Energies Renouvelables CDER, 01000, Adrar, Algeria

³Department of Mechanics, Larbi Ben M'hidi, OumElbouaghi, Algeria

^amenacerdalila2018@gmail.com, ^bS-Boudebous@yahoo.fr, ^cabdousli2005@gmail.com,
^dsadysaihi@live.fr

* corresponding author: menacerdalila2018@gmail.com

Keywords: momentum transfer, mixed convection, finite difference technique, Darcy-Brinkman-Forchheimer law.

Abstract. In this paper, a numerical investigation of the steady laminar mixed convection flow in a porous square enclosure has been considered. This structure represents a practical system such as an external through flow of cooled-air an electronic device from its moving sides. The heating was supplied by an internal volumetric source with an uniform distribution at the middle part of its bottom, while the other walls were assumed thermally insulated. Moreover, the momentum transfer in the porous substrate was numerically investigated using the Darcy-Brinkman-Forchheimer law. The governing equations of the posed problem have been solved by applying the finite difference technique on non-uniform grids. For all simulations, the Reynolds number and the porosity have been fixed respectively to $Re=100$ and $\phi=0.9$. Darcy's value was varied in the range from 0.001 to 0.1. The results detected the existence of a radical change in the contour patterns for Richardson number equal to 11.76 and 11.77 with fixed $Da=0.1$. This behavior signified that the fluid is fully convected for higher Darcy number.

Nomenclature

C_F	Forchheimer coefficient	ε	dimensionless length of heat source
Da	Darcy number	λ	Ratio of the effective thermal conductivity of the fluid to that thermal kinematic of the solid
g	gravitational acceleration [m/s^2]	μ	dynamic viscosity [Pa/s]
Gr	Grashof number	ν	fluid kinematic viscosity, μ/ρ_f [m^2/s]
K	permeability of the porous medium [m^2]	ρ_f	fluid density [kg/m^3]
l	length of heat source [m]	θ	dimensionless temperature
L	enclosure length [m]		

Nu	Nusselt number	τ	dimensionless time
Pr	Prandtl number	ψ	dimensionless stream function
Re	Reynolds number	Ψ	stream function
Ri	Richardson number	ω	dimensionless vorticity
t	time	Ω	vorticity
T	temperature [k]	<i>Subscripts</i>	
U,V	dimensionless velocity components	—	Average value
V_0	side walls velocity cavity [m/s]	c	refers to cold
X,Y	dimensionless coordinates	e	refers to effective property
<i>Greek symbols</i>		h	refers to hot
α	thermal diffusivity of porous medium [m^2/s]	i	refers to X location of a grid point
β	thermal expansion coefficient [k^{-1}]	j	refers to Y location of a grid point

Abbreviations

CNTs : Carbon nanotubes

MWCNT : Multi-Walled carbon nanotubes

SWCNT : Single-Walled carbon nanotubes

Introduction

The evolution of the fluid flow within porous media has received a great attention because of its importance in geophysical and energy-related engineering problems as well as in the environment such as heat transfer and flow in solar ponds [1], electronic equipment cooling [2], post-accident cooling of nuclear reactors, packed bed solar energy storage, geothermal extraction, energy storage devices, thermal insulation systems and contaminant transport in groundwater [3], thermal design of buildings, commercial refrigeration [4]. Other areas of applications are in food processing, grain storage, soil heating, storage of radioactive waste, porous radiant burners [5], and uncovered flat plate solar collectors having rows of vertical strips collector [6] etc. The classical free convection in horizontal porous layers uniformly heated from below was studied about 40 years ago, beginning with the pioneering studies of Horton and Rogers [7] with other of Lapwood [8]. These authors have analyzed the stability of flow through a porous medium bounded by an infinite horizontal layer having a locally heated lower wall and cooled on the upper wall, which constitutes an analogy of the problem of Rayleigh. While basing itself on the method of stability linear, they predicted the number of Rayleigh critical marking the threshold of the convection. Buoyant or forced convective flow inside a rectangular cavity filled with a fluid-saturated porous medium is gaining attention towards researchers all over the world. Employing differential transformation method (DTM), the combined effect of chemical reaction and slip flow of micropolar fluid through a permeable wedge with Hall and ion slip currents was studied by K. Singh et al [9]. It is clearly seen from the obtained result that the chemical reaction parameter, mass transfer rate and slip parameter increase on

enhancing in Schmidt number. The magnetic nanofluid forced convection heat transfer in a pipe partially filled with porous medium is documented numerically by Fadaei et al [10]. The combined consequences of the thermal boundary layer on the magnetic field and the porous medium lead to a higher intensity and disturbance. They found that under the influence of the magnetic field induced by a solenoid with a current intensity of 10A, the average Nusselt number value increases up to 30%. However, the associate nonlinear equations have been solved by finite volume technique to explore the effects of different parameters on mixed convection in a porous media filled and partially heated lid-driven cavity with an open side of the computational study of N.H. AbouHamdeh et al [11]. They have concluded that flow field inside the box is really complex due to both opening side and moving wall of the cavity and the heat transfer rate becomes stronger for higher values of Grashof number and boosting of heater length. A companion paper of Saravanan et al [5] was based on the effects of the thermal non-equilibrium effects on natural convection inside a square cavity by internal heat generation with different boundary conditions for symmetrical cooling. A bifurcation was observed when the system moves towards thermal equilibrium. The natural convection in a cavity filled with a porous medium was studied by M. Ghalambaz et al [12] considering the effects of local thermal non-equilibrium and using a finite element analysis to solve the governing equations. It is also found that the case in which the active elements are in the center of the wells corresponds to the highest rate of heat transfer. In contrast, the one, in which the cold element is at the bottom and the hot element is at the top wall corresponds to the lowest rate of heat transfer. The focus of research in reference [13] have been on the effect of viscous and ohmic dissipation, heat generation/absorption, and slip on MHD flow of nanofluid over a stretching cylinder and a permeable cone respectively with suction/injection. The governing equations were solved numerically by applying the Runge-Kutta-Fehlberg with shooting procedure. The results reveal that an enhancing in velocity slip parameter shows a dual nature in the injection region, while it depreciates in the suction region. Moreover, the same work about a permeable cone [14] has also found that the Sherwood and Nusselt numbers decrease with augmentation in magnetic field and velocity slip parameters, whereas, they confirm a reverse trend when mass flux parameter moves from injection to suction region. There is a periodic permeability on the onset of convection in a porous layer which heated from bellow in the work of Rees and Barletta [15] where the governing equations were approximated using an eighth-order finite difference. At this end it has been shown that only the Floquet number ($\nu=1$) corresponds to the three-dimensional onset modes. Furthermore, the increase of permeability periodic decreases the critical Rayleigh number. A numerical simulation of mixed convection flow is carried out by A. Chattopadhyay et al [16] for a porous enclosure sinusoidally heated from right wall which is in motion with the left one and thermally insulated from two opposite walls using compact scheme. Three different configurations are considered depending on the direction of moving walls. It is found that the flow features affected by Darcy number are not the effect of same in case I and case II, the flow motion in free convection is very slow, and due to increasing the amplitude value, heat transfer increases. A computational work has been performed to analyze the 3D Darcy-Forchheimer flow of CNTs nanofluid over a stretching surface [17]. The numerical approach Runge-Kutta-Fehlberg has been utilized to solve the problem equations. It is noted that the increasing in Eckert number results in the increment of thermal boundary layer. Furthermore, the absolute value of local Nusselt number for

MWCNT is more than SWCNT. A rich variety of important analytical, numerical, and experimental results have been published on mixed convection in porous media with phenomenon of behavior change of the fluid flow what is called Bifurcation. The first tentative to study on this topic in porous media was the work of Kim et al [18] whose discussed numerically the transient conjugate heat transfer of a solid of thickness L whose the left wall is imposed to uniform heat flux and the right side is insulated. The solid wall is cooled by a single-phase fluid specified by a pressure difference. It is shown that the steady-state temperature is the shortest when the architecture has an optimal number of bifurcation levels returns for a fixed driving pressure. The authors of reference [16] have treated this problem in the case when both the vertical walls of the square cavity are moving upward. Their results have captured a disappearance of the symmetric behavior of the two cells circulation as time progresses and for different Darcy numbers with values of Richardson number ranging between 0.1 and 100. Recently, Yang and Vafai[19] demonstrated the bifurcation phenomenon of temperature gradient for a convective heat transfer inside a channel filled with a porous region subject to a constant heat flux and different internal heat generation using the local thermal non-equilibrium conditions model. It was obtained that the bifurcation can also occur for the constant temperature boundary condition over a given axial length. The effect of viscous dissipation and suction/injection on MHD nanofluid flow over a wedge with porous medium and slip was studied by A.K. Pandey and M. Kumar [20]. The system of governing equations has been solved numerically through shooting scheme of Runge-Kutta. They also derived that the temperature of nanoparticles reduces with an increasing in suction parameter while its behavior is opposite for injection parameter. Using the same numerical approach in the reference [21] which is about the consequences of heat generation/absorption and suction/injection on MHD flow of Ag-water nanofluid over a flat porous plate with viscous-Ohmic dissipation. They found that the Nusselt number reduces on increasing the values of porosity while it increases as raise in the suction/injection parameter and with increasing in nanoparticles' volume friction, the momentum boundary layer declines.

A very few works have been done on this context. The current study is differs from that of case III in the work of Chattopadhyay et al [16]. In this study a partially heat source was introduced at the middle of the bottom. Therefore, various structures of the mixed convection effects on the stability of flow behavior were established. The direction of movement of the sliding walls as to oppose the current due to buoyancy forces. This movement has created a competition between the shear effect and buoyancy force, thus causing the phenomenaof changes in the behavior of the fluid flow (bifurcation). This work will be the subject of special attention for collecting solar rays for building ventilation needs and will also be a design tool for improving the cooling parts in electronic boxes against the heat dissipation. This is due to the request to their small sizes and high power. Currently the most efficient cooling system consists of the injection of an air flow which is modeled by moving walls at constant low temperature, etc.

Model Description

The basic geometry is a square porous enclosure embedded in a homogeneous fluid whose lower wall has a centrally located heat source having a four fifth of the dimensionless length which is assumed to be isothermally heated at a constant temperature T_h . The sidewalls are cooled and moving up at a constant velocity V_0 . All other parts of the

cavity are considered to be adiabatic. The physical model considered here is described in Fig. 1.

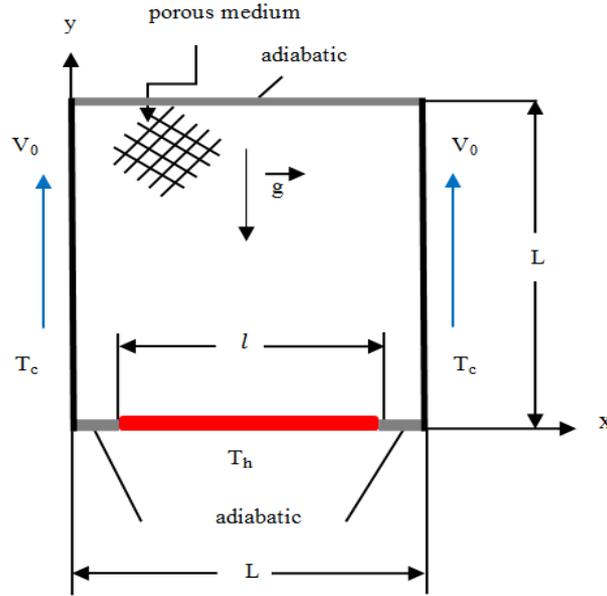


Fig. 1: Schematic representation of the problem

Governing Equations

The equations describing this motion are non-dimensionalized by the following parameters:

$$X = \frac{x}{L}, Y = \frac{y}{L}, U = \frac{u}{V_0}, V = \frac{v}{V_0}, \tau = t \frac{V_0}{L}, \theta = \frac{(T - T_c)}{(T_h - T_c)}, \omega = \frac{\Omega L}{V_0}, \psi = \frac{\Psi}{LV_0}$$

Continuity Equation

The non-dimensional continuity equation can be written as follows:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (1)$$

Momentum Equation

During the most recent decades, the considerable greater part of studies in porous media has dealt which is presently regularly known as the Brinkman–Forchheimer modified Darcy or the generalized model.

$$\frac{\rho_f}{\phi} \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{\phi} (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla(P) + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu}{K} \vec{V} + \frac{\mu}{\phi} \nabla^2 \vec{V} - \frac{C_F \rho_f}{K^{1/2}} |\vec{V}| \vec{V} \quad [22] \quad (2)$$

With:

$$C_F = \frac{1.75}{\sqrt{150 \text{Da} \phi}} \text{ and } |\vec{V}| = \sqrt{U^2 + V^2}$$

The physical meanings of the quantities are mentioned in nomenclature.

Energy Equation

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \lambda \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (3)$$

With:

$$\lambda = 1$$

The momentum equations in the x and y directions are reduced into one elliptic of vorticity after the elimination of the pressure term between them and one parabolic non-dimensional equation of stream function by the introduction of the expressions describing the velocity components as the derivative of the stream function which characterized by:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4)$$

Vorticity Equation

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + \frac{1}{\phi} \left(U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} \right) = \phi \left(-\frac{1}{\text{ReDa}} - C_F |\vec{V}| \right) \omega - C_F \left(V \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial X} - U \frac{\partial |\vec{V}|}{\partial Y} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \phi \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (5)$$

Stream Function Equation

The stream function is calculated from its definition which given by Eq. 4

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (6)$$

With:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad (7)$$

Where:

Pr, Re, Gr, Ri and Da indicates, respectively, the numbers of Prandtl, Reynolds, Grashof, Richardson and Darcy which are defined by the following relations:

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha_e}, \quad \text{Re} = \frac{V_0 L}{\nu}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta L (T_c - T_f) L^3}{\nu^2}, \quad \text{Ri} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2}, \quad \text{Da} = \frac{k}{L^2} \quad (8)$$

The local Nusselt number is defined as:

$$\text{Nu}(X) = -\left. \frac{\partial \theta}{\partial X} \right|_{Y=0} \quad (9)$$

The average Nusselt number ($\overline{\text{Nu}}$) is calculated by integrating the local Nusselt number (Nu) along the heated wall and is given by:

$$\overline{Nu} = \int_0^1 Nu(X) dX \quad (10)$$

The appropriate boundary conditions in the dimensionless form are:

$$\theta = 0 \quad U = 0 \quad V = 1 \text{ at } X = 0 \text{ and } 1 \text{ and } 0 < Y < 1 \quad (11)$$

$$\theta = 1 \quad U = V = 0 \text{ at } Y = 0 \text{ and } \frac{1-\varepsilon}{2} \leq X \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad V = 0 \text{ at } Y = 0 \text{ and } 0 < X < \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2} < X < 1 \quad (13)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U = V = 0 \text{ at } Y = 1 \text{ and } 0 < X < 1 \quad (14)$$

Where $\varepsilon=1/L$ is the dimensionless length of heat source.

For stream function, it is taken $\psi=0$ at the solid boundaries.

The value of the vorticity on a solid boundary can be computed according to the following expressions which are obtained from Eq. 6:

$$\omega_{1,j} = \frac{2[\psi_{(1,j)} - \psi_{(2,j)} - V_0 \Delta X_1]}{\Delta X_1^2} \quad (15)$$

$$\omega_{nxt,j} = \frac{2[\psi_{(nxt,j)} - \psi_{(nxt-1,j)} + V_0 \Delta X_{nxt-1}]}{\Delta X_{nxt-1}^2} \quad (16)$$

$$\omega_{i,1} = \frac{2[\psi_{(i,1)} - \psi_{(i,2)}]}{\Delta Y_1^2} \quad (17)$$

$$\omega_{i,nyt} = \frac{2[\psi_{(i,nyt)} - \psi_{(i,nyt-1)}]}{\Delta Y_{nyt-1}^2} \quad (18)$$

Numerical Procedure

Finite Difference Method is employed to solve numerically the governing equations: Eq. 3, Eq. 5 and Eq. 6 together with the initial and limit conditions. The Runge-Kutta fourth order method is applied for the discretization of the temporal terms. In addition the solving technique is based on a central differencing of fourth order to discretize the first order derivative partial represented by (source term equation of energy and velocities), as well as the diffusive terms whereas the usage of the third order Upwind scheme [23] is preferred for the convective terms. In order to obtain converged solutions at each time step, a Non Linear over-relaxation (N.L.O.R) scheme [24] is followed to solve the stream function equation.

Accuracy and Validation

The numerical computations were performed with non-uniform mesh structure of 41x41, 61x61, 81x81, and 101 x 101, by checking the grid refinement sensitivity on the average Nusselt number of various Darcy number presented in Table 1. It is observed that the grid system independence is achieved with a structure of size 101x101 for the range of

Darcy numbers considered here in agreement with the finding of the work [25]. The grid dimension is presented in Fig. 2.

In order to verify the accuracy of the current numerical technique, the values of the average Nusselt number given by Eq. 10 are listed in Table 2, support very well the validity of the proposed model. Moreover, the temperature profile across the vertical mid-plane is shown in Fig. 3. As seen in this figure, that the results are in very well agreement with those of Kumar et al [25]. Furthermore the streamlines and temperature contours were shown in the Fig. 4 are in excellent agreement with those of this work [25]. Hence, these comparisons show an important accuracy of the present numerical procedure to study the problem reported here.

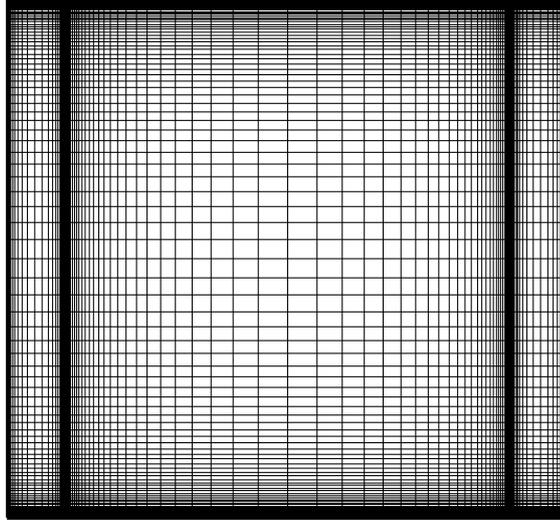


Fig. 2: A view of the utilized mesh

Table 1: The effect of grid refinement on average Nusselt number of various Darcy number

Darcy number	Grid system			
	41x41	61x61	81x81	101x101
Da=10 ⁻³	5.182	6.272	6.888	7.210
Da=10 ⁻²	12.341	14.682	15.323	15.131
Da=10 ⁻¹	14.882	14.884	14.475	16.119

Table 2: Average Nusselt Number \overline{Nu} at the heated wall among the present work and that given by the Brinkman-Forchheimer Darcy model of Kumar et al [25]

Darcy number	Present(\overline{Nu})	D.S Kumar
Da=10 ⁻³	7.210	7.181
Da=10 ⁻²	15.131	15.146
Da=10 ⁻¹	16.119	16.008

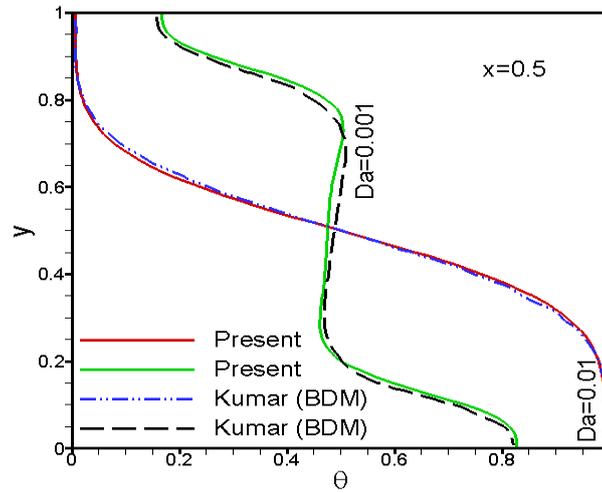


Fig. 3: Temperature profile along the vertical centerline at different Darcy numbers for $Ri=10^{-2}$, $Gr=10^4$ and $\phi=0.9$

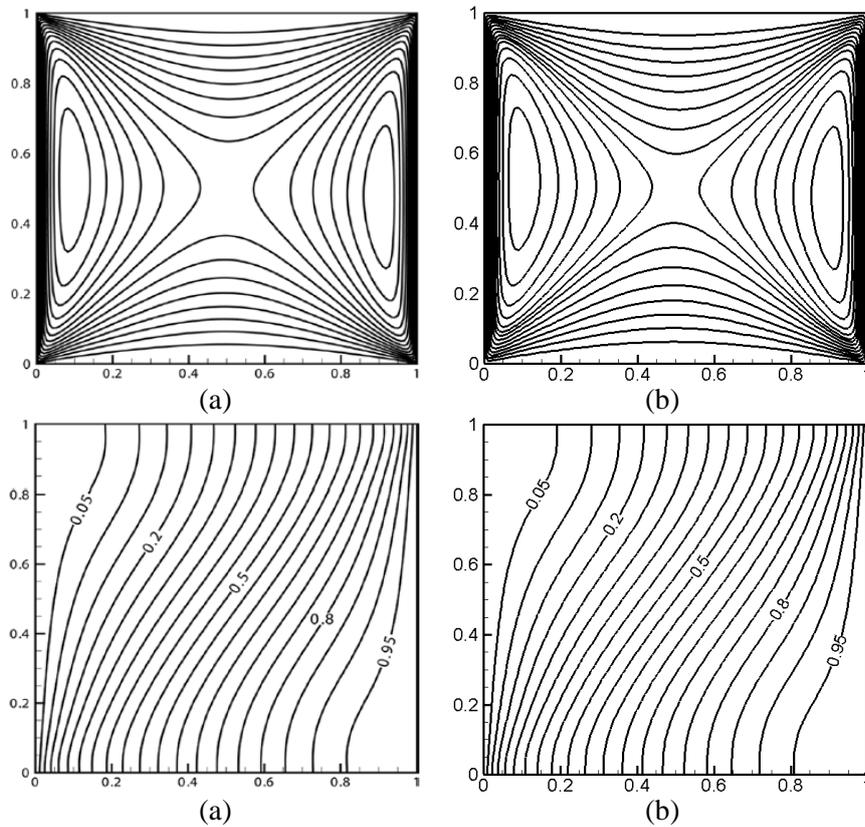


Fig. 4: Comparison of streamlines and isotherms between (a) Brinkman-Forchheimer Darcy model of Kumar et al [25] and (b) the present prediction for $Ri=10^{-2}$, $Gr=10^4$ and $\phi=0.9$

Results and Discussion

The associated computation process has been developed by considering the air as the fluid chosen with Prandtl number, $Pr=0.71$. The normalized length ε of the constant heat source at the lower wall is equal to 0.8, the porosity value $\phi=0.9$ and the time step $\Delta t=2.10^{-5}$ were kept as fixed in all calculations performed here, while the Darcy parametric was set

to 0.001, 0.01 and 0.1. This end value of Darcy number corresponds to very high permeability for which the behavior of the porous medium is close to a pure fluid. $Ri=11.76$ and $Ri=11.77$ were the two values of Richardson number have been considered in this work. The flow patterns, the temperature distributions and the transient heat transfer were plotted by the contours of streamlines, isotherms and time-wise evolution of average Nusselt number.

Richardson effect on contours of streamlines for $Da=0.1$

From the flow fields correspondingly for each value of Richardson number (see Fig. 5). It is also seen in Fig. 5(a) that the flow consists two counter-rotating cells of different shapes and intensities for $Ri=11.76$. It is observed that the left cell occupies the majority of the cavity. This symmetry breaking was resulted from effects of the flow activity on this side through the interaction of thermal buoyancy force due to temperature difference and viscous effect of sliding walls near the left wall. Visual examination of the streamline patterns in Fig. 5(b) reveals that there is a significant bifurcation towards a symmetrical flow structure suddenly appears in the left and right halves of the closed body when the value of this same parameter increases up to $Ri=11.77$. So a new regime of behavior was defined. In addition to the two counter-rotating main cells are almost symmetrical about the mid-length of the enclosure, two weaker cells are formed at the sides of the moving walls under the shear effect of these sides. The central pair of counter-rotating cells was induced by the buoyant forces at the level of the hot part.

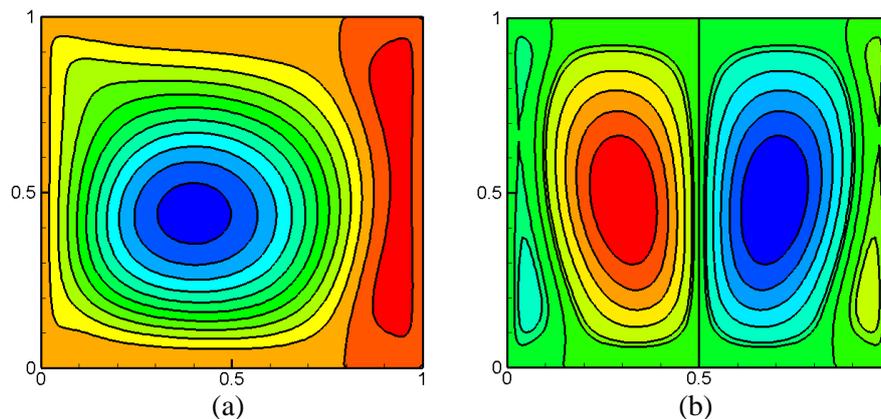


Fig. 5: Streamlines of the flow for (a) $Ri=11.76$ and (b) $Ri=11.77$

Richardson effect on isotherm contours for $Da=0.1$

The isotherm lines are illustrated clearly in Fig. 6. It is observed a remarkable change in the isotherm patterns. For $Ri=11.76$, the temperature distribution inside the cavity is non-symmetric. It's also detected from the isotherm contours (see Fig. 6(a)), the existence of thermal gradients just near the left wall. It should be noted that whole of the heat recovered from the hot part at bellow is transmitted through this side of the cavity. This fact is due to the interaction of conduction and convection. However, in Fig. 6(b), the heat is symmetrically transferred upward by convection with respect to the vertical centerline to the top in the form of a thermal feather under the effect of the two counter-rotating main cells. It remains to prove that the highest temperatures are located at the center of the enclosure. In this flow regime, the heat is dissipated evenly across the sliding walls.

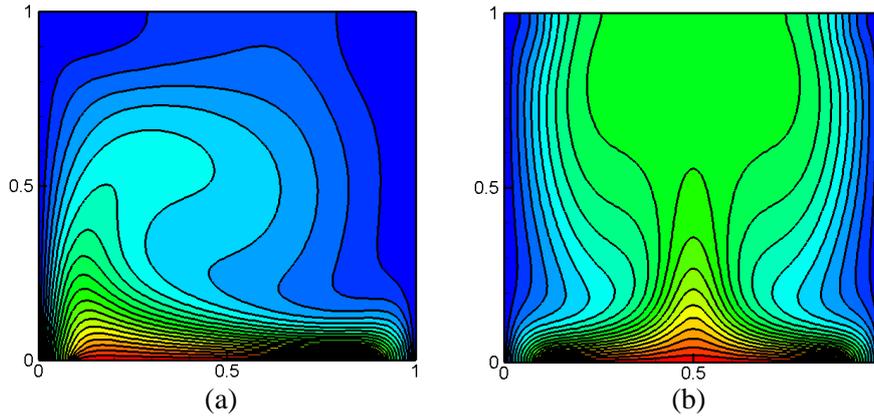


Fig. 6: Isotherms of the flow for (a) $Ri=11.76$ and (b) $Ri=11.77$

Richardson effect on the heat flux for $Da=0.1$

In order to study the transient heat transfer phenomena inside the enclosure, a time-wise evolution of the average Nusselt number along heated part at the bottom is displayed easily in Fig. 7. It is seen also that an interesting fluctuations at the value of this number during a dimensionless time τ occurs in between 0 and 13 (see Fig. 7(a)). After this initial instability, the obtain value of average Nusselt number decreases steadily as shown in Fig. 7(b), to stabilize at a fixed value ($\overline{Nu}=5.239$) for $Ri=11.77$, whereas for the value of this end equals to 11.76 the flow presents a significant change in behavior which results in the passage from the first stabilization of $\overline{Nu}=5.8459$ to the second one at $\overline{Nu}=5.4706$. According to the Fig. 7(b), this phenomenon of bifurcation begins to occur at $\tau=70$.

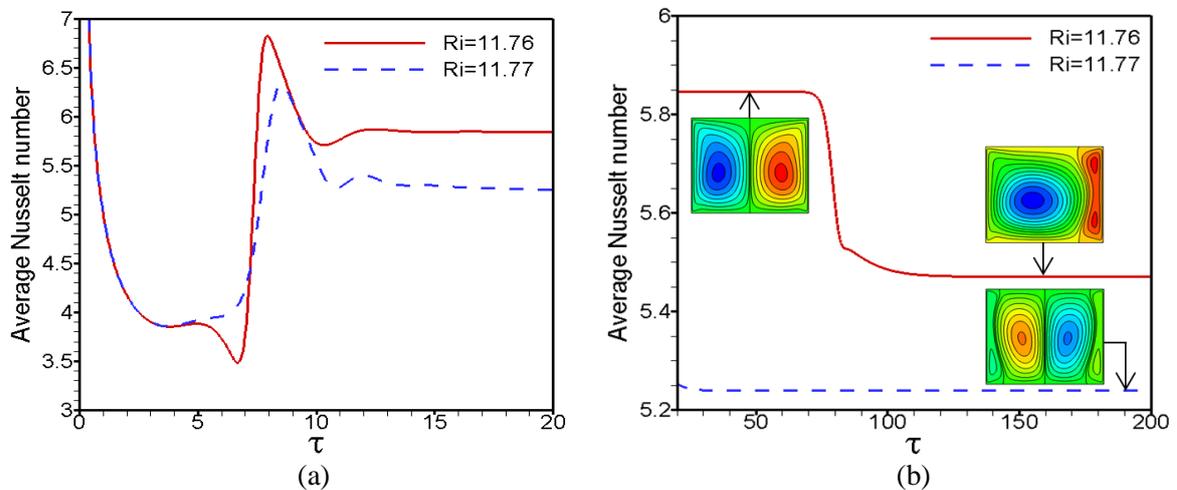
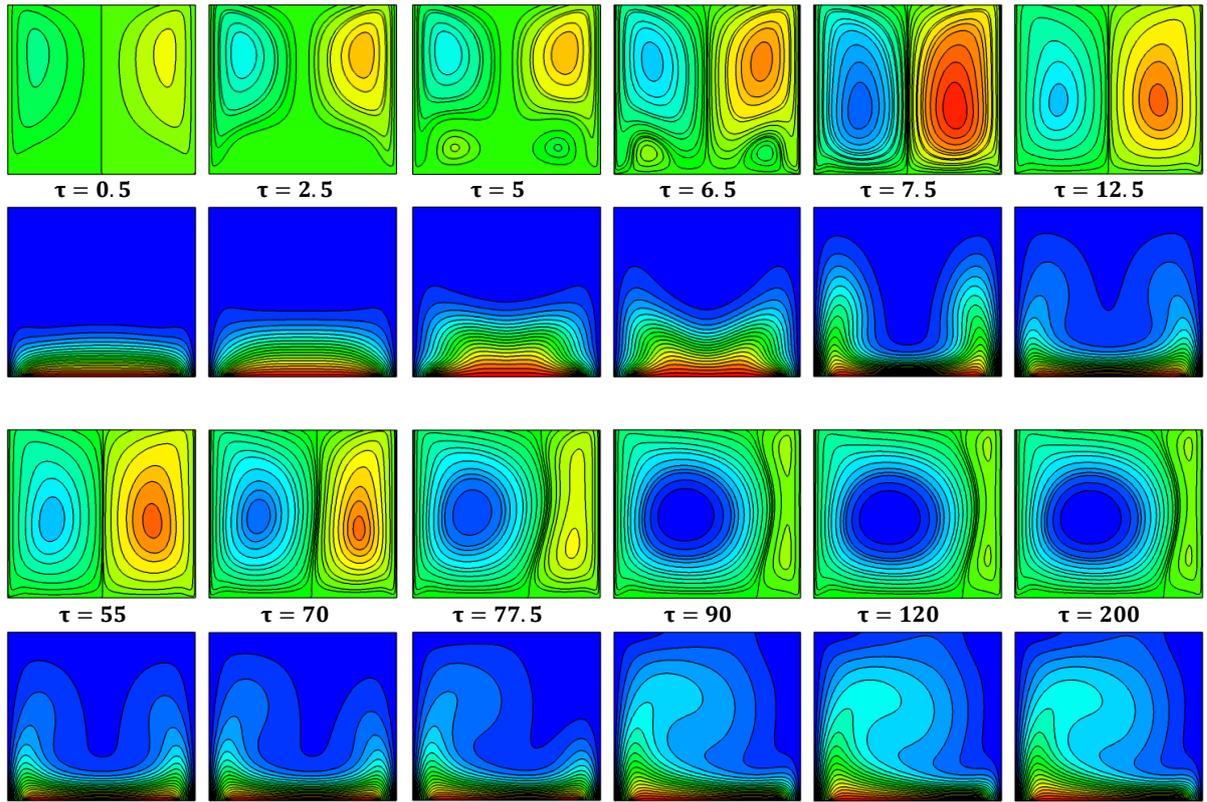


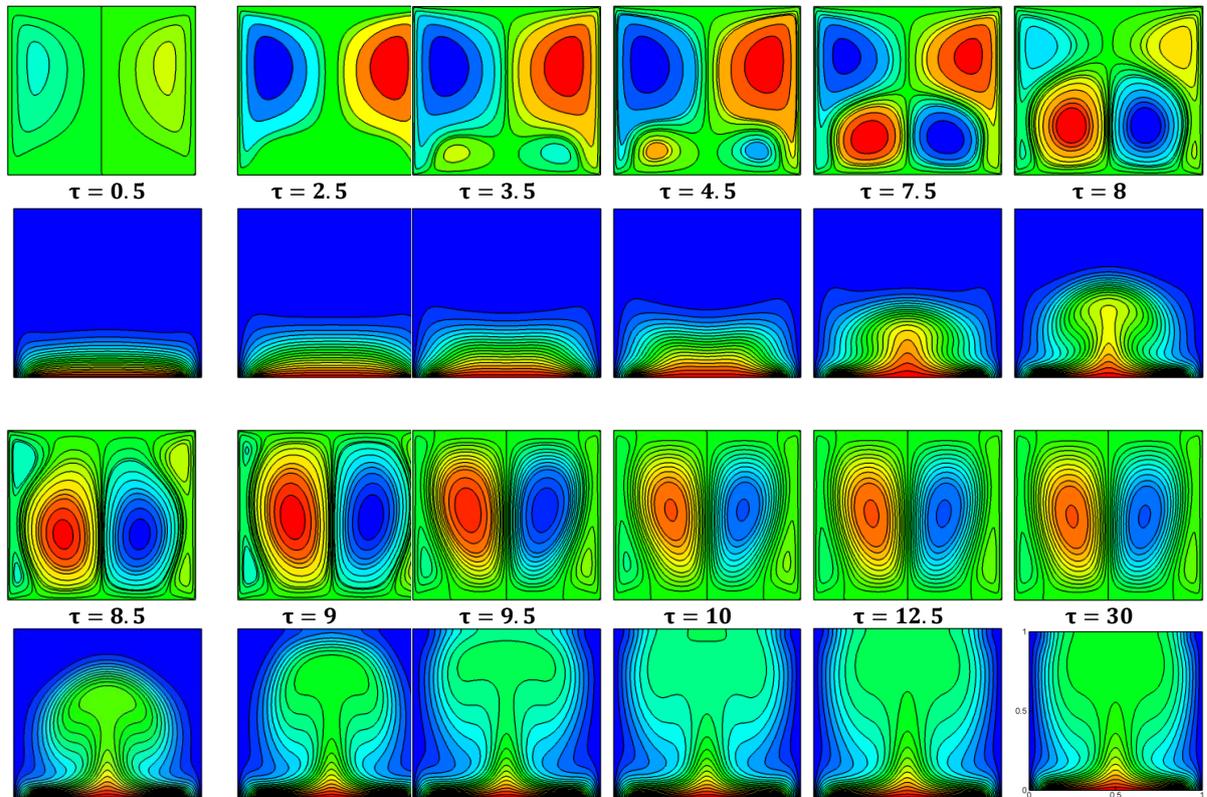
Fig. 7: Time-wise evolution of average Nusselt number for (a) $0 \leq \tau \leq 20$ and (b) $20 \leq \tau \leq 200$

Richardson effect on flow behavior for $Da=0.1$

For both values of Richardson's number considered in this work. Fig. 8(a) and (b) capture the formation of the different vortices as time progresses. This scheme describes for the first time ($\tau \leq 2.5$), the crucial role of the moving lids in the structure of the flow witch characterized by two counter- rotating cells. Then two other few weaker cells appears just above the heated part that develop progressively to about $\tau=3.5$. It's from this moment the two distribution patterns are distinguished. Moreover, it is interesting to note that, for $Ri = 11.76$ (see Fig. 8(a)) these two secondary cells are going somewhat to compressed towards the corner's bottom under the effect of the two main cells formed at both the sliding walls and they also disappeared at $\tau=7.5$, giving way to their development. Whereas this symmetrical nature will gradually disappear around $\tau=70$. As time passes, the left clockwise cell occupies the whole cavity is strengthen, while the right counterclockwise one is weaken and shrinks in size. In this flow regime, an important activity of flow towards the left side of the cavity, this causes a more energy to be carried away from the hot part at bellow, thus causing significant changes in the flow behavior. In this flow regime, the heat energy is transferred across the cavity by conduction and convection. As the Richardson number increases of only one hundredth ($Ri=11.77$) and as time progresses (seen Fig. 8(b)), the two cells which induced by thermal buoyancy forces resulting from the centrally located heat source at the lower lid are strongly favoring the pressure of the other two cells which induced by shear forces just towards the moving walls. In this case, almost the heat energy is symmetrically carried away across the center of enclosure.



(a)

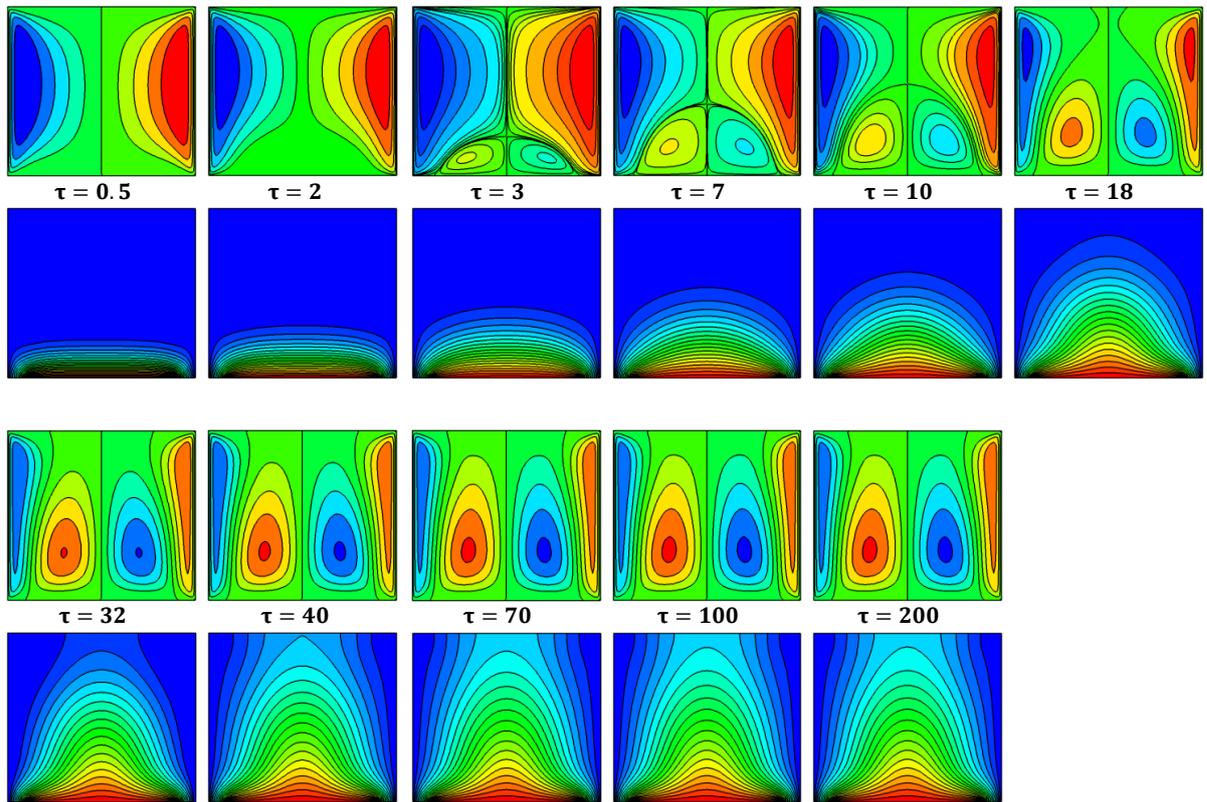


(b)

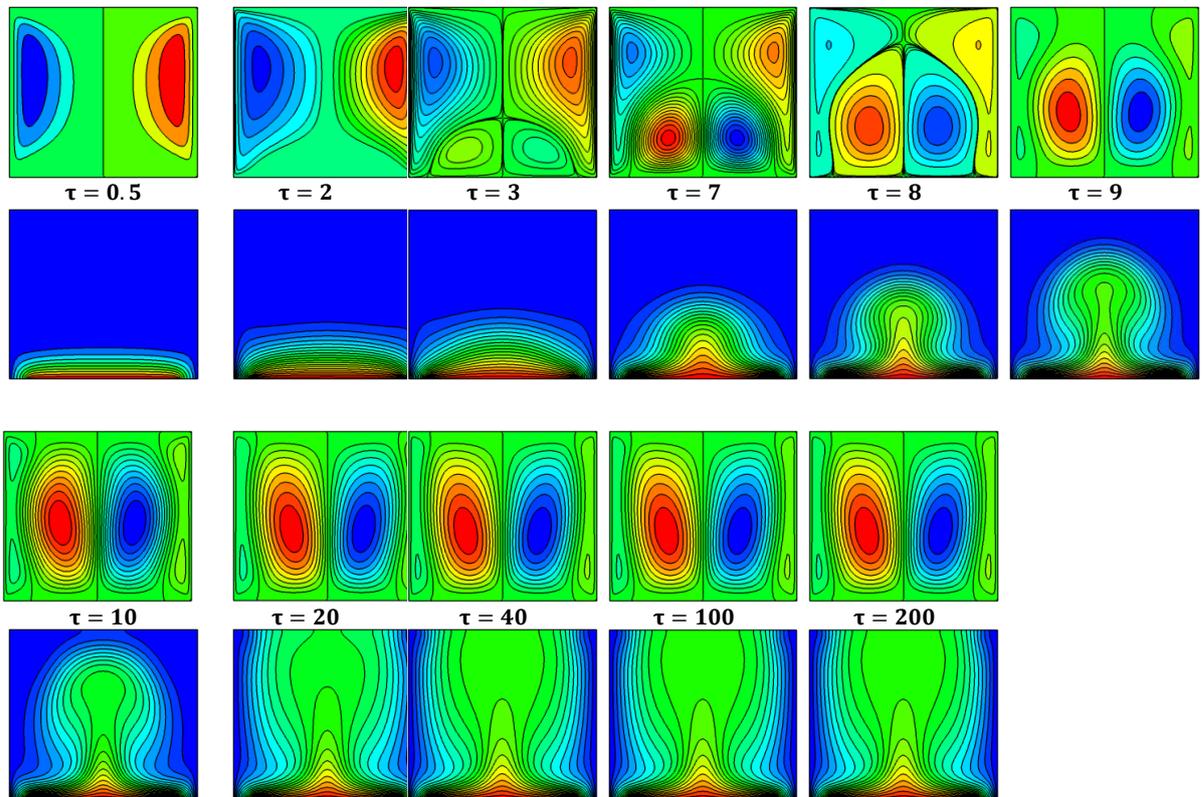
Fig. 8: Time progresses of the streamlines and isotherms for (a) $Ri=11.76$ and (b) $Ri=11.77$ with $Da=0.1$

Darcy effect on flow behavior

Fig. 9 and 10 present the time-wise evolution of the streamlines and isotherms for two different values of Richardson number $Ri=11.76$ and $Ri=11.77$ respectively, and for each Ri two different Darcy numbers $Da=10^{-3}$ and $Da=10^{-2}$ are considered. As previously mentioned, the analysis of these two layouts describe for the first time ($\tau \leq 2$), two counter-rotating cells which are generated by the viscous force due to motion of moving sides. Then, two few weaker counter-rotating cells are formed just above the heated part that develop progressively to about ($\tau=18$ for $Da=10^{-3}$) and ($\tau=9$ for $Da=10^{-2}$). It's from these two moments the two distribution patterns are distinguished. As time progresses, visual examination of (Fig. 9(a) and Fig. 10(a)) reveals that for $Da=0.001$, two weaker cells formed at the left and right walls in addition to the pair of counter-rotating main cells in the center of the enclosure. The vortices come closer together on each side. As both vertical lids moves upward, the thickness of these layers adjacent to the walls increases from bottom to the upper wall of the cavity. The driving mechanism of this pair of cells is the shear effect due to fluid viscosity. This flow regime which characterized by two pairs of perfectly identical cells is stabilized around $\tau=40$. As the Darcy number increases to $Da=0.01$ (see Fig. 9(b) and Fig. 10(b)), the results of this case represent a mirror image of those for $Ri=11.77$ with $Da=0.1$. This means that the distribution of streamline patterns and isotherms is almost same for both low values of Darcy number and it's worthwhile mentioning that the effect of low Darcy's number is not that much.

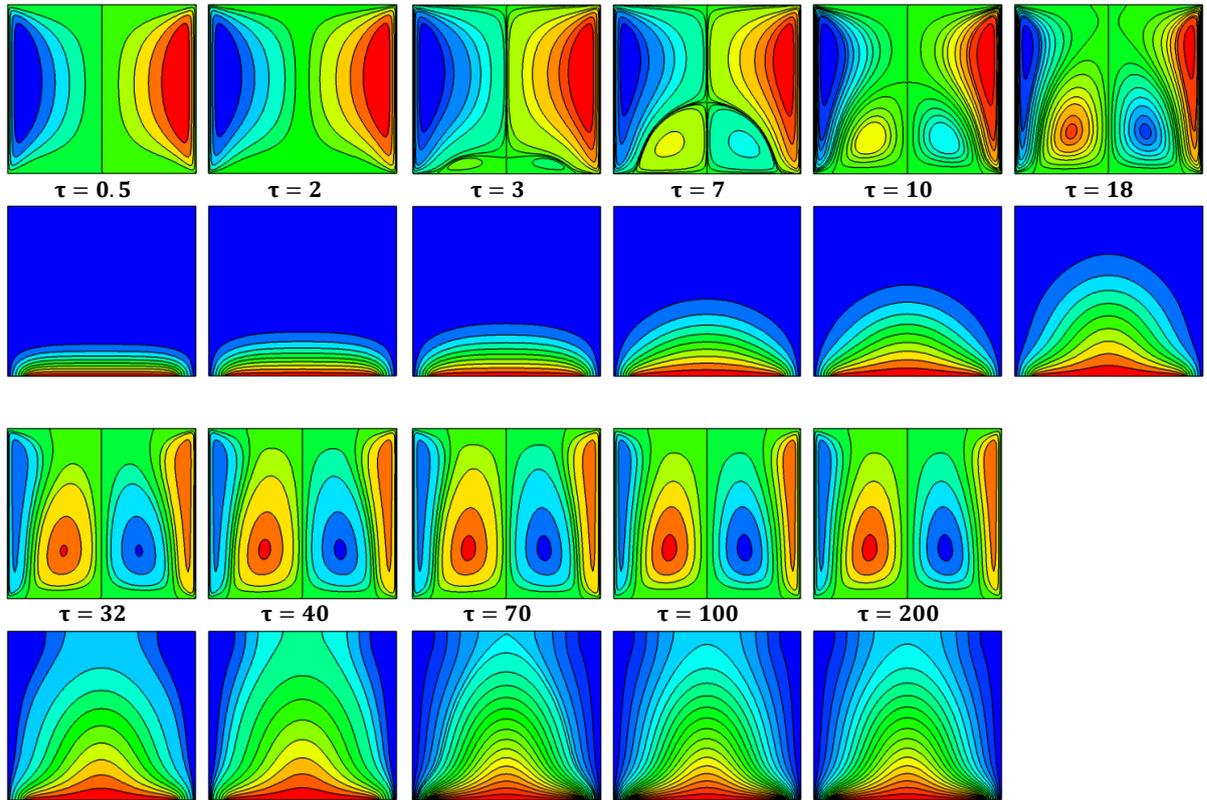


(a)

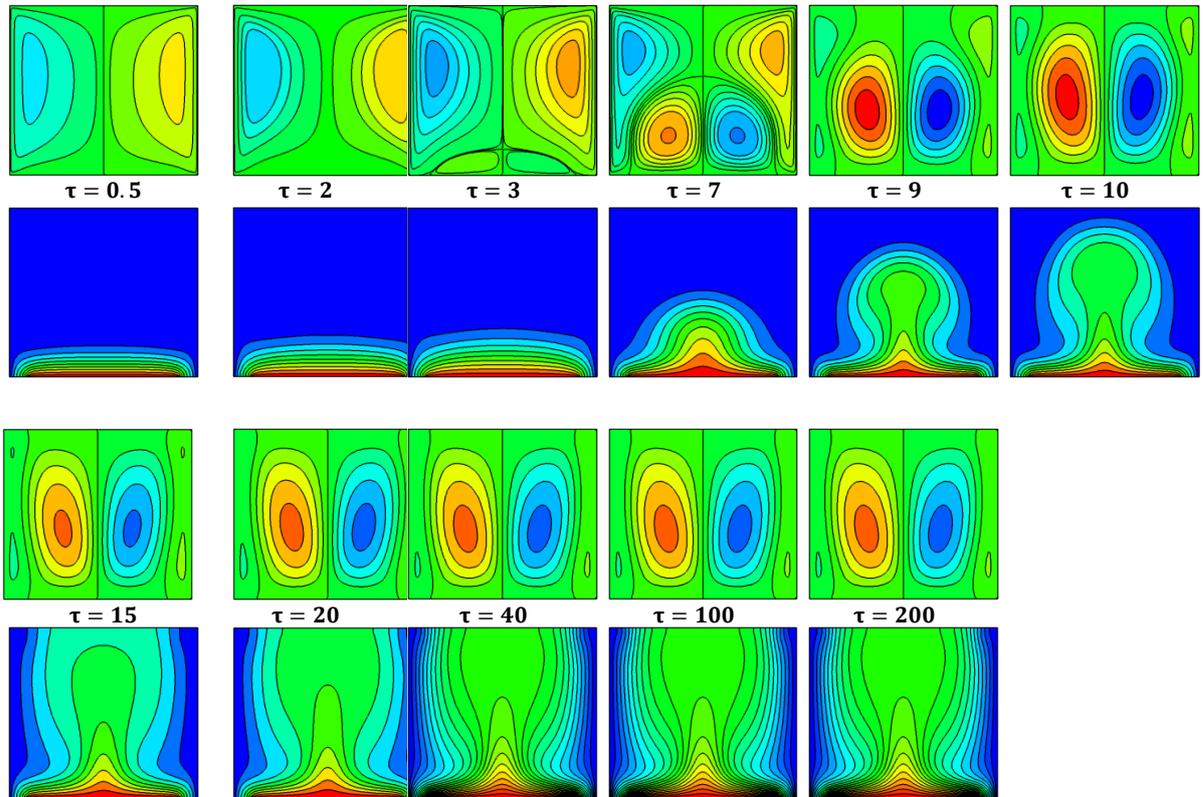


(b)

Fig. 9: Time progresses of the streamlines and isotherms corresponding to $Ri=11.76$ for (a) $Da=10^{-3}$ and (b) $Da=10^{-2}$



(a)



(b)

Fig. 10: Time progresses of the streamlines and isotherms corresponding to $Ri=11.77$ for (a) $Da=10^{-3}$ and (b) $Da=10^{-2}$

Darcy effect on the heat flux

In order to understand the heat flux effect of Darcy number through the heated part into the enclosure, a time-wise evolution of average Nusselt number for both values of Richardson's number considered here is plotted in Fig. 11. For both values $Da=10^{-3}$ and $Da=10^{-2}$. In a general way, the transfer rate is decreasing suddenly during the first moments, then it decreases regularly before attaining a constant value $\overline{Nu}=3.43$. A time $\tau=20$ is sufficient to reach this average value for $Da=0.001$. However, when increases to $Da=0.01$, the necessary time to stabilize at a fixed value $\overline{Nu}=5.0032$ is around $\tau=40$. The evolution of local Nusselt number along the heated wall is displayed easily in Fig. 12. It is seen also that it takes its maximum value at the bounds of the heated part. It is due to the symmetry of the boundary conditions. While, it is clearly seen from the temperature profile across the vertical mid-plane of the cavity (Fig. 13) that the center of the heated wall becomes a stagnant heat flux zone and reaches a maximum temperature, this means a minimum thermal gradient at the middle of the bottom

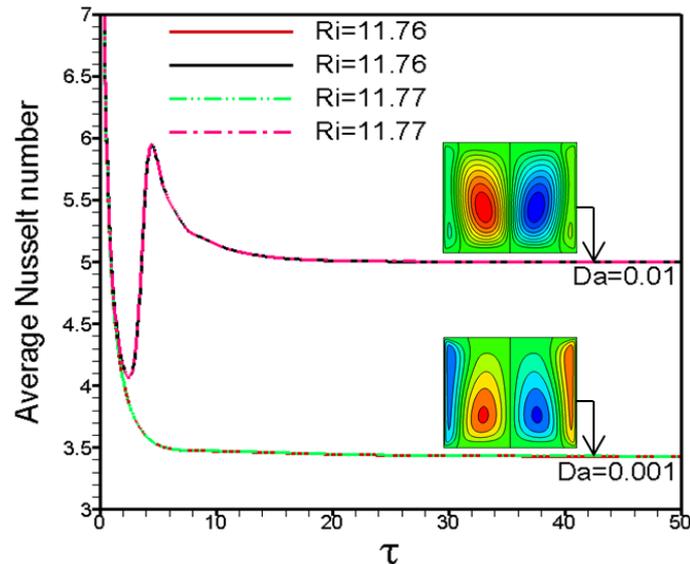


Fig. 11: Time-wise evolution of average Nusselt number for $Ri=11.76$ and $Ri=11.77$ with different Darcy numbers

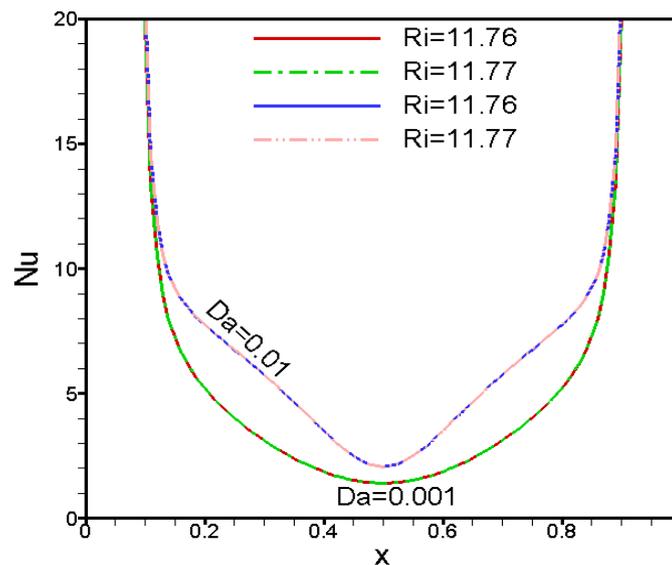


Fig. 12: Evolution of local Nusselt number along the horizontal heated wall for $Ri=11.76$ and $Ri=11.77$ with different Darcy numbers

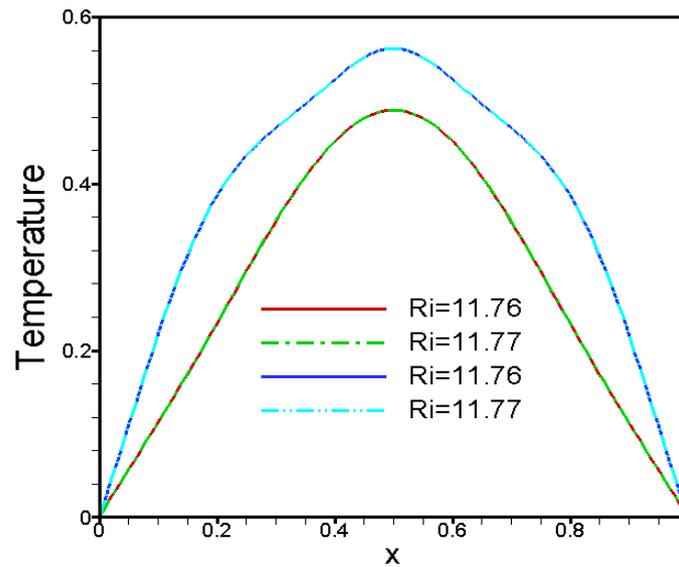


Fig. 13: Evolution of temperature profile at $Y=0.5$ for $Ri=11.76$ and $Ri=11.77$ with different Darcy numbers

Conclusion

This work achieved what it was accepted to be the primary numerical investigation of two dimensional mixed convection flow using the Brinkman-Forchheimer extended Darcy model in a partially heated porous cavity with cold moving sidewalls, while other parts are adiabatic. Parametric studies of the effect of Darcy number and the mixed convection parameter, Richardson number on the flow behavior and heat transfer have been performed. From the obtained results, the important conclusions are as follows:

- Although the symmetrical geometry and boundary conditions with respect to the mid-length of the square substrate, the results show that the transport phenomena inside the cavity is really complex. The flow evolution was in contradiction with the symmetrical nature for higher Darcy value.
- For lower Darcy's number, the distribution of contour patterns is eventually similar for both values of Richardson's number considered in this work.
- For $Da=0.1$, the behavior of flow regime becomes, just like the flow motion in a purely fluid flow.

References

- [1] C.K. Cha, Y. Jaluria, Recirculating mixed convection flow for energy extraction, *Int. J. Heat Mass. Transfer.* 27 (1984) 1801-1812.
- [2] A.G. Fedorov, R. Viskanta, Three-dimensional conjugate heat transfer in the microchannel heat sink for electronic packaging, *Int. J. Heat Mass. Transfer.* 43 (2000) 399-415.
- [3] Y. Su, J.H. Davidson, *Modeling Approaches to Natural convection in Porous Media*, SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, New York, 2015.

- [4] S.E. Ahmed, M.A. Mansour, A.K. Hussein, S. Sivasankaran, Mixed convection from a discrete heat source in enclosures with two adjacent moving walls and filled with micropolar nanofluids, *Eng. Sci. Tech. Int. J.* 19 (2016) 364-376.
- [5] S. Saravanan, R.K. Brinda, Thermal nonequilibrium porous convection in a heat generating medium, *Int. J. Mech. Sci.* 135 (2018) 133-145.
- [6] S. Hussein, S.E. Ahmed, Steady natural convection in open cavities filled with a porous medium utilizing Buongiorno's nanofluid model, *Int. J. Mech. Sci.* 157 (2019) 692-702.
- [7] C.W. Horton, F.T. Rogers Jr., Convection currents in a porous medium, *J. Appl. Phys.* 16 (1945) 367-370.
- [8] E.R. Lapwood, Convection of a fluid in a porous medium, in: *Math Proc Camb Phil Soci*, Cambridge University Press, 1948, pp. 508-521.
- [9] K.E. Singh, A.K. Pandey, M.K. Kumar, Slip flow of micropolar fluid through a permeable wedge due to the effects of chemical reaction and heat source/sink with Hall and ion-slip currents: an analytic approach, *Propul. Pow. Resrch.* 9 (2020) 289-303.
- [10] F. Fadaei, M. Shahrokhi, A.M. Dehkordi, Z. Abbasi, Forced-convection heat transfer of ferrofluids in a circular duct partially filled with porous medium in the presence of magnetic field, *J. Magntm Magntc. Mater.* 475 (2019) 304-315.
- [11] N.H. Abou-Hamdeh, H.F. Oztop, K.A. Alnefaie, A computational study on mixed convection in a porous media filled and partially heated lid-driven cavity with an open side, *Alexdr. Eng. J.* 59 (2020) 1735-1750.
- [12] M. Ghalambaz, A. Tahmasebi, A.J. Chamkha, D. Wen, Conjugate local thermal non-equilibrium heat transfer in a cavity filled with a porous medium: analysis of the element location, *Int. J. Heat Mass. Transfer.* 138 (2019) 941-960.
- [13] A. Mishra, A.K. Pandey, M. Kumar, Ohmic-viscous dissipation and slip effects on nanofluid flow over a stretching cylinder with suction/injection, *Nanosci. Tech. Int. J.* 9 (2018) 99-115.
- [14] A. Mishra, A.K. Pandey, M. Kumar, Velocity, thermal and concentration slip effects on MHD silver-water nanofluid flow past a permeable cone with suction/injection and viscous-Ohmic dissipation, *Heat. Transfer.Resrch.* 50 (2019) 1351-1367.
- [15] D.A.S. Rees, A. Barletta, Onset of convection in a porous layer with continuous periodic horizontal stratification, Part II: Three-dimensional convection, *Eur. J. Mech. B-Fluid.* 47 (2014) 57-67.
- [16] A. Chattopadhyay, S.K. Pandit, S.S. Sarma, I. Pop, Mixed convection in a double lid-driven sinusoidally heated porous cavity, *Int. J. Heat Mass. Transfer.* 93 (2016) 361-378.
- [17] H. Upreti, A.K. Pandey, M. Kumar, O.D. Makinde, Ohmic heating and non-uniform heat source/sink roles on 3D Darcy-Forchheimer flow of CNTs nanofluids over a stretching surface, *Arab. J. Sci. Eng.* 45 (2020) 7705-7717.
- [18] S. Kim, S. Lorente, A. Bejan, Transient behavior of vascularized walls exposed to sudden heating, *J. Therm. Sci.* 48 (2009) 2046-2052.

- [19] K. Yang, K. Vafai, Analysis of temperature gradient bifurcation in porous media—an exact solution, *Int. J. Heat Mass. Transfer.* 53 (2010) 4316-4325.
- [20] A.K. Pandey, M. Kumar, K.A. Alnefaie, Effect of viscous dissipation and suction/injection on MHD nanofluid flow over a wedge with porous medium and slip, *Alexdr. Eng. J.* 55 (2016) 3115-3123.
- [21] H. Upreti, A.K. Pandey, M. Kumar, O.D. Makinde, MHD flow of Ag-water nanofluid over a flat porous plate with viscous-Ohmic dissipation, suction/injection and heat generation/absorption, *Alexdr. Eng. J.* 57 (2018) 1839-1847.
- [22] P. Kandaswamy, M. Eswaramurthi, C.O. Ng, Transient buoyancy-driven convection of water around 4° C in a porous cavity with internal heat generation, *Phys. Fluids.* 20 (2008) 087104.
- [23] T. Kawamura, H. Takami, K. Kuwahara, New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations, in: *Ninth International Conference on Numer. Method Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, 1985, pp. 291-295.
- [24] B. Carnahan, H.A. Luther, *Applied numerical methods*, Mc Graw Hill, New York, 1969.
- [25] D.S. Kumar, A.K. Dass, A. Dewan, Analysis of non-Darcy models for mixed convection in a porous cavity using a multigrid approach, *Numer. Heat. Transfer.* 56 (2009) 685-708.

DECLARATION SUR L'HONNEUR

RELATIVE A L'ENGAGEMENT AUX REGLES D'INTEGRITE SCIENTIFIQUE
EN VUE D'ELABORATION D'UNE RECHERCHE

Je soussigné(e)

Mme, Melle, M^r *Menacer Dalila*.....

Qualité : étudiant, enseignant, chercheur, *étudiante*.....

Portant carte d'identité n° *115.2355.87*..... Délivrée le *29/07/2019*..

Inscrit à la faculté/ Institut : *Génie des procédés* Département : *Génie Chimique*

Chargé(e) d'élaborer des travaux de recherche (mémoire, mémoire de ~~Master~~, mémoire de ~~Magister~~, thèse de Doctorat) dont le titre est :

Etude de la convection mixte dans un milieu poreux confiné dans une cavité chauffée par le bas.....

Et après avoir pris connaissance des dispositions de l'arrêté n° 1082 du 27/12/2020 et notamment son article 3.

Je déclare sur mon honneur de m'engager à respecter les critères scientifiques et méthodologiques ainsi que les critères d'éthique de la profession et de l'intégrité académique requises dans l'élaboration de la recherche suscitée.

Par ailleurs, je déclare assumer l'entière responsabilité quant à d'éventuels manquements à l'éthique et à la déontologie émanant de ma part à l'occasion de l'élaboration des travaux de recherche, et dégage la responsabilité de mon institution de tout acte préjudiciable et malveillant.

Fait à Constantine le *12/09/2021*..

Signature de l'intéressé(e)





Nom et Prénom : Dalila MENACER

Titre : Convection Mixte dans une Cavité à Parois Latérales Mobiles et dont
une Partie de la Paroi Inferieure est Soumise à un Flux de Chaleur Fixé

Thèse en vue de l'Obtention du Diplôme de Doctorat en
Génie des Procédés en Génie Chimique

Résumé

Une étude détaillée du phénomène d'instabilité de l'écoulement de convection mixte dans un milieu poreux confiné au sein d'une cavité carrée chauffée partiellement par le bas en utilisant le modèle de Darcy étendu de Brinkman -Forchheimer. Les parois latérales froides se déplacent avec une vitesse constante vers le haut, tandis que les autres parties sont considérées comme adiabatiques. Le milieu considéré est modélisé à l'aide des équations de Navier-Stokes et l'approximation de Boussinesq. Le problème est ainsi régi par les équations gouvernantes qui sont écrites en formulation « fonction de courant Ψ - vorticité ω » et discrétisées à l'aide d'une méthode aux différences finies. L'influence de certains paramètres, tels que, le nombre de Darcy et de Richardson sur la déstabilisation de l'écoulement ont été étudiés. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de champs dynamique et thermique, avec l'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen. Ceux-ci ont détecté l'existence d'un changement radical dans les modèles des contours et que le fluide est entièrement convecté pour des nombres de Darcy plus élevés.

Mots clés : Déstabilisation de l'écoulement, convection mixte, technique des différences finies,
loi de Darcy- Brinkman-Forchheimer.

Directeur de thèse : Saadoune BOUDEBOUS - Université Larbi Ben M'hidi- Oum El Bouaghi

Année Universitaire : 2021-2022