



Université de Constantine 3
Faculté de Génie des Procédés
Département de Génie Chimique

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA CONVECTION MIXTE ET DE LA
GÉNÉRATION D'ENTROPIE DANS UNE CAVITÉ CHAUFFÉE PAR LE
BAS : INFLUENCE DU NOMBRE DE PRANDTL

THÈSE

Présentée pour l'Obtention du
Diplôme de Doctorat en Science
En Génie Chimique

Par
Nawal FERROUDJ

Année Universitaire
2022-2023



Université de Constantine 3
Faculté de Génie des Procédés
Département de Génie Chimique

N° de Série :

N° d'Ordre :

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE LA CONVECTION MIXTE ET DE LA
GÉNÉRATION D'ENTROPIE DANS UNE CAVITÉ CHAUFFÉE PAR LE
BAS : INFLUENCE DU NOMBRE DE PRANDTL

THÈSE

Présentée pour l'Obtention du
Diplôme de Doctorat en Science
En Génie Chimique

Par

Nawal FERROUDJ

Devant le Jury Composé de :

Salim BOUSBAA	Président	MCA	Université Salah Boubnider Constantine 3
Saadoun BOUDEBOUS	Directeur de thèse	Professeur	Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi
Samah ZERMANE	Directeur administratif	MCA	Université Salah Boubnider Constantine 3
Omar KHOLAI	Examineur	Professeur	Université des frères Mentouri Constantine 1
Aicha BOUHEZZA	Examineur	MCA	Université 20 Août 1955 Skikda
Hassina BEZAZE	Examineur	MCA	Université Salah Boubnider Constantine 3

Année Universitaire

2022-2023

Remerciement

Toujours, je remercie Dieu, Allah le tout puissant, de nous avoir donné la force et le courage mais surtout la volonté nécessaire pour la réalisation de ce modeste travail au sein du laboratoire génie mécanique, Medeniyet Université, Turquie.

Je remercie tout d'abord M. Saadoun BOUDEBOUS, Professeur à l'université El Arbi Ben M'hedi, OumBouaghi de m'avoir proposé ce sujet, pour son aide dans cette thèse en m'accueillant de sa rigueur scientifique de son dynamisme, sa disponibilité constante, et surtout de sa patience inébranlable. Je le remercie d'avoir accepté de diriger cette thèse, pour son soutien au cours de ses années.

Je remercie aussi Madame ZERMANE Samah, Maître de conférences A, à la faculté génie des procédés, à l'université Salah Boubnider Constantine 3, pour son encouragement et sa contribution.

Je tiens à exprimer mes remerciements chaleureux aux membres de jury de consacrer leurs temps pour examiner ce manuscrit.

Je remercie vivement Monsieur BOUSBAA Salim, Maître de conférences A, à la faculté génie des procédés, à l'université Salah Boubnider Constantine 3, pour avoir accepté d'être le président du Jury de cette thèse.

J'exprime aussi mes remerciements à Monsieur KHOLAI Omar, Professeur au département de Génie de transport, à la faculté des sciences de la technologie, à l'Université des frères Mentouri Constantine 1 et Madame Aïcha BOUHEZZA, Maître de conférences A, à l'université 20 Août 1955 Skikda, pour m'avoir fait le plaisir de

participer à mon jury de ma thèse, et qui ont accepté de consacrer de leurs temps à l'examen de cette thèse.

Mes remerciements les plus respectueux sont adressés à Madame Hassina BEZAZE, Maître de conférences A, à la faculté génie des procédés, à l'université Salah Boubnider Constantine 3, pour avoir acceptée d'expertiser ce travail.

Je tiens à remercier M. Hassan KOTAN, Professeur à l'université Medeniyet, pour son aide dans cette recherche le long de mon séjour à Istanbul.

Enfin, un très grand remerciement à toutes les personnes qui ont contribué de loin ou de près à la réalisation de ce travail

Dédicace

Je dédie ma thèse qui est un rayon de lumière et une source d'espoir :

À la mémoire de : Mon père Mohammed

À la mémoire de mes frères Hakim, Yacine et Farid

Je dédie aussi cet humble travail réalisé grâce à Dieu à :

Ma chère mère Khadra

Mes chers frères : Tahar, Abd El Hamid

Mes chères sœurs : Aziza, Loubna et Leila

Zui ont toujours cru en moi et n'ont jamais cessé de me soutenir

À mes nièces : Aya, Asma, ma princesse Rimas, Maissem et ma petite étoile Hadjer

Mes neveux : Mohemmed Madjed, Sadjed, Abd Elrrahma, Cham Elddine et Ahmed

À mes amies Benidir Rima, Asma Sellami, Amira, Amel, Fatima et Houda

*Aux employés de la bibliothèque Hakima, Ami Aziz, Asma, Sami, Amina et Fatima qui ont facilité le processus de ma recherche
À tous mes collègues à l'ENSB*

Merci !

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES

LISTE DES FIGURES	ix
LISTE DES TABLEAUX	xi
LISTE DES ABREVIATIONS	xii
RESUMÉ	xiv

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
-----------------------------	---

CHAPITRE I

NOUVELLE APPROCHE POUR LA DÉTERMINATION EXACTE DE LA GÉNÉRATION D'ENTROPIE

1. INTRODUCTION.....	5
2. REVUE DES TRAVAUX ANTÉRIEURS RELATIVE À LA GÉNÉRATION D'ENTROPIE	5
3. PROBLÉMATIQUE	7
4. DÉTERMINATION DU RAPPORT DE DISTRIBUTION DE L'IRRÉVERSIBILITÉ	10
4.1. Modèle mathématique	10
4.2. Equation de la génération d'entropie	12
4.3. Expression mathématique du rapport de distribution de l'irréversibilité	13
4.4. Nombre de Bejan	13
5. NOUVELLE APPROCHE POUR LE CALCUL EXACT DU RAPPORT DE DISTRIBUTION DE L'IRRÉVERSIBILITÉ ϕ	14
6. ARGUMENTS POUR JUSTIFIER L'UTILISATION DE L'APPROCHE PROPOSÉE POUR CALCULER LE RAPPORT DE DISTRIBUTION DE L'IRRÉVERSIBILITÉ	16
6.1. Choix purement arbitraire du rapport de distribution d'irréversibilité ϕ	23
6.2. Nombre de Rayleigh (Ra) ou nombre de Grashof (Gr)	24
6.3. Analogie entre le nombre de Rayleigh et le rapport de distribution de l'irréversibilité	26
7. PROBLÈMES TESTS POUR LA VALIDATION DE LA NOUVELLE APPROCHE	26
7.1. Cas de la convection naturelle	27
7.1.1. Méthode numérique de résolution	28
7.1.2. Comparaison avec les résultats de référence	29
7.1.3. Génération d'entropie totale	32
7.1.4. Nombre de Bejan	33
7.2. Cas de la convection mixte	34
7.2.1. Validation de la méthode adoptée	35
7.2.2. Comparaison du nombre de génération d'entropie locale N_s	38

7.2.3. Caractéristiques de la génération d'entropie obtenues avec la nouvelle méthode.....	39
8. CONCLUSION	41

CHAPITRE II

FORMULATION NUMÉRIQUE D'UN ÉCOULEMENT EN RÉGIME DE CONVECTION MIXTE

1. INTRODUCTION	42
2. PROBLÈME CONSIDÉRÉ	42
3. FORMULATION NUMÉRIQUE	43
3.1. Rappel du modèle mathématique.....	43
3.2. Nombre de Nusselt moyen	45
3.3. Conditions initiales et aux limites.....	45
3.4. Méthode de résolution	46
3.4.1. Méthode numérique de résolution	46
3.4.2. Maillage	47
4. DISCRÉTISATION DES DIFFÉRENTS TERMES DU MODÈLE MATHÉMATIQUE	47
4.1. Discrétisation du terme convectif $\left(U \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)$	48
4.2. La différence centrale $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big _{centrale} \right)$	49
4.3. La différence arrière $\left(\frac{\partial \phi}{\partial X} \Big _{arrière} \right)$	50
4.4. La différence avant $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big _{avant} \right)$	50
4.5. Discrétisation du terme diffusif $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right)$	52
4.6. Discrétisation du terme source $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)$	53
5. DISCRÉTISATION DES DIFFÉRENTES CONDITIONS AUX LIMITES	53
5.1. Températures	54
5.2. Vorticité	54
6. MÉTHODE DE RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DISCRÉTISÉES	56
6.1. Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (R.K.4)	56
6.2. Méthode NLOR	58
6.3. Algorithme de la méthode de résolution	59
7. CONCLUSION	59

CHAPITRE III

EFFET DU NOMBRE DE PRANDTL SUR LA GÉNÉRATION D'ENTROPIE EN CONVECTION MIXTE

1. INTRODUCTION	61
2. VALIDATION DU PROGRAMME	61
2.1. Choix du maillage	61
2.2. Validation du code de calcul	62
3. RÉSULTATS ET DISCUSSION	64
3.1. Cas de trois fluides différents	64
3.1.1. Effet des nombres de Richardson (Ri) et du Prandtl (Pr) sur les champs thermique et dynamique	65
3.1.2. Effet des nombre de Prandtl (Pr) et de Richardson (Ri) sur le nombre de Nusselt moyen	67
3.1.3. Effet des nombres de Prandtl (Pr) et de Richardson (Ri) sur la génération d'entropie	70
3.1.4. Conclusion	80
3.2. Cas de l'eau à différents nombres de Prandtl	80
3.2.1. Les champs dynamiques et thermiques	82
3.2.2. Taux de transfert de chaleur	88
3.2.3. Caractéristiques de la génération d'entropie	91
3.2.4. Conclusion	96
CONCLUSION GÉNÉRALE	98
RÉFÉRENCES	101
LISTE DES ANNEXES	116
ANNEXE A : COMMENT ON OBTIENT L'ÉQUATION DE LA VORTICITÉ	116
ANNEXE B : DISCRÉTISATION DU TERME CONVECTIF	118
ANNEXE C : DISCRÉTISATION DU TERME DIFFUSIF	125
ANNEXE D : DISCRÉTISATION DU TERME SOURCE	132
ANNEXE E : LISTE DES TRAVAUX SCIENTIFIQUES	134

LISTE DES FIGURES

LISTE DES FIGURES

Figure		Page
Figure 1.1	Schéma du problème test (Magherbi et al. 2003).....	27
Figure 1.2	Isothermes (colonne de gauche) et lignes de courant (colonne de droite), sous forme dimensionnelle (rangée du haut) et adimensionnelle (rangée du bas) à $Ra=10^4$	29
Figure 1.3	Contours de la génération d'entropie (colonne de gauche) et du nombre de Bejan (colonne de droite) sous forme dimensionnelle (rangée supérieure) et adimensionnelle (rangée inférieure) à $Ra=10^4$	30-31
Figure 1.4	Variation de \overline{Ns} en fonction de Ra (a) selon notre approche, (b) selon l'approche adoptée par Magherbi et al. (2003).....	32
Figure 1.5	Variation de la génération d'entropie totale $\overline{S_{gen}}$ en fonction du nombre de Rayleigh (Ra).....	33
Figure 1.6	Evolution de \overline{Be} en fonction de Ra (a) selon notre approche, (b) selon l'approche adoptée par Magherbi et al. (2003).....	34
Figure 1.7	Schéma du problème test et conditions aux limites (Roy et al. 2015).....	35
Figure 1.8	Contours des isothermes (Θ) et des lignes de courants (Ψ), colonne de gauche pour le travail actuel et colonne de droite pour celui rapporté par Roy et al. (2015). ($Gr=10^4$, $Pr=0.015$, $Re=1$)	36
Figure 1.9	Contours de la génération d'entropie S_{gen} (1 ^{re} rangée), de la génération d'entropie due au transfert thermique S_{th} (2 ^e rangée), de la génération d'entropie due à la friction du fluide S_{ff} (3 ^e rangée) et du nombre de Bejan Be (4 ^e rangée), colonne de gauche pour le travail actuel et colonne de droite pour celui rapporté par Roy et al. (2015). ($Gr=10^4$, $Pr=0.015$, $Re=1$)	37-38
Figure 1.10	Evolution du nombre de génération d'entropie moyen \overline{Ns} pour une valeur de φ arbitraire choisie égale à 10^{-3} et pour une valeur exacte égale à $1.34 \cdot 10^{-12}$	39
Figure 1.11	Contours de la génération d'entropie S_{gen} (côté gauche) et la génération d'entropie due à la friction du fluide S_{ff} (côté droit) pour $Gr=10^4$, $Pr=0.015$ et $Re=1$	40
Figure 1.12	Evolution des valeurs moyennes de la génération d'entropie globale $\overline{S_{gen}}$, de la génération d'entropie due à l'irréversibilité du transfert de chaleur $\overline{S_{th}}$ (côté gauche)	41

et de la génération d'entropie due à la friction du fluide $\overline{S_{ff}}$ (côté droit) pour $Gr=10^4$, $Pr=0.015$ et $Re=1$

Figure 2.1	Configuration géométrique et conditions aux limites.....	43
Figure 2.2	Schéma du maillage non-uniforme de la cavité	47
Figure 2.3	Maillage décentré amont suivant l'axe des X	48
Figure 2.4	Maillage décentré aval suivant l'axe des X	48
Figure 3.1	Champs thermique et dynamique pour (a) l'eau, (b) l'air et (c) le mercure	65-66
Figure 3.2	Évolution du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour a) l'eau, b) air et c) mercure.....	67-68
Figure 3.3	Nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} en fonction du nombre de Richardson, pour a) l'eau, b) air et c) mercure	68-69
Figure 3.4	Comparaison du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour les différents fluides en fonction du nombre de Richardson	70
Figure 3.5 (a)	Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour l'eau à $Ri=0,4$	71
Figure 3.5 (b)	Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour l'eau à $Ri=21,9$	71-72
Figure 3.6 (a)	Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour l'air à $Ri=135$	72
Figure 3.6 (b)	Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour l'air à $Ri=0,017$	73

Figure 3.7 (a)	Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour le mercure à $Ri = 17,3$	74
Figure 3.7 (b)	Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour le mercure à $Ri=85$	74-75
Figure 3.8	Comparaison de la génération d'entropie totale moyenne pour les fluides considérés en fonction du au nombre de Richardson	76
Figure 3.9	Comparaison de la génération moyenne d'entropie due au frottement des fluides en fonction du nombre de Richardson	77
Figure 3.10	Profils de la génération d'entropie sur la paroi inférieure à différentes valeurs du nombre de Richardson pour (a) l'eau, (b) l'air et (c) le mercure.....	78
Figure 3.11	Gradient vertical de la température sur la paroi inférieure à $Ri = 56,96$ pour l'air	79
Figure 3.12	Nombre de Prandtl de l'eau en fonction de la température (Dinçer et Zamfirescu 2016)	81
Figure 3.13	Variation du nombre de Richardson en fonction de la longueur de référence L, pour les différentes valeurs du nombre de Prandtl considérées	82
Figure 3.14	Contours des lignes de courant (première rangée), des isothermes (deuxième rangée) pour différents nombres de Richardson (Ri) pour (a) $Pr=2,0$, (b) $Pr=3,045$ et, (c) $Pr=5,534$	82-83
Figure 3.15	Comparaison des lignes de courant (colonne gauche) et des isothermes (colonne droite) pour $Ri=22.35$ et 35.36 à $Pr=3.045$	85
Figure 3.16	Comparaison du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour $Ri=36,38$ et, $22,35$ à $Pr= 3,045$	86
Figure 3.17	Comparaison de l'évolution du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} (a) pour $Pr= 3,045$ à $Ri= 62,87$; (b) pour $Pr=2,0$, et, $5,534$ à $Ri=35,3$ et, $25,18$, respectivement	87
Figure 3.18	Evolution du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour différents Ri , (a) $Pr=2,0$, (b) $Pr=3,045$ et, (c) $Pr=5,534$	89
Figure 3.19	Comparaison du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} en fonction du nombre de Richardson (Ri) pour les valeurs considérées du nombre de Prandtl (Pr)	90
Figure 3.20	Contours de la génération d'entropie totale (première rangée) et de la génération d'entropie due au frottement fluide (deuxième rangée), pour différents nombres de Richardson à (a) $Pr=2,0$, (b) $Pr=3,0454$ et, (c) $Pr=5,534$	91-92

Figure 3.21 Évolution de la génération d'entropie totale moyenne (première rangée), de la génération d'entropie moyenne due au frottement de fluide (deuxième rangée) et du nombre de Bejan moyen (troisième rangée), pour différents nombres de Richardson à (a) $Pr=2,0$, (b) $Pr=3,0454$ et, (c) $Pr=5,534$ **94**

Figure 3.22 Comparaison de la génération d'entropie moyenne $\overline{S^{gen}}$, de la génération d'entropie moyenne due au frottement du fluide $\overline{S_{ff}}$ et du nombre de Bejan moyen \overline{be} en fonction de Ri pour les valeurs considérées du nombre de Prandtl (Pr) **96**

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES TABLEAUX

Tableau		Page
Tableau 1.1	Propriétés thermo-physiques de l'air ($Pr=0.7$, $T_0=350K$), de l'eau ($Pr=6.946$, $T_0=293K$), et du mercure ($Pr=0.0152$, $T_0=423K$)	15
Tableau 1.2	Valeurs exactes du rapport de distribution d'irréversibilité ϕ pour différents nombres de Rayleigh pour les trois fluides sélectionnés (air, eau et mercure) en régime de convection naturelle (ϕ_{NC}) et mixte (ϕ_{MC})	15
Tableau 1.3	Valeurs moyennes du nombre de Nusselt, de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan obtenues à partir des équations résolues avec les variables dimensionnelles et adimensionnelles ($Ra=10^4$, $Pr=0.7$)	31
Tableau 1.4	Valeurs moyennes du nombre de Nusselt, de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan obtenues à partir des équations résolues avec les variables dimensionnelles et adimensionnelles ($Gr=10^4$, $Pr=0.015$, $Re=1$)	36
Tableau 3.1	Effet du maillage sur le nombre de Nusselt moyen pour $Re=100$, $Pr=0.7$ and $Ri=5$ and 30	62
Tableau 3.2	Effet du maillage sur la génération d'entropie moyenne $\overline{S_{gen}}$ et le nombre de Bejan moyen Be pour $Re=100$, $Pr=0.7$ et $Ri=5$ et 30	62
Tableau 3.3	Comparaison des nombres du Nusselt moyen \overline{Nu} entre ceux donnés dans la littérature et ceux obtenus dans le présent travail	63
Tableau 3.4	Comparaison entre les valeurs du nombre moyen de la génération d'entropie ($\overline{N_s}$) et du nombre moyen de Bejan (\overline{Be}) du présent travail avec ceux de différents auteurs ($Pr=0.7$, $\phi=10^{-4}$)	63
Tableau 3.5	Propriétés thermo-physiques des fluides de travail à 298 K à partir de la réf. (Çengel & Ghajar, 2015)	64
Tableau 3.6	Valeurs limites de la longueur L de la cavité avec les nombres de Richardson (Ri) correspondants pour les fluides de travail.....	65
Tableau 3.7	Propriétés thermo-physiques de l'eau pure à la pression atmosphérique (Dinçer et Zamfirescu 2016).....	81
Tableau 3.8	Identification des différents types de régimes d'écoulement pour les nombres de Prandtl considérés	88

LISTE DES ABRÉVIATIONS

LISTE DES ABRÉVIATIONS

Symboles latins

be	Nombre de Bejan dimensionnel	
C_p	Chaleur spécifique à pression constante	$\text{j.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
g	Accélération de la pesanteur.	m.s^{-2}
k:	Conductivité thermique de l'air	$\text{w.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
l	Longueur dimensionnelle de la source de chaleur.	m
L	Longueur dimensionnelle de la cavité	m
N_s	Le nombre de la génération d'entropie totale dimensionnelle	$\text{Wm}^{-3}\text{K}^{-1}$
S_{gen}	La génération d'entropie totale dimensionnelle	$\text{Wm}^{-3}\text{K}^{-1}$
S_{ff}	La génération d'entropie visqueuse dimensionnelle	$\text{Wm}^{-3}\text{K}^{-1}$
S_{th}	La génération d'entropie thermique dimensionnelle	$\text{Wm}^{-3}\text{K}^{-1}$
S_{gen}	La génération d'entropie totale adimensionnelle	
S_{ff}	La génération d'entropie visqueuse adimensionnelle	
S_{th}	La génération d'entropie thermique adimensionnelle	
t	Temps	S
T	Température.	K
ΔT	Différence de température.	K
T_0	Température ambiante	K
T_c	Température de la partie chaude	K
T_f	Température des parois froides	K
u	Composante de vitesse horizontale.	m.s^{-1}
U	Composante adimensionnelle de vitesse horizontale.	
v	Composante de vitesse verticale.	m.s^{-1}
V	Composante adimensionnelle de vitesse verticale.	
v_w	Vitesse des parois latérales	m.s^{-1}
x,y	Coordonnées d'espace dimensionnelles	m
X,Y	Coordonnées d'espace adimensionnelles	

Symboles grecs

α	Diffusivité thermique.	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
β	Coefficient d'expansion thermique à pression constante.	K^{-1}
ε	Longueur adimensionnelle de la source de chaleur (l/L)	
ϕ	Coefficient de distribution d'irréversibilité	
Φ	Variable dépendante générale	
ν	Viscosité cinématique	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
μ	Viscosité dynamique	$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
ω	Vorticité dimensionnelle.	$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$
Ω	Vorticité adimensionnelle. ($\omega/V_0.L$).	
ψ	Fonction de courant dimensionnelle.	$\text{m}^3.\text{s}^{-1}$
Ψ	Fonction de courant adimensionnelle	
ρ	Masse volumique (densité)	kg.m^{-3}
Θ	Température adimensionnelle	
τ	Temps adimensionnel	

Nombre sans dimensions

Be	Nombre de Bejan adimensionnel
Gr	Nombre de Grashof
Nu	Nombre de Nusselt
\bar{Nu}	Nombre de Nusselt moyen
Ra	Nombre de Rayleigh
Re	Nombre de Reynolds
Ri	Nombre de Richardson, (Gr/Re^2)
Pr	Nombre de Prandtl, adimensionnel

Les indices

0	Valeur de référence.
c	Chaude
gen	Génération
th	Thermique
ff	friction
f	Froide
i,j :	Coordonnées logiques des nœuds

RÉSUMÉS

RÉSUMÉ

Nous présentons dans cette thèse une étude numérique de la convection mixte laminaire d'un fluide confiné à l'intérieur d'une cavité carrée dont une partie située au milieu de sa paroi inférieure est soumise à une température constante. Les parois latérales de cette cavité sont refroidies par un fluide circulant avec une vitesse constante ascendante, alors que toutes les autres parties de la cavité sont considérées comme adiabatiques. L'effet des nombres de Prandtl et de Richardson sur les champs hydrodynamiques et thermiques, ainsi que sur la génération d'entropie, a été étudié et analysé dans le cadre de la présente investigation.

Une nouvelle approche, pour le calcul exact de la génération d'entropie, qui est un élément clé dans la conception et le design des équipements de base dans de nombreux domaines industriels, a été à ce titre proposée. Cette proposition est justifiée par le fait que, grâce à une recherche bibliographique minutieuse, nous avons constaté que cette génération d'entropie (c'est-à-dire la perte d'énergie) était et reste jusqu'à présent évaluée de manière tout à fait arbitraire et inappropriée.

Le système d'équations régissant l'écoulement en question, basé sur la formulation « fonction de courant Ψ -Vorticité Ω », a été établi en considérant aussi bien les variables primitives que les variables sans dimension. Ce système d'équations a été discrétisé suivant la méthode des différences finies en considérant un maillage non uniforme. Les systèmes d'équations algébriques obtenus après discrétisation sont résolus par différentes méthodes itératives et un code de calcul en langage Fortran a été établi et validé.

Pour étudier l'effet du nombre de Prandtl deux cas ont été examinés. Dans le premier cas nous avons pris en compte trois fluides différents, à savoir le mercure avec un nombre de Prandtl de 0.0251, l'air avec un nombre de Prandtl de 0.73 et l'eau avec un nombre de Prandtl de 6.263. Leurs propriétés thermo-physiques ont été évaluées à la même température de référence égale à 298 K (25°C). Dans le second cas nous avons considéré un même fluide (Eau) à différents nombres de Prandtl dont les valeurs sont : 5.534, 3.045 et 2, correspondant respectivement aux températures de 303 K (30°C), 333 K (60°C), et 363 K (90°C).

Les résultats concernant les champs hydrodynamique, thermique ainsi ceux caractérisant la génération d'entropie ont été présentés et discutés. L'évolution du nombre de Nusselt moyen et de la génération d'entropie globale a été également rapportée pour chaque nombre de Prandtl en fonction du nombre de Richardson.

L'analyse des résultats obtenus montre qu'une augmentation du nombre de Prandtl, entraîne une augmentation du nombre de Nusselt moyen. Par ailleurs la génération d'entropie s'avère plus importante pour le mercure ($Pr \ll 1$) et l'eau ($Pr \gg 1$) que dans le cas de l'air ($Pr \sim 1$).

Mots clés : Convection mixte, Génération d'entropie, Nombre de Prandtl, Méthode des différences finies.

ABSTRACT

We present in this thesis a numerical study of the laminar mixed convection of a fluid confined inside a square cavity with a part in the middle of its lower wall subjected to a constant temperature. The sidewalls of this cavity are cooled by a fluid circulating with a constant ascending velocity, while all other parts of the cavity are considered adiabatic. The effect of Prandtl and Richardson numbers on hydrodynamic and thermal fields, as well as on the entropy generation, was studied and analyzed as part of this investigation.

A new approach, for the exact calculation of the entropy generation, which is a key element in the conception and the design of basic equipment in many industrial fields, has been proposed for this purpose. This proposal is justified by the fact that, thanks to a meticulous bibliographical research, we found that this entropy generation (i.e. energy loss) was and still is evaluated in a completely arbitrary and inappropriate way.

The system of equations governing the flow in question, based on the formulation "current function Ψ -Vorticity Ω ", was established by considering both the primitive variables and the dimensionless variables. This system of equations has been discretized according to the finite difference method considering a non uniform mesh. The systems of algebraic equations obtained after discretization are solved by different iterative methods and a calculation code in Fortran language has been established and validated.

To study the effect of the number of Prandtl two cases were examined. In the first case we took into account three different fluids, namely mercury with a Prandtl number of 0.0251, air with a Prandtl number of 0.73 and water with a Prandtl number of 6.263. Their thermo-physical properties were evaluated at the same reference temperature of 298 K (25°C). In the second case we considered the same fluid (Water) at different Prandtl numbers whose values are : 5.534, 3.045 and 2, corresponding to temperatures of 303 K (30°C), 333 K (60°C), and 363 K (90°C) respectively.

The results concerning the hydrodynamic and thermal fields, and those characterizing the generation of entropy were presented and discussed. The evolution of the average Nusselt number and the global entropy generation was also reported for each Prandtl number as a function of the Richardson number.

The analysis of the results obtained shows that an increase in the number of Prandtl, leads to an increase in the average Nusselt number. Moreover the entropy generation is more important for mercury ($Pr \ll 1$) and water ($Pr \sim 1$) than for air ($Pr \sim 1$).

Key words : Mixed convection, Entropy generation, Prandtl number, Finite difference method.

المخلص

نقدم في هذه الأطروحة دراسة عددية للحمل الحراري المزدوج لسائل موجود داخل تجويف مربع الشكل، جزء من الجدار السفلي للتجويف يقع في المنتصف، يخضع لدرجة حرارة ثابتة. الجدران الجانبية لهذا التجويف ينزلقان بسرعة ثابتة نحو الأعلى وخاضعان لدرجة برودة محددة، بينما تعتبر جميع أجزاء التجويف الأخرى عازلة للحرارة. تمت دراسة تأثير أرقام براندتل وريتشاردسون على المجالات الهيدروديناميكية والحرارية، وكذلك على توليد الأنتروبي، الذي تمت دراسته وتحليله في هذا البحث.

تم اقتراح طريقة جديدة لحساب بدقة توليد الأنتروبي، الذي يعتبر عنصر أساسي في مفهوم وتصميم المعدات الأساسية في العديد من المجالات الصناعية، لذلك تم اقتراحه. هذا الاقتراح مبرر، لأنه بفضل البحث الدقيق، وجدنا أن توليد الأنتروبي (أي فقدان الطاقة) الذي تم تقييمه، لا يزال حتى الآن يحسب بطريقة عشوائية وغير مناسبة تمامًا.

نظام المعادلات التي تمثل التدفق ممثل بصيغة " $\Omega-\Psi$ ". أنجزت الدراسة العددية بواسطة طريقة الفروق المنتهية. تم حل أنظمة المعادلات الجبرية التي تم الحصول عليها بعد التقدير بطرق تكرارية مختلفة، وتم إنشاء برنامج كمبيوتر بلغة فورتران والتحقق من صحته.

تم دراسة تأثير عدد براندتل في حالتين مختلفتين. في الحالة الأولى أخذنا بعين الاعتبار ثلاث سوائل مختلفة، وهو الزئبق برقم براندتل 0.0251، الهواء مع رقم براندتل يبلغ 0.73 والماء برقم براندتل يبلغ 6.263. تم تقييم خواصها الحرارية الفيزيائية بنفس درجة الحرارة المرجعية التي تساوي 298 كلفن (25 درجة مئوية). في الحالة الثانية، اعتبرنا نفس السائل (الماء) بأرقام براندتل مختلفة وقيمها: 5.534، 3.045 و 2، تتوافق على التوالي مع درجات حرارة 303 كلفن (30 درجة مئوية) و 333 كلفن (60 درجة مئوية) و 363 كلفن (90 درجة مئوية).

النتائج المتعلقة بالمجالات الهيدروديناميكية، الحرارية وتلك التي تميز توليد الأنتروبي تم عرضها ومناقشتها. تم عرض أيضًا تطور عدد نسلت المتوسط وتوليد الأنتروبي الكلي لكل رقم من أرقام براندتل وبدلالة رقم ريتشاردسون.

يظهر تحليل النتائج التي تم الحصول عليها أن زيادة في عدد براندتل، يؤدي إلى زيادة عدد نسلت المتوسط. علاوة على ذلك، تبين أن توليد الأنتروبي يكون أكبر بالنسبة للزئبق ($Pr \ll 1$) والماء ($Pr \approx 1$) منه في حالة الهواء ($Pr \sim 1$).

الكلمات المفتاحية: الحمل الحراري المختلط، توليد الأنتروبي، رقم براندتل، طريقة الفروق المنتهية.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

INTRODUCTION GÉNÉRALE

1. GÉNÉRALITÉS

Le thème de cette thèse constitue une suite de plusieurs travaux, initiés depuis plusieurs années au département de Génie Mécanique de la Faculté des Sciences de la Technologie de l'Université des Frères Mentouri de Constantine 1 et poursuivis au sein du département de Génie Chimique de la Faculté de Génie des procédés de l'Université Salah Boubnider de Constantine 3. Ces différents travaux portent sur l'étude du phénomène de la convection mixte d'un fluide confiné à l'intérieur d'une cavité dont une partie située au milieu de sa paroi inférieure est soumise à une température constante. Les parois latérales de cette cavité sont refroidies par un fluide circulant avec une vitesse constante ascendante, alors que toutes les autres parties de la cavité sont considérées comme adiabatiques. Le problème de l'écoulement des fluides avec transfert de chaleur dans de telles configurations géométriques trouve son application pratique dans le secteur industriel en témoignent un nombre de plus en plus croissant de travaux sur ce sujet publiés dans la littérature scientifique. D'autre part, les plus récents de ces travaux, font appel aux principes de la thermodynamique et de la mécanique des fluides pour la détermination de la dissipation d'énergie désignée par « *génération d'entropie* » engendrée dans ces différents écoulements. Actuellement les systèmes thermiques, qui sont basés sur le transfert de chaleur et de masse, l'écoulement des fluides et la thermodynamique, se présentent dans une grande variété d'applications et il est particulièrement important de les optimiser, c'est-à-dire minimiser la génération d'entropie, pour obtenir le meilleur rendement en matière d'énergie tout en tenant compte de leurs impacts environnementaux.

Par ailleurs du point de vue théorique, les forces dues au mouvement des parois ascendantes et les forces dues à la poussée d'Archimède (buoyancy forces en Anglais) qui se trouvent ainsi en opposition, peuvent générer une grande diversité de comportements dynamiques et thermiques complexes tels que l'apparition d'instabilités, de pertes de symétrie, de bifurcations et du chaos. Le comportement dynamique et thermique des écoulements convectifs ainsi que la caractérisation de la génération d'entropie, dans une telle configuration géométrique dépend fortement à la fois de la géométrie de l'enceinte, des conditions aux limites et surtout *du fluide considéré caractérisé intrinsèquement par son nombre de Prandtl (Pr)*.

2. NOMBRE DE PRANDTL

Le nombre de Prandtl ($Pr = \nu/\alpha$) est un paramètre sans dimension qui mesure l'intensité de la diffusivité de la quantité de mouvement (viscosité cinématique ν) par rapport à celle de la chaleur (diffusivité thermique α). En d'autres termes il compare la rapidité des phénomènes hydrodynamiques et des phénomènes thermiques dans un fluide en mouvement. Un nombre de Prandtl élevé, comme par exemple l'eau à 25°C ($Pr=6.263$) indique que les effets de la viscosité du fluide sont prédominants et donc le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Dans le cas contraire, c'est-à-dire pour un nombre de Prandtl faible, comme le mercure toujours à 25°C ($Pr=0.0251$) le profil de vitesse n'aura aucune influence significative sur le profil de température. Pour des fluides dont le nombre de Prandtl est proche de l'unité, comme par exemple l'air à 77°C ($Pr=0.7$), les effets de diffusion de la quantité de mouvement sont comparables à ceux de la diffusion thermique.

3. GÉNÉRATION D'ENTROPIE

Les principes de la mécanique des fluides et de la thermodynamique ont permis une meilleure compréhension des mécanismes d'échanges thermiques. Il est bien connu que la circulation des fluides réels dans les réseaux hydrauliques génère des chutes de pression (dissipation d'énergie mécanique) dues à la résistance que rencontrent les fluides en écoulement désignée généralement sous le nom de : « *perte de charges* ». Ces dernières sont dues aux forces de frottement visqueuses causées par des gradients de vitesses. Lorsqu'en plus ils existent des gradients de températures, de concentrations, des réactions chimiques etc. on parle alors de « *génération d'entropie* ». En d'autres mots les écoulements de fluides réels génèrent de l'entropie (énergie irrécupérable) ayant pour cause des irréversibilités qui sont responsables d'une dégradation de l'énergie disponible (travail utile).

Dans tous les processus impliquant les écoulements des fluides la quantification de la génération d'entropie est nécessaire et souvent primordiale pour le dimensionnement et le design des équipements de base dans de nombreux domaines industriels tels que le refroidissement électronique, les turbomachines, les échangeurs de chaleur, etc. Durant ces

dernières décennies la théorie de la génération d'entropie ainsi que sa minimisation sont devenues et, de toute évidence, elles continuent d'être les sujets les plus abordés dans la recherche scientifique relative aux phénomènes de transfert, car elles peuvent fournir des informations pertinentes sur la perte d'énergie due au transfert de chaleur et à l'irréversibilité du frottement des fluides. Cela constitue donc une motivation suffisante pour une meilleure connaissance des différents mécanismes qui occasionnent la création de cette entropie et peut conduire à une amélioration significative de la conception des dispositifs d'échange thermique.

4. BUT DE L'ÉTUDE

Un premier travail, objet d'un thème de Magister, a déjà été entrepris pour déterminer numériquement les champs thermique et dynamique de l'écoulement par convection mixte de l'air ($Pr=0.7$) confiné à l'intérieur de la configuration géométrique déjà décrite ci-dessus. La génération d'entropie dans cette configuration a été étudiée en fonction du nombre de Richardson. Dans ce premier travail nous avons adopté l'approche, la plus utilisée par la majorité des chercheurs pour la détermination de la génération de l'entropie. Malheureusement il s'est avéré, et nous le démontrerons par la suite, que cette approche entraîne une surestimation de la génération d'entropie. Étant donné que les irréversibilités associées à l'écoulement des fluides réels affectent les pertes de pression et de l'énergie (génération d'entropie), des prévisions précises sont essentielles dans les applications de conception et de design des dispositifs mettant en jeu l'échange thermique. Par ailleurs, le processus d'évaluation de la génération d'entropie ne serait être rationnel et cohérent que si l'on prend en considération non seulement les propriétés thermo-physiques du fluide mais aussi les caractéristiques géométriques du dispositif considéré.

La présente étude se veut donc, une continuation du précédent travail, mais cette fois-ci en proposant une nouvelle approche pour calculer précisément la génération d'entropie qui sera appliquée par la suite au phénomène de convection mixte dans la configuration géométrique choisie, tout en considérant l'effet du nombre de Prandtl sur les champs thermique et dynamique de l'écoulement.

5. PLAN DE LA THÈSE

Pour atteindre l'objectif fixé dans cette thèse le plan suivant a été adopté.

Après cette brève introduction, dans une première partie nous développerons une nouvelle approche plus correcte et plus pragmatique pour la détermination exacte de la génération d'entropie dans des espaces confinés. Cette approche sera détaillée en considérant le phénomène classique de la convection naturelle et de la convection mixte dans une cavité carrée qui constitue souvent un problème (Benchmark) de validation de nouvelles techniques de discrétisation, de nouvelles méthodes de résolution des systèmes d'équations...

Dans la seconde partie, nous exposerons la méthode numérique de discrétisation du système d'équations régissant le phénomène physique considéré. Celle-ci est basée sur la méthode des différences finies en considérant un maillage non uniforme. Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide du schéma « Upwind » précis du troisième ordre. Les termes diffusifs, les termes sources ainsi que les termes à dérivées partielles du premier ordre présent dans les différentes équations sont discrétisés à l'aide d'un schéma centré du quatrième ordre. Enfin la marche dans le temps est assurée par la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre (*RK4*). Les systèmes d'équations algébriques obtenus après discrétisation sont résolus par différentes méthodes itératives. Pour cela un code de calcul en langage FORTRAN a été établi et validé.

Dans la troisième et dernière partie de cette thèse, nous présentons les résultats relatifs au phénomène de la convection mixte en considérant trois fluides différents, à savoir le mercure avec un nombre de Prandtl de 0.0251, l'air avec un nombre de Prandtl de 0.73 et l'eau avec un nombre de Prandtl de 6.263. Une démarche similaire à la précédente a été adoptée à la seule différence que cette fois-ci nous considérons un même fluide (eau) à différents nombres de Prandtl dont les valeurs sont : 5.534, 3.045 et 2, correspondant respectivement aux températures de l'eau de 303 K (30°C), 333 K (60°C), et 363 K (90°C).

Enfin, cette thèse se terminera par une conclusion générale récapitulant les différentes étapes du travail effectué, résumant les principaux résultats obtenus, et proposant des perspectives concernant les investigations à mener dans le même axe de recherche.

CHAPITRE I

NOUVELLE APPROCHE POUR LA DÉTERMINATION EXACTE DE LA GÉNÉRATION D'ENTROPIE

1. INTRODUCTION

La conception et le dimensionnement (design) des équipements présents dans tous les domaines impliquant des écoulements des fluides nécessitent le calcul exact des différentes pertes d'énergies. Ces pertes d'énergie désignées sous le nom de « génération d'entropie » sont modélisées par une équation différentielle à dérivées partielles (Bejan, 1982). Sous sa forme adimensionnelle cette équation contient un coefficient appelé «*Rapport de distribution de l'irréversibilité*» (Irreversibility distribution ratio, en anglais). Dans tous les travaux jusqu'à présent publiés, ce coefficient a une valeur fixe choisie arbitrairement. Dans la nouvelle approche que nous proposons ce coefficient est calculé d'une manière précise. En effet, le calcul de la valeur exacte du rapport de distribution de l'irréversibilité repose sur deux données indispensables. L'une concerne les propriétés thermo-physiques du fluide en question à un nombre de Prandtl (Pr) fixe ou à une température de référence (T_0) bien définie et l'autre concerne une longueur de référence (L) de la configuration géométrique considérée, en fonction du nombre de Rayleigh (Ra) ou du nombre de Grashof (Gr). La comparaison des résultats indique que le rapport de distribution de l'irréversibilité, plus fréquemment utilisé par un nombre important de chercheurs, est généralement largement surestimé, ce qui implique également une surestimation de la génération d'entropie et, par conséquent, un surdimensionnement coûteux dans tous les processus réels impliquant des fluides en écoulement.

2. REVUE DES TRAVAUX ANTÉRIEURS RELATIVE À LA GÉNÉRATION D'ENTROPIE

La détermination précise de la génération d'entropie en ingénierie thermique appliquée est la condition préalable indispensable à la conception de différents types de dispositifs d'échange thermique (Bejan, 1996). La théorie et les concepts fondamentaux de la génération d'entropie ont déjà été bien détaillés par Bejan (1987, 2001), Drost et Zaworski (1989), Rosen (1999), Dincer et Cengel (2001), Naterer et Camberos (2003), Herwig (2012), Sciacovelli et al.

(2015), Jin (2017), Biswal & Basak (2017), et très récemment par Sauerheber (2018), et Chen et al. (2019).

La génération d'entropie a été étudiée, développée et appliquée dans de nombreux écoulements de fluides différents dans plusieurs milieux, comme spécifié dans Sheremet et al. (2017). Il convient également de mentionner qu'Oztop et Al-Salem (2012) ont passé en revue les différents travaux concernant la génération d'entropie dans le transfert de chaleur en convection naturelle et mixte pour les systèmes énergétiques. Mahian et al. (2013) ont passé en revue ceux relatifs à la génération d'entropie dans l'écoulement des nano fluides. En outre, Awad (2015), Ashok Reddy (2016) et récemment Kumar et al. (2020) ont passé en revue les articles qui traitent du même phénomène dans des micros canaux remplis de nano fluides.

Aujourd'hui, de nombreux chercheurs continuent à s'intéresser de très près au phénomène de la génération d'entropie, comme en témoignent les articles qui viennent d'être publiés très récemment. Nous ne citerons dans ce qui suit que quelques-uns d'entre eux. Farah et Sabeur (2022) étudient la génération d'entropie dans le cas d'un fluide pur. Mabood et al. (2021), Yusuf et al. (2022), Sarmiento-Laurel et al. (2022) et Kumar et al. (2023) traitent du même phénomène dans un milieu poreux. Huminic, G. et Huminic, A. (2020) ont passé en revue les travaux qui traitent de la génération d'entropie dans des écoulements de nano fluides et de nano fluides hybrides. Abdulkadhim et al, (2021) ont passé en revue ceux relatifs au même phénomène dans différentes formes d'enceintes complexes. Al-Chlahawi (2021) a passé en revue ceux concernant les nano fluides newtoniens et non newtoniens. D'autres recherches récentes examinent la génération d'entropie dans les nano fluides soumis à des champs magnétiques rapportées par Khan, F. et al. (2021), Khan, D. et al. (2022), et Rahman et al. (2022). Très récemment Zahor et al. (2022) ont passé en revue les recherches antérieures sur les modèles mathématiques de génération d'entropie dans l'écoulement magnétohydrodynamique (MHD) des nano fluides. D'autre part, Hashemi-Tilehnoee et al. (2022), Mukherjee et al. (2022), Shahsavar et al. (2022) et Said et al. (2022) ont également abordé la génération d'entropie dans un régime d'écoulement turbulent convectif.

La génération d'entropie dans les divers types d'écoulements précédemment cités a suscité une attention particulière au sein de la communauté scientifique en raison de leurs applications fondamentales dans des domaines technologiques et industriels tels que :

- Le génie des procédés chimiques (O'Connell 2018, Javed et al. 2019, Korpyš et al. 2020, Olanrewaju et al. 2021, Saffari et al. 2021, Mehdizadeh-Fard et al. 2021, Li et al. 2022, Mendu et Nagaraju 2022), Kumar et al. (2022).
- Les génies mécanique et électronique (Cai et al. 2020, Mahmoud et al. 2021, Bahiraei et al. 2022), Jatau et al. (2022).
- Le dessalement de l'eau de mer (Li et al. 2022).
- L'énergie solaire (Mehta et Mondal 2022, Goyal et Reddy 2022, Rahmanian et al. 2022, Jakeer et Reddy 2022, López-Núñez 2022), Nishad, et Bhargava (2022).
- L'aérodynamique et l'hydrodynamique (Ghisu et al. 2018, Saffarzadeh et Djavarehshkian 2021, Hussain 2022).
- La médecine et la biomédecine (Divya et Reddy 2022, Shahzad et al. 2022, Nadeem et al. 2022, Kumawat et al. 2022, Abbasi et al. 2022), etc.

Cette recherche bibliographique d'articles récemment publiés montre à quel point le sujet est toujours d'actualité et doit être revisité afin de parvenir à une approche cohérente du calcul exact des pertes d'énergie générées dans les différents processus impliquant un transfert de chaleur.

3. PROBLÉMATIQUE

Pour bien comprendre les conditions dans lesquelles la génération d'entropie a été, jusqu'à présent, déterminée et pour bien cerner le problème auquel nous sommes confrontés et qui consiste en la détermination exacte de cette entité physique, nous allons tout d'abord évoquer, de manière à bien fixer les idées, l'équation de la génération d'entropie sans dimension, telle qu'elle est utilisée par tous les auteurs dans le cas d'un écoulement en régime de convection naturelle ou mixte.

Cette équation est donnée par l'expression suivante :

$$S_{gen} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right)^2 + \varphi \left\{ 2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 \right\} \quad (1.1)$$

Le second membre de cette équation est composé de deux termes. Le premier terme représente la génération d'entropie locale due au transfert de chaleur alors que le second terme

représente la génération d'entropie locale due à la friction du fluide. Ce dernier est subordonné à un coefficient φ défini comme étant le "*rapport de distribution d'irréversibilité*". Un réel problème réside dans la détermination précise de la valeur du rapport de distribution d'irréversibilité. Jusqu'à présent, le calcul exact de ce rapport n'a pas encore été établi. Lorsqu'il s'agit d'évaluer la génération d'entropie, tous les chercheurs se permettent d'imposer des valeurs arbitraires du rapport de distribution de l'irréversibilité sans aucune preuve scientifique à l'appui. De plus, une comparaison stricte entre ces présumées valeurs (lorsqu'elles sont mentionnées) montre que la différence entre elle peut être assez importante.

En effet, dans le cas spécifique de la convection naturelle :

Oztop et al. (2019), Baliti et al. (2020), Ghalambaz et al. (2021), Mliki et Abbassi, (2021), et plus récemment, Rasool et al. (2022), Sudarsana Reddy et al. (2022), Yousefzadeh et al. (2022), et Akhter et al. (2022) présentent et discutent des résultats pour la génération d'entropie sans spécifier aucune valeur du rapport de distribution de l'irréversibilité, empêchant ainsi plusieurs chercheurs de reproduire et de vérifier leurs résultats.

Varol et al. (2009), Shavik et al. (2014), Jassim et al. (2017), Seyyedi et al. (2020), et plus récemment Hussain (2022) imposent des valeurs constantes du même rapport comprises entre 10^{-2} et 10^{-6} sans donner aucune explication ou justification objective. De même, Erbay et al. (2003, 2004) spécifient des valeurs qui augmentent linéairement avec le nombre de Rayleigh (Ra), commençant à 10^{-13} pour $Ra=10^2$ pour atteindre 10^{-9} pour $Ra=10^6$, avec un pas constant de 10.

Magherbi et al. (2003), Ilis et al. (2008), De C. Oliveski et al. (2009), et Bouabid et al. (2011) considèrent ce coefficient comme un paramètre d'investigation au même titre que les nombres de Rayleigh, Grashof ou Prandtl, et le font varier largement entre 10^{-4} et 10^{-1} . Cette pratique est encore utilisée aujourd'hui comme en témoigne, par exemple, une étude très récente publiée par Karki et al. (2022) qui examinent l'analyse exergique de la convection naturelle de Rayleigh-Bénard en faisant varier le même rapport entre 10^{-2} et 10^{-5} .

Enfin, il faut souligner que nous avons pu trouver une étude numérique de la génération d'entropie en convection naturelle rapportée par Khorasanizadeh et al. (2012), dans laquelle ils ont un doute substantiel sur le fait que le rapport de distribution de l'irréversibilité φ reste constant alors que dans le même temps le nombre de Rayleigh varie considérablement. Les valeurs de ce rapport suggérées par ces auteurs varient en fonction du nombre de Rayleigh sont

certes plus importantes que celles déjà proposées, mais elles sont encore loin de la réalité, et surtout, aucune proposition ne précise comment ces valeurs ont été concrètement obtenues.

Les mêmes commentaires rapportés ci-dessus concernant la génération d'entropie de la convection naturelle sont également valables dans le cas de la convection mixte. Par exemple : Ögüt, (2019), Sivanandam et al. (2020), Shirani et Toghraie (2021), Korei et Benissaad (2021), Hassen et al. (2021), Abderrahmane et al. (2022), Rasool et al. (2022), et Hussain et al. (2022) n'apportent aucune précision quant à la valeur du rapport de distribution d'irréversibilité ϕ .

Roy et al. (2015a) ont adopté une valeur du rapport de distribution de l'irréversibilité égale à 10^{-2} , sans donner d'explication ou de justification objective. De leur côté, Nayak et al. (2015, 2016), ainsi que Sanjib et Bhattacharyya (2017) ont choisi une valeur de ce même rapport égale à 10^{-4} .

L'analyse de la génération d'entropie pour la convection mixte a également été réalisée dans des cavités ventilées. Atashafrooz et Shafie (2020) ont étudié la génération d'entropie pour un écoulement de fluide en convection mixte dans une enceinte trapézoïdale ventilée. Très récemment, Dutta et al. (2023) ont étudié la performance thermique et la génération d'entropie dues à la convection mixte et au transfert de chaleur conjugué d'un nano fluide hybride Al_2O_3 -Cu dans une enceinte ventilée avec un obstacle chauffé monté en surface. Dans ces deux articles, les auteurs ne précisent aucune valeur pour le rapport de distribution de l'irréversibilité. Maougal et Bessaïh (2013) ont analysé la génération d'entropie dans une cavité ouverte carrée remplie d'un milieu poreux saturé. Ils choisissent une valeur du rapport de distribution de l'irréversibilité égale à 10^{-2} . Plus récemment, Benzema et al. (2020) ont étudié la génération d'entropie dans une cavité ventilée de forme complexe remplie de nano fluide hybride, en optant pour la même valeur du rapport d'irréversibilité proposée par les auteurs cités ci-dessus (10^{-2}).

Enfin, en conséquence de ce qui a été rapporté ci-dessus, on peut conclure qu'il existe de nombreuses lacunes dans la détermination de la valeur exacte du rapport de distribution de l'irréversibilité, et plus particulièrement dans le choix délibéré d'une valeur arbitraire et constante du rapport de distribution de l'irréversibilité, qui diffère d'un chercheur à l'autre.

Par conséquent, dans cette première partie de la thèse, nous montrerons que la valeur exacte du rapport de distribution de l'irréversibilité peut être obtenue simplement en tenant compte de toutes les propriétés thermo-physiques du fluide en question et d'une longueur caractéristique de la géométrie considérée. Cette nouvelle approche, proposée ici pour la

première fois, sera appliquée et testée sur des problèmes déjà largement traités en convection naturelle et mixte et les résultats seront comparés à ceux disponibles dans la littérature.

4. DÉTERMINATION DU RAPPORT DE DISTRIBUTION DE L'IRRÉVERSIBILITÉ

L'équation adimensionnelle de la génération d'entropie (1.1) nécessite non seulement la détermination des gradients de température et de vitesse mais aussi l'expression du rapport de distribution de l'irrégularité φ . Nous allons, dans ce qui suit, présenter les différentes étapes pour parvenir à la formulation mathématique de cet important paramètre. Dans cette perspective, nous considérons, pour simplifier, un écoulement bidimensionnel en régime de convection naturelle ou mixte à l'intérieur d'une cavité carrée à chauffage différentiel. L'écoulement est instationnaire, newtonien, laminaire et incompressible. La dissipation visqueuse est négligeable et toutes les autres propriétés thermo-physiques du fluide sont supposées constantes, à l'exception de la densité du fluide, qui donne lieu aux forces de flottabilité (approximation de Boussinesq).

4.1. Modèle mathématique

Conformément aux hypothèses exposées ci-dessus, la formulation "fonction de courant ψ - vorticité ω " des équations de base sous une forme dimensionnelle décrivant l'écoulement en régime de convection naturelle ou mixte peut être exprimée comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Dans la pratique, les variables non dimensionnelles suivantes sont souvent utilisées pour obtenir la forme non dimensionnelle du système d'équation (I) :

$$X, Y = \frac{1}{L}(x, y), \quad U, V = \frac{1}{\alpha/L}(u, v), \quad \Theta = \frac{T - T_c}{\Delta T}, \quad \tau = \frac{t}{L^2/\alpha}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\alpha/L^2}, \quad \Psi = \frac{\psi}{\alpha} \quad (1.2)$$

Pour la convection naturelle et

$$X, Y = \frac{1}{L}(x, y), \quad U, V = \frac{1}{v_w}(u, v), \quad \Theta = \frac{T - T_c}{\Delta T}, \quad \tau = \frac{v_w}{L}t, \quad \Omega = \frac{L}{v_w}\omega, \quad \Psi = \frac{\psi}{Lv_w} \quad (1.3)$$

Pour la convection mixte.

On obtient ainsi la version sans dimension des systèmes d'équations (II) et (III) pour la convection naturelle et mixte respectivement.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} &= -\Omega \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= Pr \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + Ra Pr \frac{\partial \Theta}{\partial X} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \end{aligned} \right\} (II)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} &= -\Omega \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \frac{\partial \Theta}{\partial X} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \right\} (III)$$

Les vitesses sans dimension U, V sont exprimées en termes de fonction de courant comme

$$\text{suit : } U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}$$

Ψ représente la fonction de courant sans dimension. La vorticité sans dimension Ω est définie par : $\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$ (Les détails de son obtention se trouvent dans l'annexe A).

Les paramètres sans dimension qui interviennent dans ces équations sont les nombres de Rayleigh (Ra), Prandtl (Pr), Grashof (Gr) et Reynolds (Re), et sont définis par les relations suivantes :

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Re = \frac{v_w L}{\nu}, \quad Gr = \frac{g \beta \Delta T}{\nu^2} L^3, \quad Ra = Gr \times Pr = \frac{g \beta \Delta T}{\nu \alpha} L^3 \quad (1.4)$$

Juste à titre d'information, le rapport Gr/Re^2 définit le nombre de Richardson (Ri), qui est très souvent utilisé comme paramètre de contrôle dans les écoulements en régime de convection mixte.

De tels systèmes d'équations dimensionnelles (I) ou non dimensionnelles (II, III) associés à des conditions initiales et limites adéquates permettent de déterminer numériquement les champs dynamiques et thermiques de l'écoulement, par la suite les gradients de vitesse et de température seront utilisés pour quantifier la génération d'entropie produite dans le domaine physique.

4.2. Equation de la génération d'entropie

L'équation de la génération d'entropie s'obtient exactement comme celles de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie à partir des principes généraux de la physique. Pour de plus amples détails concernant l'obtention de cette équation On peut se référer, par exemple, au livre de Bejan (2013). Celle-ci est donnée par l'expression suivante :

$$s_{gen} = \underbrace{\frac{k}{T_0^2} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\}}_{s_{th}} + \underbrace{\frac{\mu}{T_0} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}}_{s_{ff}} \quad (1.5)$$

En outre, la génération d'entropie locale, avec les mêmes variables sans dimension, est donnée par :

$$S_{gen} = c_1 \underbrace{\left\{ \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)^2 \right\}}_{s_{th}} + c_2 \underbrace{\left\{ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right\}}_{s_{ff}} \quad (1.6)$$

En tenant compte des variables non dimensionnelles (équations 1.2 et 1.3) les deux coefficients d'irréversibilité figurant dans cette équation sont définis par :

$$c_1 = k \left(\frac{\Delta T}{T_0 L} \right)^2 \quad c_2 = \frac{\mu}{T_0} \left(\frac{\alpha}{L^2} \right)^2 \quad \text{Pour la convection naturelle et}$$

$$c_1 = k \left(\frac{\Delta T}{T_0 L} \right)^2 \quad c_2 = \frac{\mu}{T_0} \left(\frac{v_w}{L} \right)^2 \quad \text{Pour la convection mixte convection}$$

Il convient de noter que tous les auteurs, qui ont travaillé sur ce sujet (détermination de la génération d'entropie) utilisent une autre formulation pour définir la génération d'entropie locale sans dimension qu'ils appellent « nombre de génération d'entropie locale N_s ». Ce nombre n'est d'autre que l'équation (1.6) divisée le coefficient d'irréversibilité c_1 et il est donné par :

$$N_s = \underbrace{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)^2}_{s_{th}} + \underbrace{\varphi \left\{ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right\}}_{s_{ff}} \quad (1.7)$$

4.3. Expression mathématique du rapport de distribution de l'irréversibilité

Le paramètre φ dans l'équation (1.7) qui désigne le "rapport de distribution de l'irréversibilité" s'exprime par :

$$\varphi = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\mu T_0}{k} \left(\frac{\alpha}{\Delta T} \right)^2 \frac{1}{L^2} \quad (1.8)$$

Dans le cas de la convection naturelle et dans le cas spécifique de la convection mixte, il est défini comme suit :

$$\varphi = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\mu T_0}{k} \left(\frac{v_w}{\Delta T} \right)^2$$

La vitesse caractéristique v_w qui caractérise le régime de la convection mixte (vitesse d'une paroi mobile par exemple) peut être déduite de la définition du nombre de Reynolds comme suit : $v_w = \frac{\nu Re}{L}$ L'équation précédente devient alors :

$$\varphi = \frac{\mu T_0}{k} \left(\frac{\nu Re}{\Delta T} \right)^2 \frac{1}{L^2} \quad (1.9)$$

4.4. Nombre de Bejan

Le nombre de Bejan, qui est défini comme le rapport entre la production d'entropie dû aux irréversibilités du transfert de chaleur et la production totale d'entropie, est probablement la mesure la plus significative du champ entropique.

Le nombre de Bejan local sous forme dimensionnelle et sans dimension est calculé respectivement comme suit :

$$be = \frac{s_{th}}{s_{th} + s_{ff}} = \frac{\frac{k}{T_0^2} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\}}{\frac{k}{T_0^2} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{\mu}{T_0} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}} \quad (1.10)$$

$$Be = \frac{S_{th}}{S_{th} + S_{ff}} = \frac{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right)^2}{\left(\frac{\partial\Theta}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial Y}\right)^2 + \varphi \left\{ 2\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 \right\}} \quad (1.11)$$

Une valeur du nombre de Bejan proche de 1 montre que la génération d'entropie due à la friction (S_{ff}) du fluide est négligeable alors que si celle-ci est proche de 0 c'est la génération d'entropie locale due au transfert de chaleur (S_{th}) qui est négligeable. Lorsque cette valeur est proche 0.5 les deux types d'irréversibilité sont du même ordre de grandeur.

5. NOUVELLE APPROCHE POUR LE CALCUL EXACT DU RAPPORT DE DISTRIBUTION DE L'IRRÉVERSIBILITÉ φ

La nouvelle approche que nous proposons ici consiste à utiliser l'équation (1.5) associée à l'équation (1.10) et l'équation (1.6) associée à l'équation (1.11) pour déterminer la génération d'entropie et le nombre de Bejan dans leurs formes dimensionnelles et adimensionnelles respectivement. Par ailleurs, il est bien évident que le rapport de distribution d'irréversibilité φ dépend exclusivement de la longueur de référence L , du fait que les autres paramètres sont soit fixes ($g, T_0, Pr, Re, \Delta T$), soit connus ($\rho, k, \mu, \alpha, \beta$). Pour chaque fluide caractérisé par son nombre de Prandtl (ou une température fixe T_0), les propriétés thermo-physiques appropriées ($\rho, k, \mu, \alpha, \beta, \dots$) peuvent être facilement obtenues à partir de la littérature disponible sur le sujet (Dincer, 1997 ; Dincer et Rosen, 2011). La seule question qui reste à résoudre ici, concerne le calcul exact de la longueur caractéristique L , qui dépend du type de problème et de la géométrie de la cavité. Pour atteindre cet objectif, nous pouvons déduire cette longueur de référence à partir de l'expression définissant le nombre de Rayleigh dans le cas de la convection naturelle, ou de celle du nombre de Grashof, dans le cas de la convection mixte. Nous obtenons respectivement :

$$L = \sqrt[3]{\frac{\nu\alpha}{g\beta\Delta T} Ra} \quad \text{Ou encore} \quad L = \sqrt[3]{\frac{\nu^2}{g\beta\Delta T} Gr} \quad (1.12)$$

Il est désormais clair qu'une valeur précise du rapport de distribution d'irréversibilité φ peut être facilement obtenue pour déterminer la génération d'entropie tant pour la convection naturelle que pour la convection mixte. A titre d'exemple, nous allons appliquer la méthode proposée afin de calculer ce rapport d'irréversibilité en considérant, à titre d'exemple, trois fluides, les plus couramment rencontrés dans les études relatives au phénomène considéré, à

savoir l'air ($Pr=0,70$, $T_0=350K$), l'eau ($Pr=6,946$, $T_0=293K$), et le mercure ($Pr=0,0152$, $T_0=423K$). Les valeurs de référence de leurs propriétés thermo-physiques, énumérées dans le tableau 1, ont été tirées des livres des auteurs déjà cités (Dincer, 1997 ; et Dincer et Rosen, 2011). En outre, la différence de température ΔT est maintenue constante à 10 K, et dans le cas de la convection mixte, le nombre de Reynolds est maintenu constant à 100.

Tableau 1.1 : Propriétés thermo-physiques de l'air ($Pr=0.7$, $T_0=350K$), de l'eau ($Pr=6.946$, $T_0=293K$), et du mercure ($Pr=0.0152$, $T_0=423K$)

	Unités	Air	Eau	Mercure
ρ	kg m^{-3}	0.995	998.2	13231
k	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$	$3 \cdot 10^{-2}$	$6.034 \cdot 10^{-1}$	10.0778
μ	$\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$	$2.082 \cdot 10^{-5}$	$1.002 \cdot 10^{-3}$	$1.126 \cdot 10^{-3}$
α	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	$2.99 \cdot 10^{-5}$	$1.445 \cdot 10^{-7}$	$5.595 \cdot 10^{-6}$
β	K^{-1}	$2.857 \cdot 10^{-3}$	$2.066 \cdot 10^{-4}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$

Avec ces trois fluides retenus et leurs propriétés thermo-physiques, la longueur de la cavité carrée L peut être calculée à partir de l'équation (1.12) pour chaque nombre de Rayleigh et remplacée dans les équations (1.8) et (1.9), fournissant ainsi les valeurs exactes du rapport de distribution d'irréversibilité φ , qui sont présentées dans le tableau 1.2 pour la convection naturelle et mixte respectivement.

Tableau 1.2 : Valeurs exactes du rapport de distribution d'irréversibilité φ pour différents nombres de Rayleigh pour les trois fluides sélectionnés (air, eau et mercure) en régime de convection naturelle (φ_{NC}) et mixte (φ_{MC}).

Ra	Air		Eau		Mercure	
	φ_{NC}	φ_{MC}	φ_{NC}	φ_{MC}	φ_{NC}	φ_{MC}
10^3	$1.613 \cdot 10^{-8}$	$7.889 \cdot 10^{-5}$	$7.514 \cdot 10^{-12}$	$3.626 \cdot 10^{-6}$	$2.694 \cdot 10^{-10}$	$6.223 \cdot 10^{-8}$
10^4	$3.475 \cdot 10^{-9}$	$1.703 \cdot 10^{-5}$	$1.619 \cdot 10^{-12}$	$7.812 \cdot 10^{-7}$	$5.803 \cdot 10^{-11}$	$1.341 \cdot 10^{-8}$
10^5	$7.487 \cdot 10^{-10}$	$3.666 \cdot 10^{-6}$	$3.488 \cdot 10^{-13}$	$1.683 \cdot 10^{-7}$	$1.250 \cdot 10^{-11}$	$2.889 \cdot 10^{-9}$
10^6	$1.613 \cdot 10^{-10}$	$7.889 \cdot 10^{-7}$	$7.514 \cdot 10^{-14}$	$3.626 \cdot 10^{-8}$	$2.693 \cdot 10^{-12}$	$6.223 \cdot 10^{-10}$

Au vu de ces résultats, l'effet le plus notable de l'augmentation des nombres de Rayleigh se traduit par une diminution exponentielle du rapport de distribution d'irréversibilité φ . Cette

diminution est beaucoup plus importante pour la convection naturelle que pour la convection mixte. En effet, lorsque le nombre de Rayleigh varie entre 10^3 et 10^6 , le rapport de distribution d'irréversibilité varie entre 10^{-8} et 10^{-10} pour l'air, entre 10^{-12} et 10^{-14} pour l'eau, et entre 10^{-10} et 10^{-12} pour le mercure dans le cas de la convection naturelle. Dans le cas de la convection mixte, le même coefficient, varie entre 10^{-5} et 10^{-7} pour l'air, entre 10^{-6} et 10^{-8} pour l'eau, et entre 10^{-8} et 10^{-10} pour le mercure. La raison principale est que le rapport de distribution d'irréversibilité φ est proportionnel à l'inverse du carré de la longueur caractéristique L , et donc sa valeur diminue exponentiellement lorsque la longueur caractéristique L (ou le nombre de Rayleigh) augmente. En d'autres termes, le rapport de distribution de l'irréversibilité φ varie significativement en fonction du nombre de Rayleigh et ne peut donc en aucun cas être considéré comme une constante choisie arbitrairement.

En conclusion, nous avons pu démontrer, sans aucun doute possible, que les formules actuelles (c'est-à-dire les équations (1.8) et (1.9)) fournissent l'expression des valeurs exactes du rapport de distribution de l'irréversibilité dans le cas de la convection naturelle et mixte respectivement.

6. ARGUMENTS POUR JUSTIFIER L'UTILISATION DE L'APPROCHE PROPOSÉE POUR CALCULER LE RAPPORT DE DISTRIBUTION DE L'IRRÉVERSIBILITÉ

Une analyse rigoureuse des travaux publiés relatifs à l'étude et à la détermination de la génération d'entropie dans les processus de transfert de chaleur montre que la grande majorité des chercheurs ont utilisé et continuent d'utiliser des valeurs arbitraires du rapport de distribution de l'irréversibilité. Nous allons citer quelques études relatives à la détermination de la génération d'entropie, que ce soit en convection naturelle ou mixte, et dont leurs auteurs utilisent des valeurs qui semblent confuses, intrigantes et parfois même contradictoires.

Tout d'abord dans le cas de la convection naturelle, Zemani et Sabeur (2022) étudient la génération d'entropie de la convection naturelle laminaire de l'air ($Pr=0.7$) dans des enceintes munies de parois latérales partiellement chauffées. Ces auteurs indiquent clairement que les problèmes combinés de transfert de chaleur et de mécanique des fluides dépendent de plusieurs paramètres, parmi lesquels la géométrie de l'enceinte et les valeurs locales des propriétés

thermo-physiques du fluide. Concrètement, cela signifie que lors du calcul du rapport de distribution d'irréversibilité φ via l'équation (1.8), afin d'obtenir la génération d'entropie via l'équation (1.7), tous ces facteurs doivent être pris en compte. Cependant, ils n'appliquent pas ce qu'ils avancent et se contredisent en optant pour un choix arbitraire du rapport de distribution de l'irréversibilité dont les valeurs varient entre 10^{-4} et 10^{-2} quelles que soient les valeurs du nombre de Rayleigh. Dans une approche similaire, Yang et al. (2021) déclarent clairement que le rapport de distribution de l'irréversibilité φ dépend du nombre de Rayleigh (Ra), et se référant aux travaux de Baytaş ils choisissent, sans aucune explication valable, une valeur de ce paramètre égale à $10/Ra$. Cependant, d'un point de vue purement mathématique et en combinant les équations (1.7) et (1.11), nous pouvons exprimer ce coefficient comme suit : $\varphi = \frac{C^{nt}}{Ra^{2/3}}$ Où C^{nt} est une constante qui dépend des propriétés thermo-physiques du fluide.

Basak et al. (2011), ainsi que Kaluri et Basak (2011a) examinent la génération d'entropie pour la convection naturelle dans des cavités carrées pour différents fluides (Différents nombres de Prandtl), avec des nombres de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^5 . En se référant aux études précédentes concernant le même phénomène, ils choisissent une valeur du rapport d'irréversibilité égale à 10^{-4} . Ils affirment également que ce rapport est un paramètre ajustable et que pour un fluide donné, il varie en fonction du "nombre de différence de température" $\Delta T/T_0$. Ces affirmations sont tout à fait incorrectes pour différentes raisons. Premièrement, la différence de température $\Delta T = (T_h - T_c)$ doit rester fixe et relativement limitée à quelques degrés seulement, selon la nature du fluide, pour satisfaire l'approximation de Boussinesq. Deuxièmement, à chaque valeur du nombre de Prandtl correspond une seule valeur fixe de la température de référence $T_0 = (T_h + T_c)/2$ et vice versa. Par conséquent, ni le "nombre de différence de température" $\Delta T/T_0$, ni même ΔT n'ont d'impact décisif sur une évolution significative des nombres de Rayleigh (10^3 - 10^5), puisque le seul paramètre qui peut le faire est la longueur caractéristique L de la cavité car, dans l'expression du nombre de Rayleigh (Ra), la longueur L y figure à la puissance 3.

Mehryan et al. (2018) ont étudié la génération d'entropie en convection naturelle d'un nano fluide Eau- Fe_3O_4 dans une cavité carrée soumise à un champ magnétique. Les effets des nombres de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$), du nombre de Hartmann ($0 \leq Ha \leq 50$), de la concentration des nanoparticules ($0 \leq \phi \leq 0,08$) ont été étudiés. Hajatzadeh Pordanjani et al. (2019) ont considéré le même problème dans une cavité rectangulaire remplie du nano fluide Eau- Al_2O_3 en présence d'un flux radiatif. Il reste inexplicable pourquoi les premiers auteurs choisissent

une valeur de rapport de distribution d'irréversibilité égale à 10^{-4} , alors que les seconds choisissent une autre valeur du même rapport égale à 10^{-5} (dix fois plus petite).

Kaluri et Basak (2011b ; 2011c) analysent la génération d'entropie pour la convection naturelle dans des cavités carrées poreuses impliquant une large gamme de nombres de Prandtl ($Pr = 0,015, 0,7, 10, 1000$), le nombre de Rayleigh variant entre 10^3 et 10^6 tandis que le nombre de Darcy varie entre 10^{-3} et 10^{-6} . Ils utilisent un ordre de grandeur pour les propriétés des milieux poreux saturés en fluide pour évaluer le rapport d'irréversibilité à 10^{-2} . Rathnam et al. (2016a), étudient également la génération d'entropie pendant la convection naturelle au sein de cavités triangulaires poreuses à différents nombres de Prandtl ($Pr = 0,015$ et $7,2$), à différents nombre de Darcy ($Da = 10^{-5}$ à 10^{-2}), et un nombre de Rayleigh ($Ra = 10^6$). En adoptant une approche similaire à celle des auteurs ci-dessus cités, ils évaluent le rapport d'irréversibilité à 10^{-2} . En revanche, dans un article similaire, Rathnam et al. (2016b) ont étudié numériquement le même phénomène dans des enceintes triangulaires inclinées non poreuses pour des nombres de Prandtl, qui varient entre $0,015$ et 1000 , et des nombres de Rayleigh, qui varient entre 10^3 et 10^5 . Ils ont opté cette fois-ci pour une valeur du rapport d'irréversibilité égale à 10^{-4} au lieu de 10^{-2} . Ismael et al. (2016) ont rapporté une étude similaire sur la génération d'entropie due au transfert thermique conjugué convection naturelle-conduction dans une cavité poreuse chauffée par une paroi solide triangulaire et saturée par un nanofluide Eau-CuO. Comme précédemment, en ce qui concerne le rapport de distribution de l'irréversibilité, ils utilisent également un ordre de grandeur pour les propriétés du milieu poreux saturé en fluide pour évaluer le rapport d'irréversibilité à 10^{-2} . De la même manière, Hoseinpou et al. (2017) ont étudié numériquement les effets du nombre de Darcy ($10^{-4} \leq Da \leq 10^{-2}$), du nombre de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$) et de la fraction volumique des nanoparticules solides ($0 \leq \phi \leq 5\%$) sur la génération d'entropie du nano fluide Eau-Cu dans une cavité carrée poreuse. Le nombre de Prandtl pour le fluide de base (eau) est supposé égal à $6,2$, et en se référant à d'autres auteurs, ils choisissent une valeur de rapport de distribution d'irréversibilité égale à 10^{-2} .

D'autres contradictions évidentes ont également été notées, par exemple, les mêmes auteurs Varol et al. (2008a ; 2008b) traitent de la génération d'entropie due à la convection naturelle conjuguée dans des enceintes 2D remplies d'air ($Pr=0.7$). Dans le premier article, une valeur du rapport de distribution d'irréversibilité de 10^{-3} est arbitrairement choisie, et dans le second, la valeur du même rapport est arbitrairement choisie égale à 10^{-2} . Des travaux similaires sur le même phénomène dans des enceintes 3D remplies d'air ($Pr=0.7$) ont été rapportés par Kolsi et ses collègues (Kolsi et al. 2016 ; Yejjer et al. 2017 ; Al-Rashed et al. 2017, et plus

récemment Alghaseb et al. (2022). Dans les deux premiers articles, une valeur de rapport de distribution de l'irréversibilité de 10^{-5} est arbitrairement choisie, et dans les deux autres, la valeur de ce même rapport est arbitrairement choisie égale à 10^{-4} .

Dans d'autres études, Mansour et al. (2017), Rashad et al. (2018) et très récemment Mourad et al. (2022) ont proposé une analyse de génération d'entropie de la convection naturelle magnéto-hydro-dynamique d'un nano fluide Eau-Cu dans une enceinte remplie d'un milieu poreux. Cependant, en considérant le même phénomène et en utilisant le même fluide, les premiers auteurs ont choisi une valeur du rapport de distribution d'irréversibilité égale à 10^{-1} , les deuxièmes auteurs ont choisi une valeur de 10^{-3} , alors que les derniers auteurs ont choisi une autre valeur du même rapport égale à 100 (mille et cent mille fois plus grande respectivement).

Mayeli et Sheard (2021) ont étudié un problème de référence (benchmark problem) concernant la convection naturelle dans des cavités carrées et obliques remplies d'air ($Pr=0,71$). Les détails spécifiques de la génération d'entropie sont réalisés avec un nombre de Rayleigh variant entre 10^1 et 10^6 alors que, dans le même temps, et en référence aux travaux antérieurs réalisés par Ilis et al. (2008), Basak et al. (2011) ils décident de prendre une valeur fixe égale à 10^{-4} pour le rapport de distribution de l'irréversibilité. Ils justifient leur choix par le fait que dans l'air ($Pr=0,71$) aux conditions standard, cela correspond à une longueur $L \sim 10^{-1}$ m et une différence de température $\Delta\theta \sim 1$ K, ce qui est une fausse affirmation. En effet, en tenant compte des propriétés thermo-physiques de l'air à $Pr=0,7$ ($T_0=350$ K, $k=3 \cdot 10^{-2}$, $\mu=2,082 \cdot 10^{-5}$, $\alpha=2,99 \cdot 10^{-5}$) et si en plus $\Delta T \sim 1$ K et, $L \sim 10^{-1}$ m, alors une estimation grossière montre que, la valeur exacte du rapport de distribution d'irréversibilité sera égale à $2,2 \cdot 10^{-8}$. Il est important de noter que cette valeur est 10 000 fois plus petite que celle proposée par ces derniers auteurs.

Nejad et Keshtkar (2017) ont étudié le même phénomène que les auteurs cités ci-dessus, en considérant cette fois une cavité carrée de 0,15 m de longueur, sans préciser la valeur du rapport d'irréversibilité. Par ailleurs, avec les propriétés thermo-physiques de l'air (tableau 1) et une longueur de 0,15m, nous obtenons une valeur unique du nombre de Rayleigh de l'ordre de 10^8 , ce qui montre que le régime d'écoulement est turbulent et non laminaire. Par ailleurs, Al-Abbasi (2017) a mené une investigation relative à la génération d'Entropie pour les phénomènes de convection naturelle pour différentes cavités géométriques remplies d'air ($Pr=0,7$) qui ont des conditions aux limites et des surfaces unitaires identiques. Cependant, contrairement au cas précédent, le rapport de distribution de l'irréversibilité est, cette fois-ci, égal à 10^{-2} (cent fois plus grand). De plus, ils considèrent une longueur de référence des différentes cavités de 1m

alors qu'en même temps, ils font varier le nombre de Grashof entre 10^3 et 10^6 , ce qui conduit à une contradiction évidente. D'autre part en tenant compte une fois de plus, des propriétés thermo-physiques de l'Air (voir tableau 1) et si en plus, $\Delta T \sim 10$, un simple calcul démontre que la valeur du nombre de Grashof (ou du nombre de Rayleigh) ne peut être qu'unique et dont la valeur est d'environ 10^8 , c'est-à-dire que le régime d'écoulement est turbulent.

Kolsi et al. (2014) ont étudié numériquement la convection naturelle et la génération d'entropie pour la convection naturelle laminaire dans une cavité cubique d'une longueur de 1m remplie de nano fluide Eau- Al_2O_3 . Les calculs numériques sont effectués pour des nombres de Rayleigh de ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$), une fraction volumique solide de ($0\% \leq \phi \leq 20\%$), tandis que le nombre de Prandtl de l'eau est considéré constant ($Pr = 6,2$). La valeur du rapport d'irréversibilité utilisé pour calculer la génération d'entropie n'a pas été spécifiée. De plus, comment peuvent-ils faire varier les nombres de Rayleigh de 10^3 à 10^6 tout en maintenant constante la longueur L de la cavité ? Enfin avec une telle valeur de la longueur ($L=1\text{m}$) le nombre de Rayleigh qui lui correspond est supérieur à 10^8 et donc le régime est turbulent.

De même, Al-Kouz et al. (2019) ont étudié numériquement les effets du nombre de Knudsen ($0 \leq Kn \leq 0,1$), du nombre de Rayleigh ($10^3 \leq Ra \leq 10^6$) et de la fraction volumique de la particule nano solide ($0 \leq \phi \leq 0,2$) sur la génération d'entropie pour une convection naturelle laminaire dans une cavité carrée d'une longueur de 1m remplie de nano fluide Air- Al_2O_3 équipée de deux ailettes solides au niveau de la paroi chaude. Ils indiquent clairement que toutes les propriétés thermo-physiques du nano fluide ont été supposées constantes car une petite différence de température entre les parois chaude et froide (ΔT) a été imposée pour satisfaire l'approximation de Boussinesq. Encore une fois, la contradiction vient du fait de garder une longueur de référence L constante et une petite valeur de ΔT et de faire varier le nombre de Rayleigh (Ra) dans une large gamme. Pire encore, ces auteurs présentent une corrélation de la génération d'entropie totale en fonction des paramètres énumérés ci-dessus, exprimée comme suit : $S_{gen,tot} = C_1 C_2^{Kn} Ra^{C_3} C_4^\phi$ Où, $C_1 = 2,2 \cdot 10^{-4}$ kJ/kg K, $C_2 = 0,134$, $C_3 = 0,226$, $C_4 = 0,0077$.

En plus de cela, à titre indicatif, il faut noter que le même phénomène, dans la même configuration géométrique ainsi qu'avec les mêmes données, a été publié (Al-Kouz et al. 2018a ; 2018b) mais cette fois-ci sans prendre en compte le calcul de la génération d'entropie. Il est également important de souligner que la longueur de référence de la cavité L utilisée dans ces deux investigations reste à nouveau constante et égale à 1m, tandis que le nombre de Rayleigh

varie de 10^3 à 10^6 . Là encore, des corrélations inappropriées pour le nombre de Nusselt ont été développées. Étant donné que la longueur de référence reste constante ($L=1\text{m}$) le nombre de Rayleigh (Ra) doit aussi rester constant, on peut alors conclure que ces corrélations sont incorrectes et ne peuvent en aucun cas être appliquées à des problèmes réels impliquant la conception de divers processus d'ingénierie de transfert de chaleur.

Dans le même ordre d'idées, Souayah et al. (2021), ont étudié le même phénomène de la génération d'entropie en convection naturelle dans une cavité de forme parallélépipédique de longueur ($L=2\text{m}$), de largeur ($D=1\text{m}$) et de hauteur ($H=1\text{m}$) remplie de nano fluides à base d'eau ($Pr=7.2$) autour de deux sphères dans une disposition horizontale. Plus récemment, Alfannakh et al. (2022) ont considéré strictement le même phénomène, mais cette fois-ci la forme de la cavité est cubique avec une longueur de $L=1\text{m}$ et un nombre de Prandtl de 6.2. Nous avons remarqué d'une part que le nombre de Rayleigh basé sur la longueur de référence constante L varie de 10^3 à 10^6 et, d'autre part, que le rapport d'irréversibilité n'a pas été défini précisément. En prenant leurs propres valeurs des propriétés thermo-physiques du fluide considéré et une longueur de cavité L égale à 1m (ou 2m), on obtient une valeur du nombre de Rayleigh (ou nombre de Grashof) supérieure à 10^8 . Cela implique non seulement une valeur fixe du nombre de Rayleigh (ou nombre de Grashof), que l'on ne peut faire varier, mais aussi un régime d'écoulement turbulent qui ne peut pas être résolu en considérant les équations propres au régime laminaire.

Parvin et Chamkha (2014) rapportent une étude numérique de l'écoulement en convection naturelle, du transfert de chaleur et de la génération d'entropie dans une géométrie combinant des formes horizontales et verticales d'enceintes remplie de nanofluide Cu-eau. Dans le calcul de la génération d'entropie, la valeur du rapport de distribution d'irréversibilité n'est pas spécifiée, en plus de cela, ils utilisent l'équation (1.8), qui est valable pour la convection mixte et non pour la convection naturelle.

Dans un article qui vient juste de paraître Said et al. (7 Septembre 2022) rapportent une analyse, de la génération d'entropie en régime de convection naturelle laminaire et turbulente dans une enceinte carrée remplie d'air ($Pr=0.7$). Leurs simulations numériques ont été réalisées en utilisant le code commercial Fluent en considérant des nombres de Rayleigh (Ra) qui varient de 10^3 à 10^{10} . Par ailleurs, le rapport de distribution de l'irréversibilité φ a été considéré comme un paramètre d'investigation au même titre que les nombres de Rayleigh et les valeurs testées étaient $\varphi = 10^{-4}$, 10^{-3} et 10^{-2} .

Dans le cas de la convection mixte, nous avons également identifié certaines incohérences. Par exemple, certains auteurs parmi lesquels peuvent être particulièrement cités : Kolsi (2016), Al-Rashed et al. (2018), Barnoon et al. (2019), Ishak et al. (2021) ; et plus récemment Hamzah et al. (2022), Laidoudi et al. (2022), et Alshare et al. (2022) utilisent l'équation (1.8) pour le calcul du rapport de distribution d'irréversibilité, qui est valable pour la convection naturelle au lieu de l'équation (1.9) qui est valable pour la convection mixte. Chamkha et al. (2018) étudient la génération d'entropie et la convection mixte soumise à un champ magnétique (MHD) dans une cavité carrée poreuse, saturée d'un nano fluide Eau-Cu. Lors du calcul du rapport de distribution d'irréversibilité, d'une part, ils appliquent l'équation (1.8), qui est valable pour la convection naturelle et non pour la convection mixte, et d'autre part, lors des simulations numériques, ils choisissent arbitrairement une valeur de 10^{-2} pour ce dernier paramètre, sans donner d'explication cohérente. De la même manière, Mahapatra et ses collègues (Mondal et Mahapatra 2021 ; Mondal et al. 2021 ; et Parveen et Mahapatra, 2022) examinent le même phénomène que les auteurs susmentionnés. Dans les deux premiers articles, ils considèrent une cavité trapézoïdale et utilisent l'équation (1.8) pour le calcul du rapport de distribution de l'irréversibilité. En revanche, dans le dernier article, ils considèrent une enceinte incurvée et utilisent l'équation (1.9) pour le calcul du même rapport.

Roy et al. (2015b ; 2015c), utilisent un ordre de grandeur pour les propriétés thermophysiques du fluide pour évaluer le rapport d'irréversibilité à 10^{-3} et 10^{-2} respectivement. Il s'agit de la même démarche que celle adoptée par Kaluri et Basak (2011a ; 2011b) et Rathnam et al. (2016a) (déjà mentionné dans la section sur la convection naturelle). De la même manière, Alsabery et ses collègues (Alsabery et al. 2018a ; 2018b ; et 2020) ont examiné le même phénomène traitant de la génération d'entropie et de la convection mixte dans une cavité à parois ondulées contenant un cylindre solide en rotation et une source de chaleur. Ils font référence à la convection mixte mais utilisent l'équation (1.8) qui est valable pour la génération d'entropie dans le régime de convection naturelle. De plus, dans les deux premiers articles, le rapport de distribution de l'irréversibilité est égal à 10^{-3} , tandis que dans le dernier article, la valeur de ce paramètre n'est pas spécifiée. Très récemment, Maneengam et al. (2022) ont étudié numériquement la génération d'entropie et la convection mixte soumise à un champ magnétique dans une enceinte trapézoïdale poreuse avec différents motifs en zigzag de la paroi chaude, remplie de nano fluide hybride contenant un tube interne rotatif. Les effets du nombre de Darcy ($10^{-5} \leq Da \leq 10^{-2}$), du nombre de Hartman ($0 \leq Ha \leq 50$), de la vitesse de rotation du tube interne ($\Omega = 100, 250$ et 500) et de la fraction volumique des nanoparticules ($0 \leq \phi \leq 6\%$), ont été

rapportés dans cette étude. La longueur de la paroi chaude en zigzag, qui est utilisée comme longueur de référence, et le nombre de Rayleigh (Ra) sont fixés à 1 m et 10^5 respectivement. La valeur du ratio de distribution de l'irréversibilité n'a pas été précisée. Nous constatons que, là aussi, la valeur du nombre de Rayleigh proposée ne correspond pas à celle qui serait obtenue en utilisant leurs propres valeurs des propriétés thermo-physiques du fluide considéré (eau). Une brève estimation montre que la vraie valeur du nombre de Rayleigh est de l'ordre de 10^8 , ce qui implique un régime d'écoulement turbulent. Dans ce contexte, il convient également de garder à l'esprit qu'une attention particulière doit être portée aux valeurs numériques de la longueur de référence L apparaissant dans les expressions des différents paramètres directeurs sans dimension. Ainsi, par exemple, pour l'air, l'eau et le mercure, sur la base des valeurs de leurs propriétés thermo-physiques indiquées dans le tableau 1, lorsque le nombre de Rayleigh (Ra) est égal à 10^6 , on obtient, à partir de l'équation (1.12), des valeurs numériques pour la longueur de référence L de 0,116, 0,037 et 0,0075 m respectivement. Ces valeurs sont significativement inférieures à celles choisies arbitrairement par plusieurs auteurs déjà mentionnés. On notera à ce propos que Moon, et Chung (2019) qui ont examiné la convection naturelle laminaire dans une enceinte rectangulaire chauffée par le bas et refroidie par le haut, ont considérés des longueurs de la cavité qui varient entre 0.005 m et 0.4 m pour pouvoir ne traiter que le régime laminaire.

A travers cette recherche bibliographique nous avons exposé toutes les contradictions relatives au choix des valeurs du rapport de distribution d'irréversibilité indispensable à la détermination de la génération d'entropie. Nous avons constaté que ces valeurs peuvent varier de 10^{-6} à 10^2 , selon les auteurs. Nous allons dans ce qui suit préciser les principaux arguments qui nous ont motivés à proposer une nouvelle approche pour le calcul exact de ce rapport.

6.1. Choix purement arbitraire du rapport de distribution d'irréversibilité ϕ

Aussi bien dans le domaine des sciences fondamentales que dans celui des sciences appliquées, Il serait impensable que la valeur d'un paramètre significatif apparaissant dans l'expression ou dans l'équation permettant le calcul d'une entité physique quelconque soit obligatoirement choisie au hasard. Nous allons illustrer notre propos par un exemple simple qui abonde dans le même sens. Il s'agit du calcul de la perte de charge (perte d'énergie) dans les circuits hydrauliques. En effet cette perte de charge est donnée par l'expression suivante :

$$\Delta H = \frac{U^2}{2g} \lambda \frac{L}{D_h}$$

Dans laquelle ΔH est la perte de charge en m de fluide considéré, U est la vitesse débitante (égale au débit divisé par la section du conduit), L est la longueur du conduit, D_h est le diamètre hydraulique, g est l'accélération gravitationnelle et λ est le coefficient de perte de charge. On démontre que dans le cas d'un régime laminaire la valeur de ce coefficient est égale à $64/Re$ alors que dans le cas d'un régime turbulent ce dernier est donné par des formules empiriques (obtenues à partir d'expériences). Parmi ces formules empiriques on peut citer par exemple la formule de Colebrook, l'une des plus utilisées, et dont l'expression est :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon}{3.71D_h} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} \right\} \text{ ou } \varepsilon \text{ est la rugosité absolue de la conduite.}$$

Ce coefficient de perte de charge est directement tiré de différentes abaques ou bien obtenu en résolvant l'équation non linéaire précédente par une méthode numérique, et donc il n'a jamais fait l'objet d'un choix arbitraire comme c'est le cas du rapport de distribution de l'irréversibilité φ .

6.2. Nombre de Rayleigh (Ra) ou nombre de Grashof (Gr)

Généralement ces nombres sans dimension que l'on peut considérer comme étant le rapport entre la force de flottabilité et la force visqueuse agissant sur un fluide. Ils jouent le même rôle dans les écoulements convectifs que celui du nombre de Reynolds en mécanique des fluides, c'est-à-dire faire la distinction entre un écoulement en régime laminaire et un écoulement en régime turbulent. Actuellement la limite exacte entre ces deux régimes n'est pas bien établie mais en générale elle se situe entre 10^6 et 10^7 pour des écoulements ayant lieu dans des espaces fermés. Par ailleurs, ces nombres interviennent directement dans les équations adimensionnelles pour la détermination des champs thermique et hydrodynamique et par conséquent dans celle de la génération d'entropie (gradients de température et de vitesse).

Leurs expressions (formules ci-dessous) montrent qu'ils dépendent de l'accélération gravitationnelle g , d'un groupement de facteurs propres à la nature du fluide (β , ν , α), d'une différence de température ΔT et enfin d'une longueur de référence L de la configuration géométrique adoptée.

$$Gr = g \left(\frac{\beta}{\nu^2} \right) \Delta T L^3 \qquad Ra = Gr \times Pr = g \left(\frac{\beta}{\nu \alpha} \right) \Delta T L^3$$

Pour un fluide donné caractérisé par son nombre de Prandtl (Pr) ou une température de référence T_0 fixée les propriétés thermo-physiques (β , ν , α) sont connues. En outre la différence de température ΔT est limitée à quelques degrés seulement pour satisfaire à l'approximation de Boussinesq. Donc, logiquement seule la longueur de référence L peut faire varier ces nombres dans une large plage. Cependant certains auteurs (déjà cités) résolvent les équations propres au régime laminaire alors qu'ils choisissent, sans s'en rendre compte, des valeurs des longueurs de leur configuration géométrique assez importante pour conduire à un régime turbulent. A l'inverse d'autres auteurs prétendent faire varier le nombre de Rayleigh dans des plages assez importants grâce à la différence de température ΔT . A ce propos prenant l'exemple de Mourad et al. (2022) qui affirment faire varier le nombre de Rayleigh (Ra) entre 10^3 et 10^6 en augmentant la valeur de ΔT tout en tenant compte de l'hypothèse de Boussinesq. Ce qui est non seulement complètement faux, mais également contradictoire. Un autre exemple assez significatif concerne une thèse qui traite du transfert thermique conjugué dans les cavités rectangulaires en convection naturelle, présentée par Hervé Frank Nouanegué en Juin 2008 à l'Ecole Polytechnique de Montréal (Canada) en vue de l'obtention du diplôme « Philosophiae Doctor ». Les équations de ce problème sont établies en régime laminaire pour un nombre de Prandtl égale à 0.7 (air) alors que le nombre de Rayleigh (Ra) varie entre $3 \cdot 10^8$ et $3 \cdot 10^{12}$, ce qui caractérise un régime turbulent bien établi. En contradiction avec ce dernier exemple Grégoire Dufrasne a présenté une étude numérique relative au phénomène de convection naturelle de Rayleigh-Bénard dans une cavité cubique remplie d'eau, chauffée par sa paroi inférieure, et dont les parois latérales sont parfaitement conductrices en vue de l'obtention du diplôme de Master (promotion 2017-2018) à l'Ecole Polytechnique de Louvain (Belgique). Dans ce cas le nombre de Rayleigh (Ra) est pris égal à 10^4 , $5 \cdot 10^4$ et 10^7 . L'auteur précise que l'écoulement est d'abord laminaire et stationnaire, mais l'augmentation du nombre de Rayleigh rend progressivement l'écoulement turbulent. Ce qui est tout à fait logique par rapport à l'exemple précédent.

6.3. Analogie entre le nombre de Rayleigh et le rapport de distribution de l'irréversibilité

Le nombre de Rayleigh (ou le nombre de Grashof) et le rapport de distribution de l'irréversibilité φ (équations 1.8 et 1.9) sont tous les deux tributaires de la longueur de référence L . Dans les expressions du nombre de Rayleigh (ou du nombre Grashof) la longueur L figure au numérateur à la puissance 3 et dans celle du rapport de distribution de l'irréversibilité φ elle figure au dénominateur à la puissance 2. Aussi d'un point de vue purement mathématique il est impossible que l'un des paramètres varie alors que l'autre reste constant, puisque toutes les propriétés thermo-physiques du fluide restent constantes (hypothèse de Boussinesq). Par ailleurs dans toutes les études le nombre de Rayleigh (ou le nombre Grashof) varie largement entre 10^3 et 10^6 . Seule la longueur L peut permettre cette grande variation et par conséquent le rapport de distribution de l'irréversibilité φ ne doit, en aucun cas, être maintenu constant.

Enfin, et au vu de ce qui a été rapporté ci-dessus, il convient de prendre en compte une citation très révélatrice de Costa (2005), ici reprise mot pour mot : "*(...) Also important is the fact that many natural convection studies use the Boussinesq approximation and the dimensionless version of the governing equations. In order to increase the importance of the viscous dissipation, some non-realistic values can be given to the dimensionless governing parameters, thus leading to results associated to non-realistic situations.*"

Ce qui peut se traduire par : "*(...) Il est important également de noter que de nombreuses études sur la convection naturelle utilisent l'approximation de Boussinesq et la version sans dimension des équations gouvernantes. Afin d'augmenter l'importance de la dissipation visqueuse, certaines valeurs non réalistes peuvent être données aux nombres sans dimension, conduisant ainsi à des résultats associés à des situations non réalistes.*"

7. PROBLÈMES TESTS POUR LA VALIDATION DE LA NOUVELLE APPROCHE

La nouvelle méthode a été développée pour revisiter le calcul de la génération d'entropie pour deux problèmes de référence classiques d'écoulement en convection naturelle et mixte dans une cavité carrée avec des parois latérales chauffées de manière différentielle. Le but de cette initiative est de valider les résultats obtenus à l'aide de la nouvelle méthode proposée ici en les comparant à ceux obtenus dans des études similaires.

7.1. Cas de la convection naturelle

Le premier problème de référence, représenté sur la figure 1.1, consiste en une étude numérique de la génération d'entropie en régime de convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'air ($Pr=0,7$ à $T_0=350K$), soumise à un gradient thermique horizontal. Il s'agit du même problème que ceux rapportés par Magherbi et al. (2003), Ilis et al. (2008), Oliveski et al. (2009) et Bouabid et al. (2011).

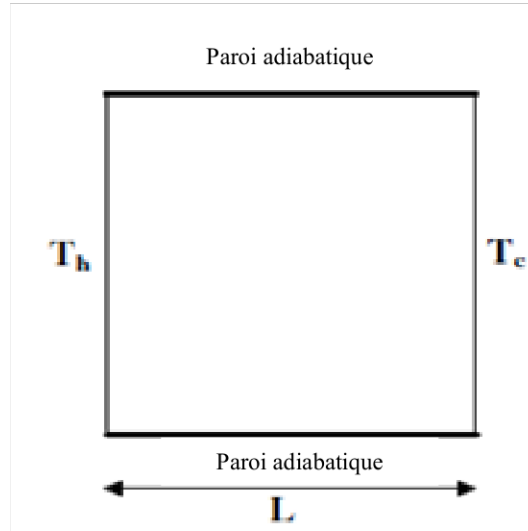


Figure 1.1 : Schéma du problème test (Magherbi et al. 2003)

La résolution numérique du système d'équations (I) précédent nécessite les conditions initiales et limites suivantes :

$$\text{A } t = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq L, \quad 0 \leq y \leq L, \quad \psi = \omega = 0, \quad T = T_0 + \Delta T \left(0,5 - \frac{x}{L} \right)$$

$$\text{A } t > 0$$

$$\Psi = 0, \text{ et } T = T_h \text{ à la paroi de gauche}$$

$$\Psi = 0, \text{ et } T = T_c \text{ à la paroi droite}$$

$$\Psi = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ aux parois inférieure et supérieure.}$$

Sous la forme adimensionnelle, ces dernières conditions initiales et limites deviennent :

$$\text{À } \tau = 0 \text{ et pour } 0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad \Psi = \Omega = 0, \quad \Theta = 0,5 - X.$$

$$\text{Pour } \tau > 0$$

$$\Psi = 0, \text{ et } \Theta = 0,5 \text{ à la paroi gauche.}$$

$$\Psi = 0, \text{ et } \Theta = -0,5 \text{ à la paroi droite}$$

$$\Psi = 0, \Omega = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \quad \& \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \text{ et aux parois inférieure et supérieure.}$$

Les quantités physiques significatives telles que le nombre de Nusselt moyen, la génération totale d'entropie et le nombre de Bejan moyen sont définies sous la forme dimensionnelle et la forme adimensionnelle respectivement comme suit :

$$\overline{nu} = -\frac{1}{\Delta T} \int_0^L \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} dy \quad \overline{s_{gen}} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L s_{gen} dx dy \quad \overline{be} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \frac{s_{th}}{s_{gen}} dx dy \quad (1.13)$$

$$\overline{Nu} = -\int_0^1 \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} dY \quad \overline{S_{gen}} = \int_0^1 \int_0^1 S_{gen} dXdY \quad \overline{Be} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{S_{th}}{S_{gen}} dXdY \quad (1.14)$$

Le nombre moyen de génération d'entropie est exprimé comme suit :

$$\overline{Ns} = \int_0^1 \int_0^1 Ns dXdY \quad (1.15)$$

Il convient toutefois de préciser que les lettres minuscules correspondent aux variables dimensionnelles et les lettres majuscules aux variables adimensionnelles.

7.1.1. Méthode numérique de résolution

Dans un souci de clarté, seuls les détails les plus spécifiques de la méthodologie numérique sont décrits ci-dessous. Les systèmes d'équations (I) et (II), soumis à leurs conditions initiales et limites respectives, ont été discrétisés par la méthode des différences finies. La discrétisation temporelle a été réalisée en utilisant la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (R.K.4). Les termes convectifs ont été discrétisés à l'aide d'un schéma upwind du troisième ordre tel que proposé par Kawamura et al. (1985). Les termes diffusifs, ainsi que les termes incluant les dérivées premières, ont été discrétisés par un schéma précis d'ordre 4. Une procédure itérative basée sur la méthode successive de sur relaxation non linéaire (NLOR) a été utilisée pour résoudre l'équation de la fonction de flux discrétisée. Une fois les vitesses et les températures déterminées, le nombre de Nusselt moyen et les caractéristiques de la génération d'entropie totale en variables dimensionnelles et sans dimension sont calculés. Un code en langage FORTRAN a été développé, validé et testé en termes de fiabilité pour résoudre les systèmes d'équations discrétisées.

7.1.2. Comparaison avec les résultats de référence

La validité de ce premier problème de référence utilisant l'approche proposée a été vérifiée en résolvant les systèmes d'équations (I) et (II) exprimés avec les variables dimensionnelles et sans dimension respectivement. Les contours des isothermes (colonne de gauche) et des lignes de courant (colonne de droite), à $Ra=10^4$ sous forme dimensionnelle (rangée du haut) et sous forme sans dimension (rangée du bas) sont présentés dans la figure 1.2. On observe qualitativement que les champs dynamiques et thermiques (c'est-à-dire les isothermes et les lignes de courant) ont la même forme dans les deux cas.

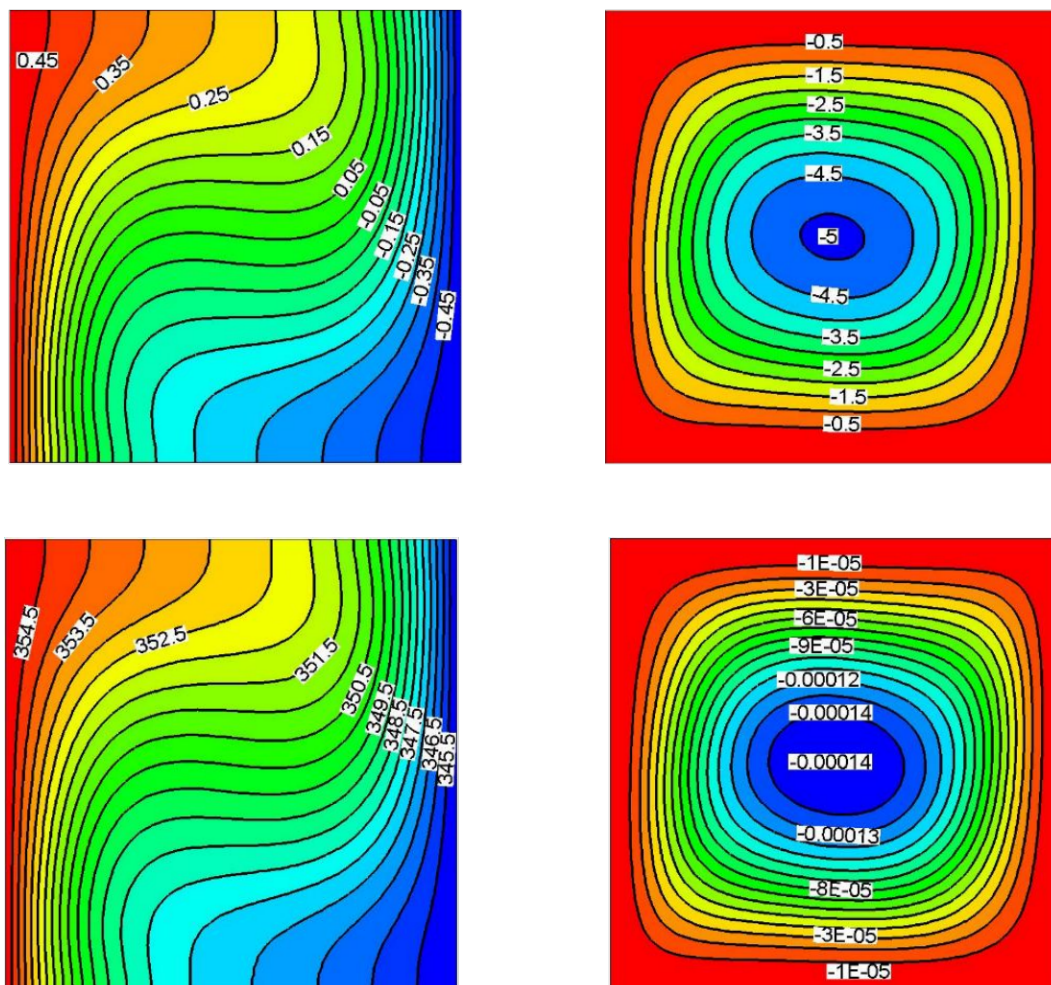
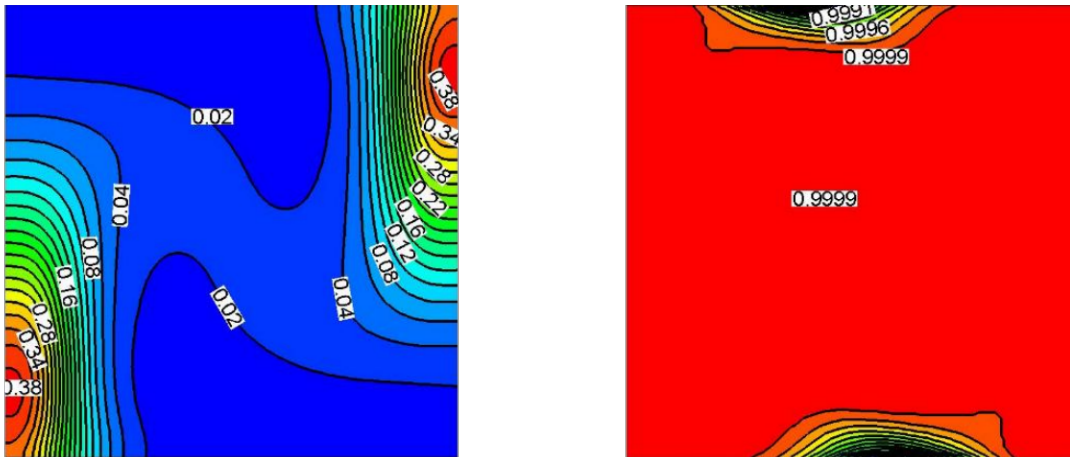


Figure 1.2 : Isothermes (colonne de gauche) et lignes de courant (colonne de droite), sous forme dimensionnelle (rangée du haut) et adimensionnelle (rangée du bas) à $Ra=10^4$.

Les contours de la génération d'entropie (colonne de gauche) et du nombre de Bejan (colonne de droite) sous forme dimensionnelle (rangée du haut) et adimensionnelle (rangée du bas) à $Ra=10^4$ sont présentés sur la figure 1.3. En examinant de près cette figure, on peut voir qualitativement et quantitativement que la distribution de la génération d'entropie et celle du nombre de Bejan sont identiques pour les deux cas. Pour confirmer cela, nous avons comparé le nombre de Nusselt moyen, la génération d'entropie totale et le nombre de Bejan moyen en utilisant les équations (1.13) et (1.14), qui sont valables pour la forme dimensionnelle et adimensionnelle respectivement. Les valeurs obtenues de ces caractéristiques physiques sont indiquées dans le tableau 1.3. Il convient de noter que les chiffres exacts qui correspondent les uns aux autres sont assez similaires, car nous avons utilisé la valeur réelle du rapport de distribution de l'irréversibilité indiquée dans le tableau 1.2 pour $Ra=10^4$ et $Pr=0,7$. Ce résultat était prévisible, puisque les valeurs des caractéristiques physiques considérées, c'est-à-dire le nombre de Nusselt moyen, la génération d'entropie totale et le nombre de Bejan moyen, doivent rester identiques quel que soit le système d'équations utilisé pour les obtenir.



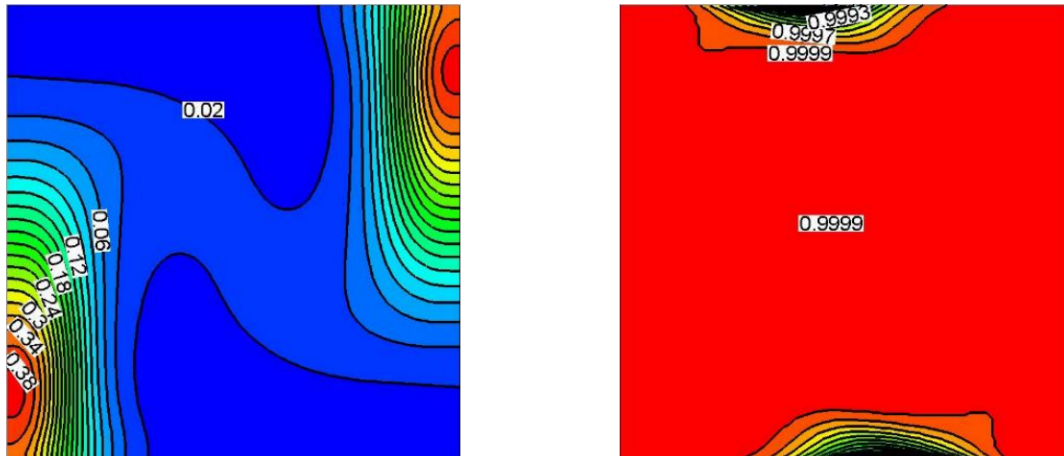


Figure 1.3 : Contours de la génération d'entropie (colonne de gauche) et du nombre de Bejan (colonne de droite) sous forme dimensionnelle (rangée supérieure) et adimensionnelle (rangée inférieure) à $Ra=10^4$.

Tableau 1.3 : Valeurs moyennes du nombre de Nusselt, de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan obtenues à partir des équations résolues avec les variables dimensionnelles et adimensionnelles ($Ra=10^4$, $Pr=0.7$)

	Variables Dimensionnelles		Variables Adimensionnelles
\overline{nu}	2.24905	\overline{Nu}	2.24907
$\overline{s_{gen}}$	6.949419 10^{-2}	$\overline{S_{gen}}$	6.949482 10^{-2}
\overline{be}	0.999987308	\overline{Be}	0.999987308

Le nombre moyen de génération d'entropie sans dimension (\overline{Ns}) donné par l'équation (1.7), en fonction du logarithme du nombre de Rayleigh (Ra) est représenté sur la figure 1.4. Dans la figure 1.4(a), ce paramètre est calculé avec un rapport de distribution d'irréversibilité ϕ conformément à notre approche, en tenant compte des propriétés thermo-physiques du fluide (voir Tableau 1.1) et de la longueur de la cavité L calculée à partir de l'équation (1.12). Dans la Figure 4(b), le même paramètre est calculé avec un rapport de distribution d'irréversibilité ϕ , fixé arbitrairement à 10^{-4} , suivant l'approche adoptée par Magherbi et al. (2003), Ilis et al. (2008), Oliveski et al. (2009), et Bouabid et al. (2011). Nous observons clairement une différence significative entre les deux approches concernant non seulement l'échelle des valeurs de ce paramètre mais aussi la forme de sa courbe en fonction de Ra . En effet, dans la figure 1.4(a), \overline{Ns} varie sur une échelle de 1 à 9 avec une pente légèrement croissante, alors que dans

la figure 1.4(b), \overline{Ns} varie de 1 à 400, mais cette fois-ci, la variation est modérément progressive pour Ra inférieur à 10^5 et devient exponentielle par la suite.

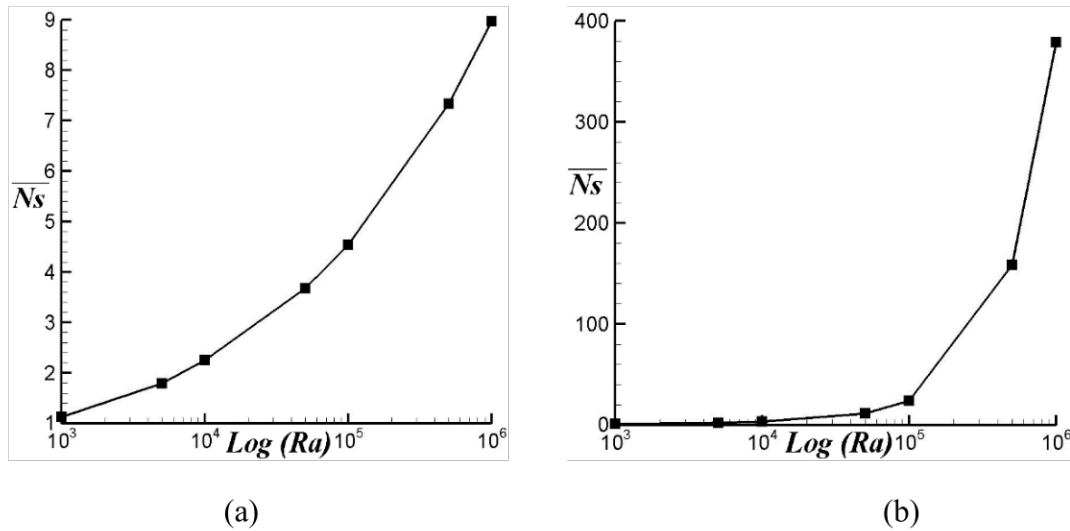


Figure 1.4 : Variation de \overline{Ns} en fonction de Ra (a) selon notre approche, (b) selon l'approche adoptée par Magherbi et al. (2003)

7.1.3. Génération d'entropie totale

Les équations de la génération d'entropie totale sous forme dimensionnelle (1.5) et adimensionnelle (1.6) ont été résolues numériquement pour différents nombres de Rayleigh. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 1.5. Comme on pouvait s'y attendre, les deux courbes s'accordent en tout point (non visible sur la figure) et cela quelle que soit la forme des équations considérées. De plus, ces courbes fournissent une mesure directe de la génération totale d'entropie dans le domaine physique, qui peut être directement exploitée dans le but de concevoir et d'optimiser différents types d'équipements impliquant un transfert de chaleur dans des écoulements de fluide. Ce n'est pas le cas du nombre total de génération d'entropie sans dimension \overline{Ns} , qui n'est d'aucune utilité ni pratique, ni théorique pour les ingénieurs dans la détermination de la perte d'énergie dans le processus thermique.

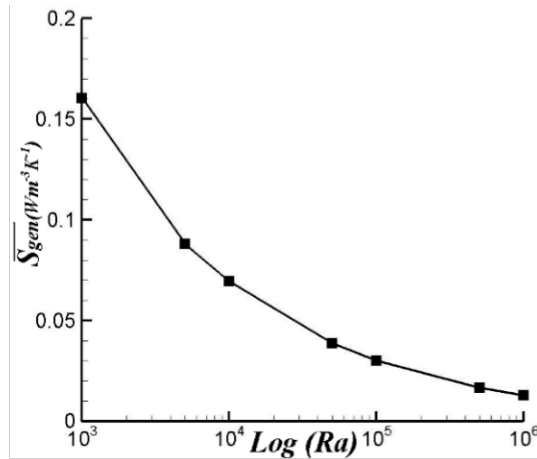


Figure 1.5 : Variation de la génération d'entropie totale \overline{S}_{gen} en fonction du nombre de Rayleigh (Ra).

7.1.4. Nombre de Bejan

L'évolution du nombre de Bejan moyen est présentée dans la figure 1.6 pour différents nombres de Rayleigh, suivant les deux approches déjà mentionnées ci-dessus. La figure 1.6(a) concerne notre approche tandis que la figure 1.6(b) concerne celle utilisée par Magherbi et al. (2003). En ce qui concerne notre approche, les formes dimensionnelle et adimensionnelle donnent, sans surprise, les mêmes valeurs du nombre moyen de Bejan, dans le sens où les courbes d'évolution de ce nombre en fonction de Ra (figure 1.6 (a)) obtenues par les deux modèles sont ici superposées. Ainsi, l'obtention de la même valeur de ce nombre indépendamment de la façon dont le système d'équations a été résolu (c'est-à-dire avec des variables dimensionnelles ou adimensionnelles) est la meilleure preuve pour confirmer l'exactitude et la fiabilité de l'approche utilisée pour son calcul. En outre, on peut observer sur cette figure que la différence évidente entre les deux approches réside dans le fait que, selon notre approche, le nombre de Bejan moyen est proche de 1 quel que soit le nombre de Rayleigh, alors qu'il varie significativement de 0,02 à 1, selon l'approche de Magherbi et al. (2003). Cela pourrait s'expliquer par le fait que, quel que soit le nombre de Rayleigh, le rapport de distribution de l'irréversibilité φ , déterminé à partir de notre approche, n'est pas constant et varie entre $1.613 \cdot 10^{-8}$ et $1.613 \cdot 10^{-10}$ quand le nombre de Rayleigh (Ra) varie de 10^3 à 10^6 . Alors que la valeur de ce rapport adoptée par Magherbi et al, (2003) est arbitrairement fixée à 10^{-4} . Il semble plus qu'évident, que de faibles valeurs du rapport de distribution d'irréversibilité conduisent à une diminution drastique de la génération d'entropie due au frottement visqueux, ce qui est confirmé par le fait que la valeur du nombre de Bejan est proche de 1. Ce résultat

corrobore l'hypothèse commune selon laquelle la fonction de dissipation visqueuse est toujours négligée dans l'équation de transport d'énergie.

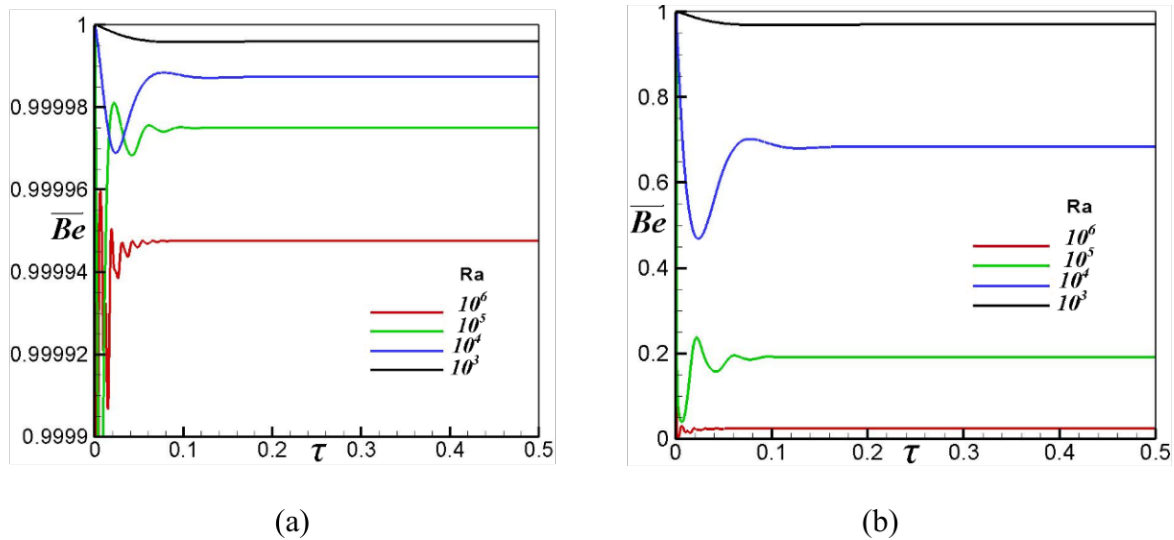


Figure 1.6 : Évolution de \overline{Be} en fonction de Ra (a) selon notre approche, (b) selon l'approche adoptée par Magherbi et al. (2003).

Dans cette première section test relative à la génération d'entropie en régime de convection naturelle nous avons montré comment utiliser la nouvelle méthode pour obtenir la valeur exacte de cet important paramètre. Dans la section qui va suivre nous allons adopter la même démarche pour obtenir toujours la valeur exacte du paramètre en question dans le cas de la convection mixte.

7.2. Cas de la convection mixte

Le second problème de référence, représenté sur la figure 1.7, consiste en une étude numérique de la génération d'entropie en régime de convection mixte dans une cavité carrée remplie de mercure ($Pr=0,015$ à $T_0=423K$), dotées d'une paroi inférieure maintenue à une température constante chaude, d'une paroi supérieure adiabatique et de parois latérales maintenues à une température constante froide. La différence de température ΔT est toujours maintenue constante à 10 K, alors que le nombre de Reynolds (Re) est pris égal à 1. Il s'agit du même problème traité par Roy et al. (2015).

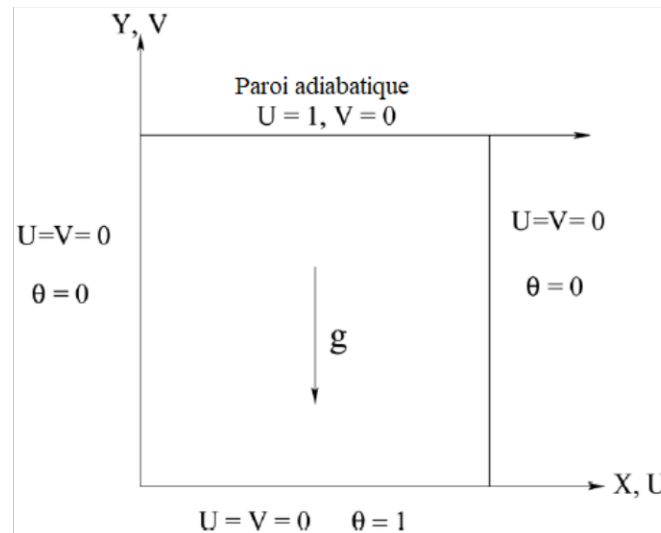


Figure 1.7 : Schéma du problème test et conditions aux limites (Roy et al. 2015)

7.2.1. Validation de la méthode adoptée

La résolution de ce problème suit la même démarche que celle retenue dans le cas de la convection naturelle. La seule différence est que dans ce cas il faut considérer les systèmes d'équations (I) et (III) pour obtenir la distribution des températures et des vitesses dans tout le domaine physique. Ensuite les différentes caractéristiques de la génération d'entropie sont déterminées en utilisant cette fois-ci l'équation (1.9) pour tenir compte de la vitesse de la paroi mobile qui génère la convection mixte et qui est déduite du nombre de Reynolds.

Une première validation consiste à comparer quantitativement les valeurs moyennes du nombre de Nusselt, de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan obtenues à partir des équations résolues avec les variables dimensionnelles (Symboles minuscules) et adimensionnelles (symboles majuscules). Cette comparaison est illustrée dans le tableau 4 et nous constatons une très légère différence entre les valeurs obtenues par les deux formes des systèmes d'équations. Comme pour le cas de la convection naturelle, nous pouvons conclure que les deux méthodes conduisent aux mêmes résultats.

Tableau 1.4. Valeurs moyennes du nombre de Nusselt, de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan obtenues à partir des équations résolues avec les variables dimensionnelles et adimensionnelles ($Gr=10^4$, $Pr=0.015$, $Re=1$.)

Variables Dimensionnelles		Variables Adimensionnelles	
\overline{nu}	6.26682	\overline{Nu}	6.26676
$\overline{s_{gen}}$	15138.20988	$\overline{S_{gen}}$	15138.30547
\overline{be}	0.9999999994555	\overline{Be}	0.99999999921053

Une seconde validation consiste à comparer les champs thermiques (isothermes) et hydrodynamiques (lignes de courant) obtenues par notre méthode à celle obtenues par Roy et al. (2015). Ces champs sont présentés dans la figure 8 et nous constatons que leurs contours sont identiques.

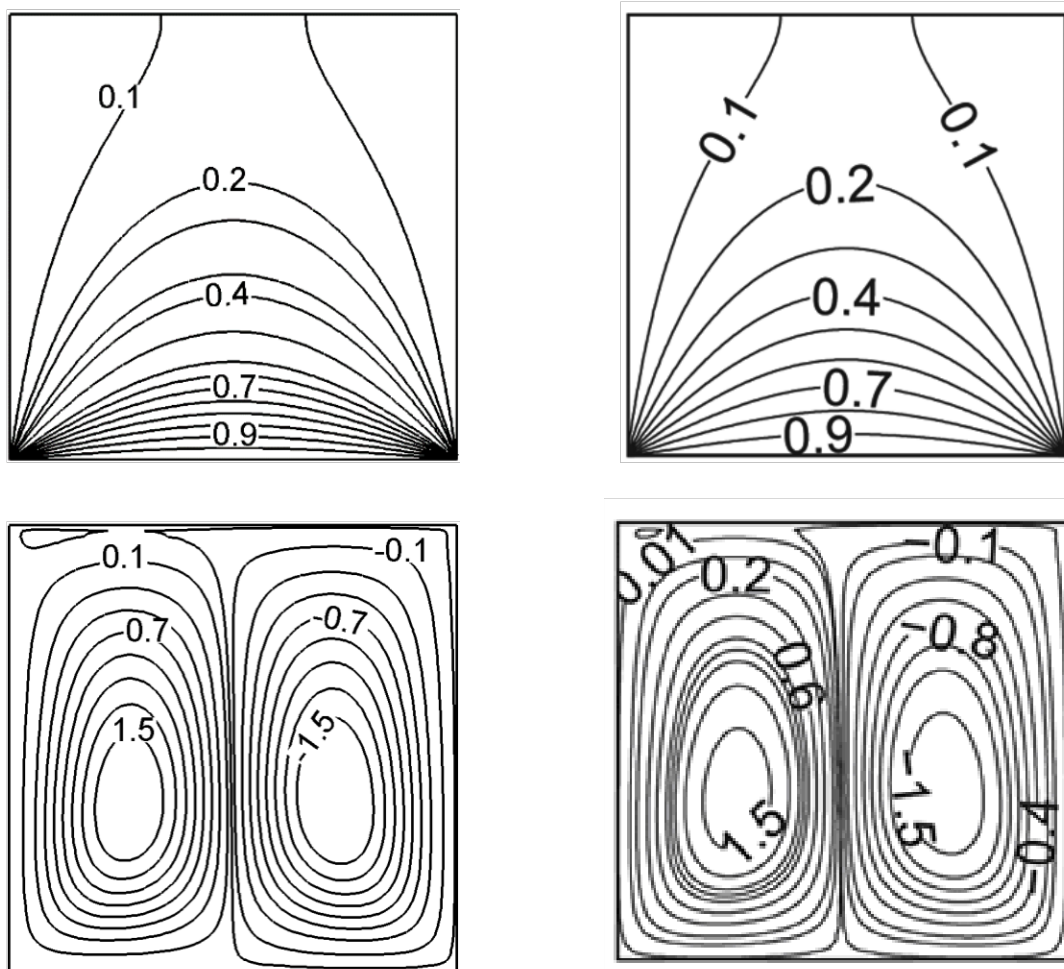
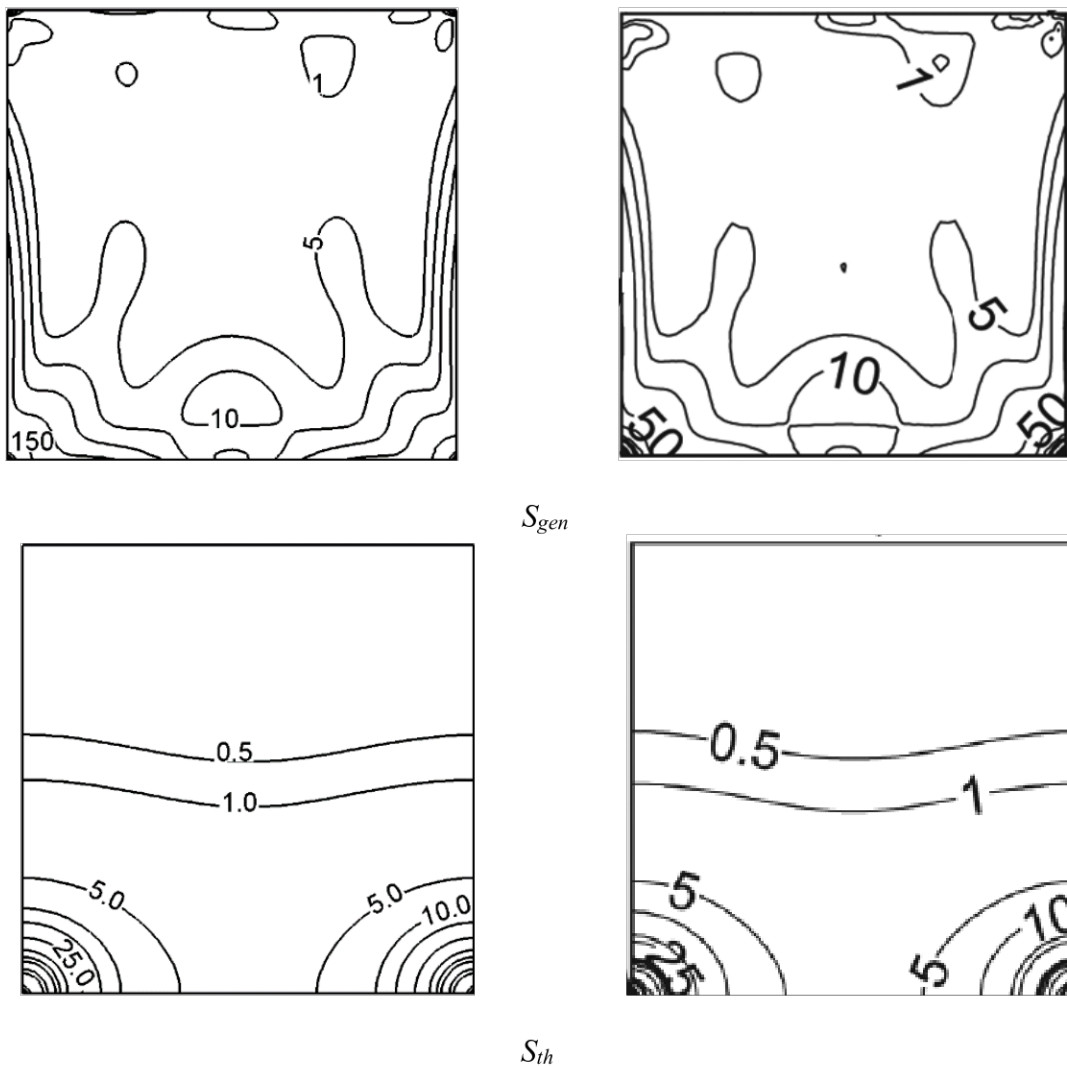


Figure 1.8 : Contours des isothermes (Θ) et des lignes de courants (Ψ), colonne de gauche pour le travail actuel et colonne de droite pour celui rapporté par Roy et al. (2015). ($Gr=10^4$, $Pr=0.015$, $Re=1$.)

Concernant les champs caractérisant la génération d'entropie, nous avons apporté une légère modification à notre programme pour incorporer la même valeur du rapport de

distribution de l'irréversibilité φ égale à 10^{-3} choisie arbitrairement par Roy et al. (2015). La figure 1.9 montre les résultats relatifs aux contours de la génération d'entropie S_{gen} , de la génération d'entropie due au transfert thermique S_{th} , de la génération d'entropie due à la friction du fluide S_{ff} et du nombre de Bejan Be . Pour un nombre de Grashof (Gr) égal à 10^4 , un nombre de Prandtl (Pr) égal à 0.015 et un nombre de Reynolds (Re) égal à 1. La colonne de gauche illustre les résultats obtenus par notre programme modifié et la colonne de droite expose ceux obtenus par Roy et al. (2015). Là aussi nous pouvons observer une similitude satisfaisante entre les deux résultats.



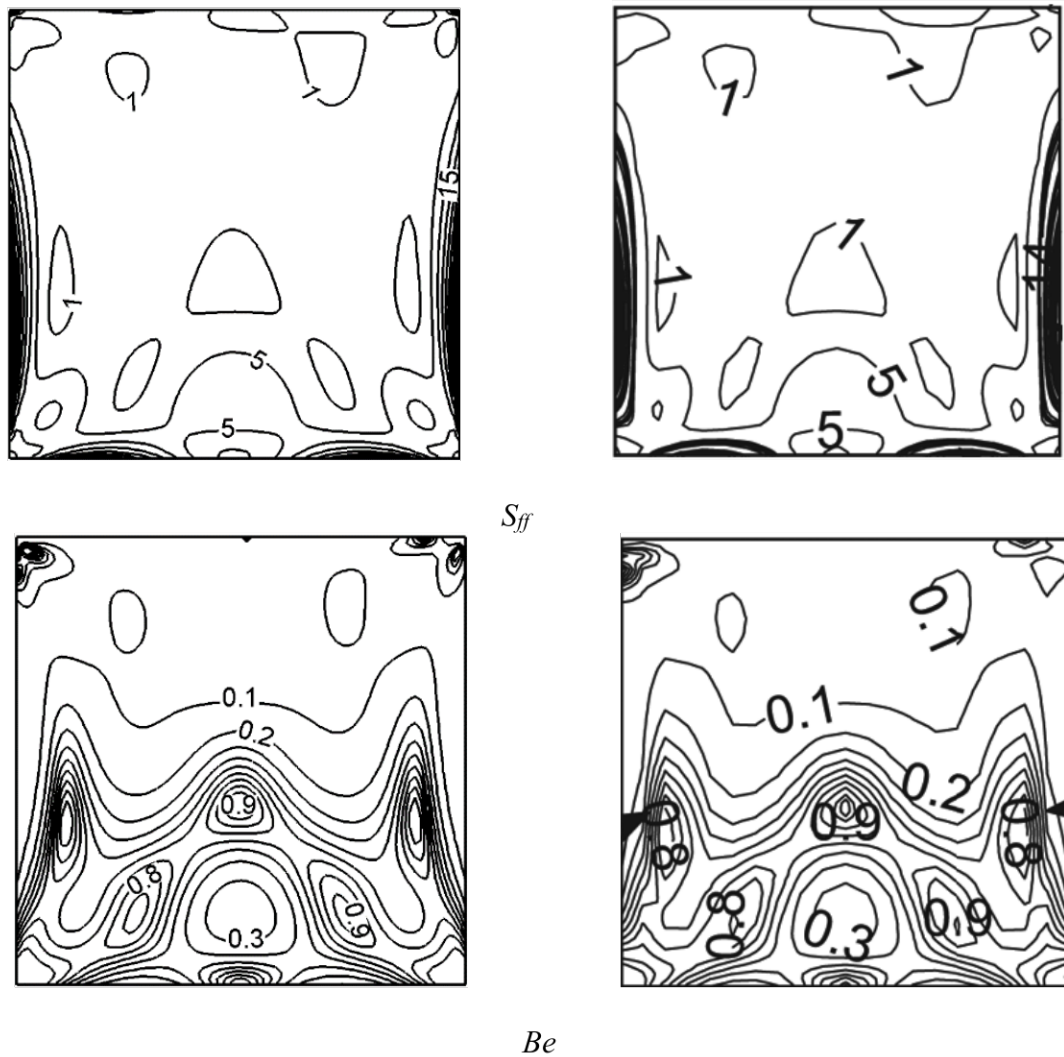


Figure 1.9 : Contours de la génération d'entropie S_{gen} (1^{re} rangée), de la génération d'entropie due au transfert thermique S_{th} (2^e rangée), de la génération d'entropie due à la friction du fluide S_{ff} (3^e rangée) et du nombre de Bejan Be (4^e rangée), colonne de gauche pour le travail actuel et colonne de droite pour celui rapporté par Roy et al. (2015). ($Gr=10^4$, $Pr=0.015$, $Re=1$)

7.2.2. Comparaison du nombre de génération d'entropie moyen \overline{Ns}

Pour avoir une comparaison adéquate entre les résultats obtenus par notre nouvelle méthode et ceux obtenus par l'approche ici décrite et Roy et al. (2015). Nous avons déterminé le nombre moyen de la génération d'entropie \overline{Ns} donné par l'équation 1.15 en considérant la valeur exacte du rapport de distribution de l'irréversibilité ϕ donnée par l'équation (1.8) égale à $1.34 \cdot 10^{-12}$ alors que Roy et al. (2015) ont choisi une valeur du même rapport égale à 10^{-3} . La figure 1.10 montre l'évolution de la valeur moyenne \overline{Ns} de ce nombre (voir équation 1.15) obtenue avec les deux valeurs du rapport de distribution de l'irréversibilité ϕ ci-dessus

mentionnées. Nous constatons clairement que la valeur de ce nombre moyen est largement surestimée par rapport à la valeur exacte. En effet, nous avons obtenu une valeur de ce nombre égale à 10.91 pour φ égale à 10^{-3} et une valeur égale à 6.87 quand φ est égale à $1.34 \cdot 10^{-12}$, soit presque 1.6 fois plus grande.

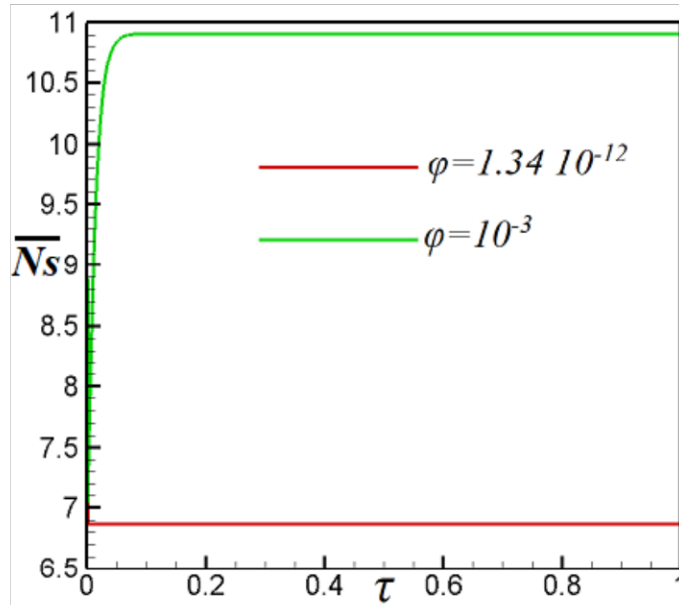


Figure 1.10 : Evolution du nombre de génération d'entropie moyen \overline{Ns} pour une valeur de φ arbitraire choisie égale à 10^{-3} et pour une valeur exacte égale à $1.34 \cdot 10^{-12}$

7.2.3. Caractéristiques de la génération d'entropie obtenues avec la nouvelle méthode

Les caractéristiques de la génération d'entropie dans le domaine physique considéré et avec les données choisies ont été déterminées en utilisant l'approche proposée et sont illustrées dans la figure 1.11. Les contours de la génération d'entropie globale sont représentés dans la colonne de gauche alors que ceux relatifs à la génération d'entropie due à la friction du fluide S_{ff} sont représentés dans la colonne droite. Nous pouvons observer que la génération d'entropie due à l'irréversibilité du transfert de chaleur (non donnée ici) contribue de manière significative à la génération totale d'entropie à l'intérieur de l'enceinte puisque les valeurs de celle due à la friction du fluide sont négligeables (ordre de grandeur proche de 10^{-6}). Ce résultat était prévisible puisque la valeur du nombre de Bejan est égale à 1. (Voir tableau 1.4).



Figure 1.11 : Contours de la génération d'entropie S_{gen} (côté gauche) et la génération d'entropie due à la friction du fluide S_{ff} (côté droit) pour $Gr=10^4$, $Pr=0.015$ et $Re=1$.

Pour confirmer ce dernier résultat nous avons présenté sur la figure 1.12 l'évolution des valeurs moyennes de la génération d'entropie globale $\overline{S_{gen}}$, de la génération d'entropie due à l'irréversibilité du transfert de chaleur $\overline{S_{th}}$ (côté gauche) et celle due à la friction du fluide $\overline{S_{ff}}$ (côté droit). Il est important de noter que les courbes représentant $\overline{S_{gen}}$ et $\overline{S_{th}}$ sont confondues et par ailleurs la génération d'entropie due à la friction du fluide $\overline{S_{ff}}$ est inexistante, ce qui prouve que le nombre de Bejan moyen est égal à 1. Par ailleurs la valeur moyenne du nombre de Bejan obtenue avec un rapport de distribution de l'irréversibilité $\varphi = 10^{-3}$ (valeur choisie par Roy et al. (2015)) est égale à 0.63 alors qu'en réalité elle est égale à 1. En d'autres termes cela veut dire que la génération d'entropie due à la friction du fluide $\overline{S_{ff}}$ contribue d'une manière significative à la génération globale $\overline{S_{gen}}$ alors qu'en réalité elle est négligeable. En outre, pour le mercure, l'écoulement convectif est caractérisé par de petites vitesses, d'autant plus que le nombre de Reynolds est égale à 1, et par conséquent la génération d'entropie globale se produit en raison du transfert de chaleur seulement, ce qui implique une valeur du nombre de Bejan moyen $\overline{Be} \sim 1$.

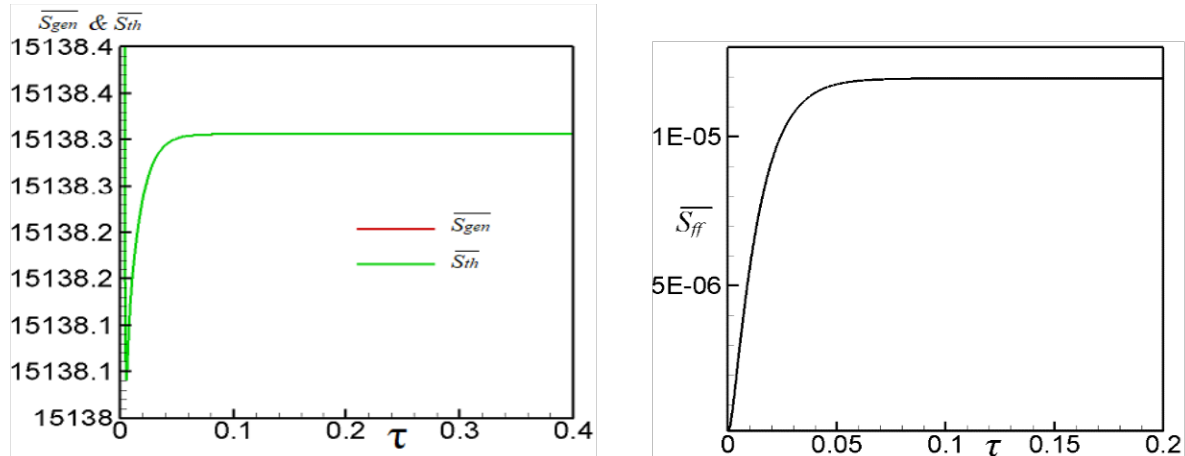


Figure 1.12 : Evolution des valeurs moyennes de la génération d'entropie globale $\overline{S_{gen}}$, de la génération d'entropie due à l'irréversibilité du transfert de chaleur $\overline{S_{th}}$ (côté gauche) et de la génération d'entropie due à la friction du fluide $\overline{S_{ff}}$ (côté droit) pour $Gr=10^4$, $Pr=0.015$ et $Re=1$.

8. CONCLUSION

Dans ce premier chapitre de la thèse nous avons montré que la détermination de la génération d'entropie (pertes d'énergie) dans les processus impliquant toute sorte de transfert reste un sujet d'actualité. Nous avons également pu voir en compulsant une quantité non négligeable des plus récents articles sur le sujet, que jusqu'à présent, cette entité physique est malheureusement toujours incorrectement calculée. Nous avons relevé, également de nombreuses anomalies et contradictions concernant le choix du rapport de distribution de l'irréversibilité, paramètre clé dans la détermination de la génération d'entropie. C'est pour remédier à cette situation que nous avons proposé, testé et validé une nouvelle approche pour le calcul du rapport de distribution de l'irréversibilité afin de déterminer avec précision la valeur de la génération d'entropie dans le but de dimensionner correctement tout équipement impliqué dans des processus réels impliquant des fluides en écoulement.

Bien que les présents résultats se limitent à la convection naturelle et la convection mixte dans des espaces confinés, la procédure est générale et peut être également appliquée à divers problèmes tels que, les écoulements en milieux poreux, les écoulements de nano fluides, les écoulements turbulents, etc.

CHAPITRE II

FORMULATION NUMÉRIQUE D'UN ÉCOULEMENT EN RÉGIME DE CONVECTION MIXTE

1. INTRODUCTION

Les écoulements d'un fluide et le transfert de chaleur en régime de convection mixte sont gouvernés par des systèmes d'équations différentielles à dérivées partielles (*E. D. P.*) non linéaires et couplées. Comme il est pratiquement impossible de parvenir à une solution analytique pour de tels systèmes, des solutions numériques s'avèrent indispensables pour résoudre de tels problèmes. Dans cette deuxième partie nous allons donc détaillée la solution numérique adoptée pour résoudre le problème considéré dans cette étude.

2. PROBLÈME CONSIDÉRÉ

La configuration géométrique étudiée est illustrée sur la figure (2.1). Il s'agit d'une cavité carrée de côté (L). Les parois latérales sont maintenues à une température froide fixée (T_C) et se déplacent vers le haut avec une vitesse constante (v_w). Une source de chaleur ayant une longueur l égale au quatre cinquième de celle de la cavité L ($l=4L/5$), soumise à une température chaude constante (T_H) est placée au centre de la paroi inférieure. Toutes les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques. Le schéma du mécanisme de mouvement des parois latérales est décrit dans la publication de Roy et al. (2015).

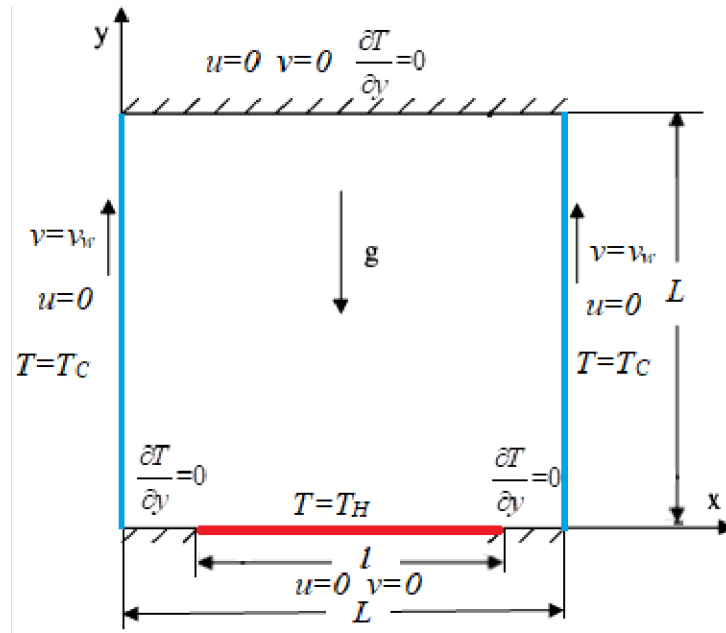


Figure 2.1 : Configuration géométrique et conditions aux limites

3. FORMULATION NUMÉRIQUE

Pour une question de commodité et afin que le lecteur puisse suivre les différentes étapes nécessaires à la résolution complète du problème considéré, nous rappelons brièvement les différentes équations régissant ce problème.

3.1. Rappel du modèle mathématique

Les équations régissant l'écoulement d'un fluide en régime de convection mixte sont déduites des lois fondamentales de la physique de la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. En outre, l'équation de la génération d'entropie d'un fluide en mouvement est basée sur le deuxième principe de la thermodynamique. L'expression de ces équations en variables primitives (sans dimensions) est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= -\omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + g \beta \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Si nous introduisons les variables sans dimension mentionnées ci-dessous (expressions (2.2) dans le système d'équations précédent, nous obtenons le système d'équations (2.3) exprimé sous sa forme sans dimension.

$$X, Y = \frac{1}{L}(x, y), \quad U, V = \frac{1}{v_w}(u, v), \quad \Theta = \frac{T - T_c}{\Delta T}, \quad \tau = \frac{v_w}{L}t, \quad \Omega = \frac{L}{v_w}\omega, \quad \Psi = \frac{\psi}{Lv_w} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} &= -\Omega \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + Ri \frac{\partial \Theta}{\partial X} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= \frac{1}{Pr Re} \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Les paramètres sans dimension figurant dans ces équations sont les nombres de Reynolds (Re), de Richardson (Ri) et de Prandtl (Pr), et sont définis par les relations suivantes :

$$Re = \frac{v_w L}{\nu}, \quad Ri = \frac{Gr}{Re^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{avec } Gr = \frac{g \beta \Delta T}{\nu^2} L^3 \quad (2.4)$$

Gr est le nombre de Grashof.

Précisons encore une fois que la résolution du système d'équations (2.1) ou (2.3) permet d'obtenir les gradients de températures et de vitesses qui seront utilisés pour obtenir sous forme dimensionnelle (2.5) et adimensionnelle (2.6) la génération d'entropie grâce aux équations suivantes :

$$S_{gen} = \underbrace{\frac{k}{T_0^2} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\}}_{s_{th}} + \underbrace{\frac{\mu}{T_0} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}}_{s_{ff}} \quad (2.5)$$

$$S_{gen} = c_1 \underbrace{\left\{ \left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)^2 \right\}}_{s_{th}} + c_2 \underbrace{\left\{ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right\}}_{s_{ff}} \quad (2.6)$$

Les coefficients de distribution des irréversibilités sont définis par :

$$c_1 = k \left(\frac{\Delta T}{T_0 L} \right)^2 \quad \text{et} \quad c_2 = \frac{\mu}{T_0} \left(\frac{\nu Re}{L^2} \right)^2 \quad (2.7)$$

3.2. Nombre de Nusselt moyen

Le nombre de Nusselt moyen le long de la paroi inférieure en considérant la forme adimensionnelle est donné par l'expression suivante :

$$\overline{Nu} = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \frac{\partial \Theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} dX \quad (2.8)$$

3.3. Conditions initiales et aux limites

La résolution des systèmes d'équations obtenus précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable dépendante exprimées comme suit :

$$\text{À } \tau = 0$$

$$\text{Pour } 0 \leq X \leq 1, \quad 0 \leq Y \leq 1, \quad \Psi = \Omega = \Theta = 0$$

$$\text{Pour } \tau > 0$$

➤ **Paroi inférieure***Parties adiabatiques :*

$$Y = 0 \quad \& \quad 0 \leq X \leq (1 - \varepsilon)/2 \quad \& \quad (1 + \varepsilon)/2 \leq X \leq 1 \quad U = V = \Psi = \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0$$

Partie chaude :

$$Y = 0 \quad \& \quad (1 - \varepsilon)/2 \leq X \leq (1 + \varepsilon)/2 \quad U = V = \Psi = 0 \quad \& \quad \Theta = 1$$

➤ **Paroi supérieure**

$$Y = 1. \quad \& \quad 0 \leq X \leq 1 \quad U = V = \Psi = \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0$$

➤ **Parois gauche et droite**

$$\left. \begin{array}{l} X = 0 \\ X = 1 \end{array} \right\} \quad \& \quad 0 \leq Y \leq 1 \quad U = \Theta = \Psi = 0 \quad \& \quad V = 1$$

Ici $\varepsilon=L$ représente la partie adimensionnelle de la partie chauffée de la paroi inférieure.

3.4. Méthode de résolution

La majorité des problèmes traitant des écoulements avec ou sans transfert de chaleur, de masse sont résolus grâce à des méthodes numériques, telle par exemple la méthode des différences finies, des volumes finis ou des éléments finis etc. Dans ce travail nous avons choisi la méthode des différences finies.

3.4.1. Méthode numérique de résolution

La méthode des différences finies est basée sur le développement en séries de Taylor d'une fonction quelconque autour d'un point (nœud). Elle a pour but de remplacer les dérivées premières et secondes des équations différentielles partielles d'une entité physique quelconque en ce point par des valeurs de celle-ci dans des points adjacents, situés aussi proche

que possible de ce dernier, grâce au développement en séries de Taylor. En d'autres termes cette méthode consiste à remplacer le système d'équations différentielles à dérivées partielles par un système d'équations algébriques qui peut être résolu par n'importe quelle méthode numérique. Pour cela il est donc nécessaire de procéder à un maillage du domaine physique considéré.

3.4.2. Maillage

Pour mieux prendre en compte les forts gradients des différentes variables à proximité des parois, nous avons opté pour un maillage non uniforme dans les directions horizontale et verticale, comme le montre la figure 2.2.

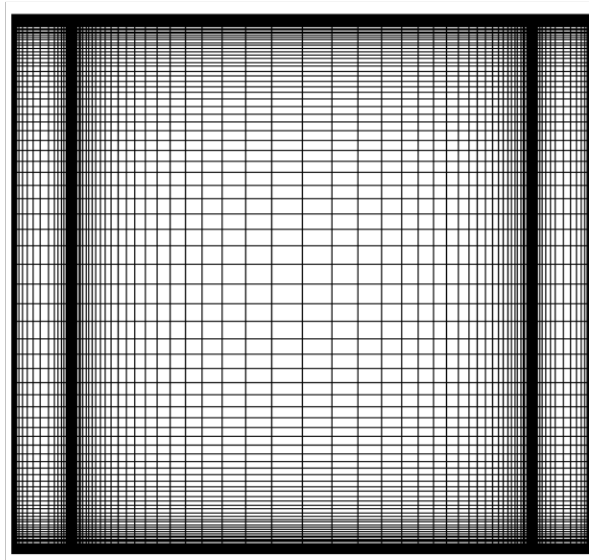


Figure 2.2 : Schéma du maillage non-uniforme de la cavité

4. DISCRÉTISATION DES DIFFÉRENTS TERMES DU MODÈLE MATHÉMATIQUE

Les équations décrivant les écoulements convectifs comportent plusieurs types de dérivées partielles. Nous allons dans ce qui suit donner les principes de la discrétisation de chacun d'eux en considérant une entité physique quelconque Φ . Par ailleurs et afin de ne pas trop alourdir le texte, les détails de cette discrétisation figurent annexe B, C et D.

4.1. Discrétisation du terme convectif $\left(U \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)$

Ces termes posent souvent des problèmes car ils présentent une non-linéarité qui rend la convergence de la solution des équations incertaine et dans majorités des cas impossible à atteindre. Nous avons alors opté pour le schéma «Upwind» du 3^e ordre de Kawamura et al. (1985). Le principe de ce schéma repose sur la discrétisation de la dérivée première en tenant compte du sens (signe) de la vitesse.

Dans le cas où la vitesse U est positive l'entité physique Φ est convectée à partir du côté gauche. Pour cela nous utilisons les nœuds $i-2, j, i-1, j$ du côté amont du nœud i, j et un seul nœud $i+1, j$ du côté aval comme le montre la figure 2.3.

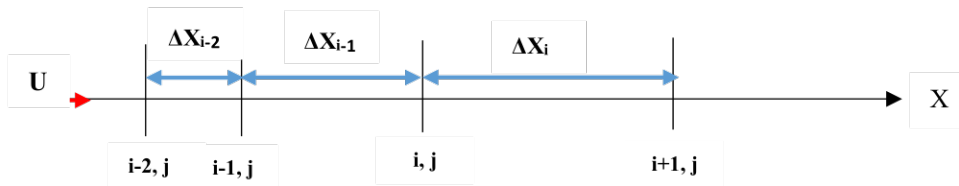


Figure 2.3 : Maillage décentré amont suivant l'axe des X

La dérivée première, selon ce schéma, est donnée par la relation suivante :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{Upwind}^{U > 0} = \frac{1}{3} \left[2 \cdot \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{centrale} + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{arrière} \right] \tag{2.9}$$

Dans le cas où la vitesse U est négative l'entité physique Φ est convectée à partir du côté droit. Pour cela nous utilisons les nœuds $i+1, j, i+2, j$ du côté aval du nœud i, j et un seul nœud $i-1, j$ du côté amont comme le montre la figure 2.4.

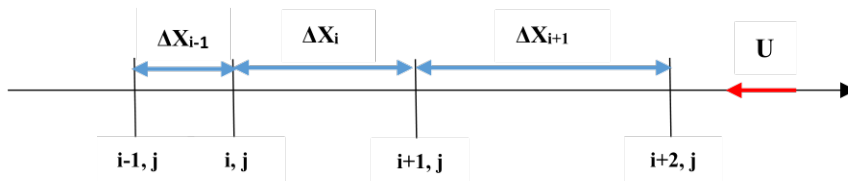


Figure 2.4 : Maillage décentré aval suivant l'axe des X

Dans ce cas-là, la dérivée première est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{U_{pwind}^{U < 0}} = \frac{1}{3} \left[2 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{centrale} + \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{avant} \right] \quad (2.10)$$

Le développement de Taylor autour du nœud i, j et en négligeant les termes d'ordre supérieur à deux, peut s'écrire :

$$\Phi_{i-2,j} = \Phi_{i,j} - smx_i \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{smx_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} \quad (2.11)$$

$$\Phi_{i-1,j} = \Phi_{i,j} - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} \quad (2.12)$$

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} - \Delta X_i \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} \quad (2.13)$$

$$\Phi_{i+2,j} = \Phi_{i,j} - spx_i \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{spx_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} \quad (2.14)$$

Avec : $smx_i = \Delta X_{i-2} + \Delta X_{i-1}$, $spx_i = \Delta X_i + \Delta X_{i+1}$

4.2. La différence centrale $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{centrale} \right)$

Cette dernière est obtenue en éliminant la dérivée seconde entre les équations (2.12) et (2.13). Pour cela nous multiplions l'équation (2.13) par (ΔX_{i-1}^2) pour obtenir :

$$\Delta X_{i-1}^2 \Phi_{i+1,j} = \Delta X_{i-1}^2 \Phi_{i,j} + \Delta X_{i-1}^2 \Delta X_i \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}^2 \Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} \quad (2.15)$$

Et l'équation (2.12) par $(-\Delta X_i^2)$ pour obtenir :

$$-\Delta X_i^2 \Phi_{i-1,j} = -\Delta X_i^2 \Phi_{i,j} + \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1} \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{i,j} - \frac{\Delta X_i^2 \Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \Big|_{i,j} \quad (2.16)$$

La sommation de l'équation (2.15) et (2.16) nous donne la différence centrale exprimée par :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{centrale} = -\frac{\Delta X_i}{sx_i \cdot \Delta X_{i-1}} \Phi_{i-1,j} + \frac{(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{sx_i \cdot \Delta X_{i-1}} \Phi_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}}{sx_i \cdot \Delta X_i} \Phi_{i+1,j} \quad (2.17)$$

4.3. La différence arrière $\left(\left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{arrière} \right)$

De la même façon que la différence centrale, on va calculer la différence arrière, on fait la multiplication de l'équation (2.12) par (smx_i^2) , on obtient :

$$smx_i^2 \Phi_{i-1,j} = smx_i^2 \Phi_{i,j} - smx_i^2 \times \Delta X_{i-1} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{smx_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (2.18)$$

Et l'équation (2.10) par $(-smx_{i-1}^2)$, on obtient :

$$-\Delta X_{i-1}^2 \Phi_{i-2,j} = -\Delta X_{i-1}^2 \Phi_{i,j} + smx_i \times \Delta X_{i-1}^2 \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} - \frac{\Delta X_{i-1}^2 \times smx_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (2.19)$$

La sommation de l'équation (2.18) et (2.19) nous donne la différence arrière qui est exprimée par :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{arrière} = \frac{\Delta X_{i-1}}{smx_i \times \Delta X_{i-2}} \Phi_{i-2,j} - \frac{smx_i}{\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} \Phi_{i-1,j} + \frac{(smx_i + \Delta X_{i-1})}{smx_i \times \Delta X_{i-1}} \Phi_{i,j} \quad (2.20)$$

4.4. La différence avant $\left(\left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{avant} \right)$

En multipliant l'équation (2.13) par (spx_i^2) , on obtient :

$$spx_i^2 \Phi_{i+1,j} = spx_i^2 \Phi_{i,j} + spx_i^2 \times \Delta X_i \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{spx_i^2 \times \Delta X_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (2.21)$$

Et l'équation (2.14) par $(-\Delta X_i^2)$, on obtient :

$$-\Delta X_i^2 \Phi_{i+2,j} = -\Delta X_i^2 \Phi_{i,j} - \Delta X_i^2 \times \Delta X_i \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} - \frac{\Delta X_i^2 \times s p x_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} \quad (2.22)$$

Finalement la sommation de l'équation (2.21) et (2.22) nous donne la différence avant, qui est exprimée par :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{avant} = -\frac{(s p x_i + \Delta X_i)}{s p x_i \times \Delta X_i} \Phi_{i,j} + \frac{s p x_i}{\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} \Phi_{i+1,j} - \frac{\Delta X_i}{s p x_i \times \Delta X_{i+1}} \Phi_{i+2,j} \quad (2.23)$$

En substituant les équations (2.17) et (2.18) dans l'équation (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{Upwind}^{U>0} &= \frac{\Delta X_{i-1}}{3 s m x_i \times \Delta X_{i-2}} \Phi_{i-2,j} - \left(\frac{2 \Delta X_i}{3 s m x_i \times \Delta X_{i-1}} + \frac{s m x_i}{3 \Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} \right) \Phi_{i-1,j} \\ &+ \left(\frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3 \Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} + \frac{(s m x_i + \Delta X_{i-1})}{3 s m x_i \times \Delta X_{i-1}} \right) \Phi_{i,j} + \frac{2 \Delta X_{i-1}}{3 s x_i \times \Delta X_i} \Phi_{i+1,j} \end{aligned} \quad (2.24)$$

En substituant les équations (2.17) et (2.23) dans l'équation (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{Upwind}^{U<0} &= \frac{2 \Delta X_i}{3 s p x_i \times \Delta X_{i-1}} \Phi_{i-1,j} + \left(\frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3 \Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} - \frac{(s p x_i + \Delta X_i)}{3 s p x_i \times \Delta X_i} \right) \Phi_{i,j} \\ &+ \left(\frac{2 \Delta X_{i-1}}{3 s p x_i \times \Delta X_i} + \frac{s p x_i}{3 \Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} \right) \Phi_{i+1,j} - \frac{\Delta X_i}{3 s p x_i \times \Delta X_{i+1}} \Phi_{i+2,j} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Dans le but d'obtenir une seule équation discrétisée du terme convectif suivant le schéma proposé par Kawamura et al. (1985) nous allons exprimer les vitesses positive U_p et négative U_n dans le nœud (i, j) par les relations suivantes :

$$U_p(i, j) = \frac{U_{i,j} + |U_{i,j}|}{2}$$

Et

$$U_n(i, j) = \frac{U_{i,j} - |U_{i,j}|}{2}$$

$$\text{Si } U > 0 : \begin{cases} U_p(i, j) = \frac{2U_{i,j}}{2} = U_{i,j} \\ U_n(i, j) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{Si } U < 0 : \begin{cases} U_n(i, j) = 0 \\ U_p(i, j) = \frac{2U_{i,j}}{2} = U_{i,j} \end{cases}$$

Donc le terme convectif $U \frac{\partial \phi}{\partial X} \Big|_{Upwind}$ peut alors s'écrire comme suit :

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{Upwind} = U_p(i, j) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U > 0} + U_n(i, j) \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U < 0} \quad (2.26)$$

Le développement du calcul des termes de l'équation (3.23) nous permet d'exprimer la discrétisation du terme convectif suivant la direction X comme suit :

$$U \frac{\partial \Phi}{\partial X} \Big|_{i,j}^{Upwind} = ai(i)U_p \Phi_{i-2,j} + (b_1i(i)U_p + b_2i(i)U_n)\Phi_{i-1,j} + (c_1i(i)U_p + c_2i(i)U_n)\Phi_{i,j} \\ + (d_1i(i)U_p + d_2i(i)U_n)\Phi_{i+1,j} + ei(i)U_n \Phi_{i+2,j} \quad (2.27)$$

La discrétisation du terme convectif suivant Y suit les mêmes étapes que celle de la discrétisation du terme convectif suivant X . Toutes les expressions des coefficients de la fonction sont détaillées en annexe A.

4.5. Discrétisation du terme diffusif $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right)$

Pour obtenir la discrétisation d'un terme diffusif, nous considérons le développement en séries de Taylor de la fonction Φ au nœud (i, j) en fonction des valeurs de Φ aux nœuds $i-2, j$; $i-1, j$; i, j ; $i+1, j$, et $i+2, j$. En négligeant les termes d'ordre supérieur à quatre nous pouvons écrire :

$$\Phi_{i-2,j} = \Phi_{i,j} - smx_i \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{smx_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} - \frac{smx_i^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{smx_i^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} \right|_{i,j}$$

$$\Phi_{i-1,j} = \Phi_{i,j} - \Delta X_{i-1} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} - \frac{\Delta X_{i-1}^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X_{i-1}^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} \right|_{i,j}$$

$$\Phi_{i+1,j} = \Phi_{i,j} + \Delta X_i \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X_i^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{\Delta X_i^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} \right|_{i,j}$$

$$\Phi_{i+2,j} = \Phi_{i,j} + spx_i \left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} + \frac{spx_i^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} + \frac{spx_i^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 \Phi}{\partial X^3} \right|_{i,j} + \frac{spx_i^4}{4!} \left. \frac{\partial^4 \Phi}{\partial X^4} \right|_{i,j}$$

Une élimination successive par étape de la dérivé quatrième puis de la dérivé troisième et enfin de la dérivé première entre ces différentes développements en séries de Taylor nous permet d'obtenir la discrétisation du terme diffusif exprimé par :

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} \right|_{i,j} = d_2 x m_2(i) \Phi_{i-2,j} + d_2 x m_1(i) \Phi_{i-1,j} + d_2 x_0(i) \Phi_{i,j} + d_2 x p_1(i) \Phi_{i+1,j} + d_2 x p_2(i) \Phi_{i+2,j} \quad (2.28)$$

4.6. Discrétisation du terme source $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)$

Nous appliquons la même démarche que précédemment sauf que dans ce cas. Mais cette fois-ci une élimination successive par étape de la dérivé quatrième puis de la dérivé troisième et enfin de la dérivé seconde entre ces différentes développements en séries de Taylor nous permet d'obtenir la discrétisation du terme source (dérivée première) exprimé par :

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial X} \right|_{i,j} = d_1 x m_2(i) \Phi_{i-2,j} + d_1 x m_1(i) \Phi_{i-1,j} + d_1 x_0(i) \Phi_{i,j} + d_1 x p_1(i) \Phi_{i+1,j} + d_1 x p_2(i) \Phi_{i+2,j} \quad (2.29)$$

5. DISCRÉTISATION DES DIFFÉRENTES CONDITIONS AUX LIMITES

Nous avons choisi un schéma décentré avant et arrière pour discrétiser les dérivées des conditions aux limites, en respectant la position de la paroi envisagée.

5.1. Températures

Les parois gauche et droite sont soumises à une température fixe. Alors que la paroi supérieure ainsi que les deux parties situées à droite et à gauche de la partie chauffée de la paroi inférieure sont adiabatiques, ce qui se traduit par :

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{j=1 \& j=nyt}^i = 0 \quad (2.30)$$

Il convient de préciser que nous avons désigné le nombre total des nœuds suivant les axes X et Y par nxt et nyt respectivement.

La discrétisation de cette condition s'exprime respectivement pour la paroi supérieure et inférieure par :

$$\Theta_{i,nyt} = -\frac{smy_{nyt}^2}{\Delta Y_{nyt-1}^2 - smy_{nyt}^2} \Theta_{i,nyt-1} + \frac{\Delta y_{nyt-1}^2}{\Delta Y_{nyt-1}^2 - smy_{nyt}^2} \Theta_{i,nyt-2} \quad (2.30)$$

$$\Theta_{i,1} = -\frac{sPY_1^2}{\Delta Y_1^2 - sPY_1^2} \Theta_{i,2} + \frac{\Delta y_1^2}{\Delta Y_1^2 - sPY_1^2} \Theta_{i,3} \quad (2.31)$$

$$\text{Avec : } sPY_1 = \Delta Y_1 + \Delta Y_2 \quad \text{Et} \quad smy_{nyt} = \Delta Y_{nyt-2} + \Delta Y_{nyt-1}$$

5.2. Vorticité

La formulation fonction de courant Ψ –vorticité Ω est très commode pour la résolution des écoulements considérés, malheureusement le traitement des conditions aux limites pour la vorticité rencontre certaines difficultés et il existe plusieurs discrétisations possibles. Dans notre cas nous avons utilisé la définition de la vorticité et l'expression des vitesses en fonction de la fonction de courant pour en déduire sa discrétisation aux niveaux des différentes parois de la cavité. Rappelons que la vorticité et les vitesses sont données par les expressions suivantes :

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \quad \text{Avec : } U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (2.32)$$

✓ **Paroi inférieure :**

La vorticité sur cette paroi est donnée par :

$$\Omega|_{j=1} = \frac{\partial V}{\partial X} \Big|_{j=1} - \frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{j=1} \quad (2.33)$$

La vitesse V sur cette paroi est nulle donc sa dérivée par rapport X est égale à 0. Par ailleurs la dérivée de la vitesse U par rapport à Y , qui n'est pas nulle, représente la dérivée seconde de la fonction de courant Ψ toujours par rapport à Y . Nous pouvons alors écrire :

$$\Omega|_{j=1} = -\frac{\partial U}{\partial Y} \Big|_{j=1} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \Big|_{j=1} \quad (2.34)$$

Le développement en série de Taylor pour (Ψ) aux nœuds $(i, j=1)$ donne :

$$\Psi_{i,2} = \underbrace{\Psi_{i,1}}_{U_{j=1}=0} + \Delta Y_1 \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \Big|_{j=1} + \frac{\Delta Y_1^2}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \Big|_{j=1}}_{-\Omega|_{j=1}}$$

Alors :

$$\Omega|_{i,1} = \frac{2}{\Delta Y_1^2} (\Psi_{i,1} - \Psi_{i,2}) \quad (2.35)$$

✓ **Paroi supérieure**

D'une manière analogue que pour la paroi supérieure, on obtient l'expression suivante :

$$\Omega|_{i,nyt} = \frac{2}{\Delta Y_{nyt-1}^2} (\Psi_{i,nyt} - \Psi_{i,nyt-1}) \quad (2.36)$$

✓ **Paroi mobile gauche**

Cette paroi est mobile, donc $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial X}\right)$ est égal à $(-V_0)$ au nœud $(i=1)$, donc le développement en série de Taylor pour Ψ est :

$$\Psi_{2,j} = \Psi_{1,j} + \Delta X_1 \underbrace{\frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{i=1}}_{=-\Delta X_1 V_0} + \frac{\Delta X_1^2}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \Big|_{i=1}}_{=-\Omega \Big|_{i=1}}$$

Nous obtenons donc :

$$\Omega \Big|_{1,j} = \frac{2}{\Delta X_1^2} (\Psi_{1,j} - \Psi_{2,j} - \Delta X_1 V_0) \quad (2.37)$$

✓ Paroi mobile droite

D'une manière similaire que pour la paroi gauche, on obtient pour la paroi droite mobile l'expression suivante :

$$\Omega \Big|_{nxt,j} = \frac{2}{\Delta X_{nxt-1}^2} (\Psi_{nxt,j} - \Psi_{nxt-1,j} - \Delta X_{nxt-1} V_0) \quad (2.38)$$

6. MÉTHODE DE RÉOLUTION DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DISCRÉTISÉES

Les systèmes d'équations discrétisées permettant d'obtenir la distribution des températures et de la vorticité sont résolus par la méthode Runge-Kutta d'ordre quatre (*R.K.4*). Ceux permettant d'obtenir la distribution de la fonction de courant sont résolus par la méthode itérative de sur-relaxations successives (*N. L. O. R : Non Linear Over Relaxation*).

6.1. Méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre (R.K.4)

Les équations du modèle mathématique étant instationnaires nous avons choisi la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre pour déterminer l'évolution des différents variables dans le temps. Les méthodes de type Runge-Kutta sont utilisées la plus part du temps pour résoudre des équations différentielles ordinaires (*E.D.O.*) à cause de leur précision et de leur facilité à programmer. La méthode de Runge-Kutta consiste à introduire des temps intermédiaires afin d'améliorer la précision de l'approximation (Anderson et al., 1984).

Malheureusement, ce gain de précision est contrebalancé par un temps de convergence de la solution plus long, ce qui nécessite un équipement informatique performant.

Pour expliquer brièvement cette méthode nous considérons une équation différentielle à dérivée partielle quelconque que l'on peut écrire sous la forme :

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}}_{1(\text{Terme Temporel})} = -U \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial X}}_{2(\text{Terme convectif})} - V \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial Y}}_{3(\text{Terme diffusif})} + \Gamma_{\Phi} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right] + \underbrace{S_{\Phi}}_{4(\text{Terme source})} \quad (2.39)$$

Ou encore :

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}}_1 = \underbrace{Rhs(\Phi)}_2 \quad \text{avec} \quad Rhs(\Phi) = -U \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial X}}_2 - V \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial Y}}_3 + \Gamma_{\Phi} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} \right] + \underbrace{S_{\Phi}}_4 \quad (2.40)$$

$Rhs(\Phi)$ Représente les équations du membre droit discrétisées. Le principe de cette méthode consiste en la détermination de $\Phi_{i,j}^{n+1}$ ($\Phi_{i,j}^{t+\Delta t}$) à partir de $\Phi_{i,j}^n$ ($\Phi_{i,j}^t$) en suivant les étapes suivantes (Oberbeck, 1979):

➤ **Première étape :**

$$\Phi_{i,j}^1 = \Phi_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{2} Rhs(\Phi_{i,j}^n) \quad (2.41)$$

$Rhs(\Phi_{i,j}^n)$ Est calculé avec les valeurs de Φ à l'instant initiale n .

➤ **Deuxième étape :**

$$\Phi_{i,j}^2 = \Phi_{i,j}^n + \frac{\Delta \tau}{2} Rhs(\Phi_{i,j}^1) \quad (2.42)$$

$Rhs(\Phi_{i,j}^1)$ Est calculé avec les valeurs de Φ obtenues à dans la première étape.

➤ **Troisième étape :**

$$\Phi_{i,j}^3 = \Phi_{i,j}^n + \Delta \tau Rhs(\Phi_{i,j}^2) \quad (2.43)$$

$Rhs(\Phi_{i,j}^2)$ Est calculé avec les valeurs de Φ obtenues à dans la deuxième étape.

➤ **Quatrième étape :**

Finalement nous obtenons les valeurs de la variable Φ au temps $n+1$ en partant du temps précédent n par la relation suivante :

$$\Phi_{i,j}^{n+1} = \Phi_{i,j}^n + \frac{\Delta\tau}{6} \left[Rhs(\Phi_{i,j}^n) + 2Rhs(\Phi_{i,j}^1) + 2Rhs(\Phi_{i,j}^2) + Rhs(\Phi_{i,j}^3) \right] \quad (2.44)$$

$Rhs(\Phi_{i,j}^3)$ Est calculé avec les valeurs de Φ obtenues à dans la troisième étape.

6.2. Méthode NLOR

La méthode itérative de sur-relaxations successives (*N. L. O. R : Non Linear Over Relaxation*) s'apparente à la méthode de Newton-Raphson qui est un algorithme efficace pour trouver numériquement les racines des équations non linéaires.

L'équation de la fonction de courant Ψ peut se mettre sous la forme suivante :

$$F(\Psi_{i,j}) = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \Omega_{i,j} = 0 \quad (2.45)$$

Suivant le principe de la méthode de Newton-Raphson l'approximation de la valeur de la fonction de courant dans le nœud (i, j) à l'itération $k+1$ est donnée par :

$$\Psi_{i,j}^{k+1} = \Psi_{i,j}^k - \bar{\omega} \frac{F(\Psi_{i,j})}{\frac{\partial F(\Psi_{i,j})}{\partial \Psi_{i,j}}} \quad (2.46)$$

Dans cette dernière expression $F(\Psi_{i,j})$ est discrétisée au nœud (i, j) et la dérivée de

$F(\Psi_{i,j})$ par rapport à Ψ ($\frac{\partial F(\Psi_{i,j})}{\partial \Psi_{i,j}}$) est le coefficient de Ψ dans le même nœud (i, j) . $\bar{\omega}$ est le

coefficient de sur relaxation et sa valeur est comprise entre 1 et 2.

Comme cette méthode est itérative nous avons utilisé un test de convergence pour optimiser le temps de calcul en fonction du matériel informatique disponible. Nous avons donc estimé que toute solution est satisfaisante lorsque : $Max \left[\left| \Psi_{i,j}^{k+1} - \Psi_{i,j}^k \right| \right] \leq 10^{-6}$

6.3. Algorithme de la méthode de résolution

La solution complète du problème étudié consiste en la résolution simultanée des équations discrétisées de la fonction de courant, de la vorticité et de l'énergie. A cet effet, nous avons développé un code de calcul basé sur le langage FORTRAN, dont les principales étapes sont résumées dans l'algorithme suivant :

- 1 Lecture des données.
- 2 Génération du maillage.
- 3 Introduction des conditions initiales et aux limites.
- 4 Résolution des équations discrétisées de l'énergie et de la vorticité par la méthode RK4.
- 5 Résolution itérative de l'équation de la fonction de courant par la méthode *NLOR* en respectant le test de convergence.
- 6 Détermination du champ de vitesse (U, V)
- 7 Détermination de la vorticité sur les parois.
- 8 Ecriture dans des fichiers particuliers et à des temps bien précis, des différentes variables (température, vorticité, vitesses, génération d'entropie, nombre de Nusselt et de Bejan...) pour pouvoir suivre leurs évolutions au cours du temps.
- 9 Vérifier si l'écoulement est bien établi (pas de changement significatif dans les valeurs des différentes variables entre deux temps successifs (τ et $\tau + \Delta\tau$)). Si l'écoulement n'est pas encore établi il faut réinitialiser les valeurs des températures, de la vorticité et de la fonction de courant et revenir à l'étape N°4. Si au contraire l'écoulement est bien établi le programme est arrêté.

7. CONCLUSION

Dans ce deuxième chapitre de la thèse, nous avons présenté le problème considéré. Les équations régissant le problème, les hypothèses appropriées et les conditions aux limites ont été présentées dans leur intégralité. La discrétisation des différents termes de ces systèmes

d'équations ainsi que les conditions initiales et aux limites ont été développées avec plus de détail. Enfin, un algorithme précis décomposant les différentes étapes de la programmation de la solution numérique, afin d'être facilement reproductible, a été explicité.

CHAPITRE III

EFFET DU NOMBRE DE PRANDTL SUR LA GÉNÉRATION D'ENTROPIE EN CONVECTION MIXTE

1. INTRODUCTION

Rappelons que dans la partie précédente nous avons défini le problème, objet de cette thèse, les différentes équations qui le régissent ainsi que la méthode numérique pour leurs résolutions. Cette troisième et dernière partie sera consacrée principalement à la présentation et à la discussion des résultats obtenus à partir de nombreuses simulations concernant deux cas différents pour analyser l'effet du nombre Prandtl sur les champs thermiques, hydrodynamiques et sur les caractéristiques de la génération d'entropie dans la configuration géométrique considérée.

Dans le premier cas nous avons considéré trois fluides différents, les plus communément utilisés dans la pratique, à savoir le mercure avec un nombre de Prandtl de 0.0251, l'air avec un nombre de Prandtl de 0.73 et l'eau avec un nombre de Prandtl de 6.263. Leurs propriétés thermo-physiques ont été évaluées à la même température de référence égale à 298 K (25°C).

Dans le second cas nous avons considéré un même fluide, Il s'agit de l'eau à différent nombre Prandtl dont les valeurs sont : 5.534, 3.045 et 2, correspondant respectivement aux températures de 303 K (30°C), 333 K (60°C), et 363 K (90°C).

2. VALIDATION DU PROGRAMME

À partir de l'algorithme précédemment détaillé à la fin de la deuxième partie, nous avons implémenté un programme en langage FORTRAN destiné à la résolution du présent problème. Dans un premier temps, nous avons procédé à la détermination du maillage adéquat et ensuite nous nous sommes attachés à la validation de ce code de calcul, pour que celui-ci puisse être utilisé pour obtenir les résultats attendus.

2.1.Choix du maillage

Des tests numériques ont été effectués pour s'assurer de l'exactitude des résultats du maillage utilisé dans le cadre de ce travail. Quatre maillages différents (41x41 ; 81x81 ; 101x101 et 161x161) ont été prises en compte pour s'assurer que la solution devient

indépendante de celui-ci. Ces tests numériques sont effectués pour le cas du nombre de Prandtl $Pr=0.7$ (Air à 453K) du nombre de Reynolds $Re=100$, et du nombre de Richardson $Ri=5$ et 30. Le tableau 3.1 montre la convergence du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} , tandis que le tableau 3.2 montre les valeurs de la génération d'entropie totale moyenne $\overline{S_{gen}}$ et du nombre de Bejan moyen \overline{Be} . Il est à noter que l'erreur relative maximale ne dépasse pas 2% entre les maillages de 81x81 et 101x101 par rapport au maillage de 161x161. Par conséquent, il a été décidé d'utiliser un maillage non uniforme avec 101×101 nœuds pour tous les calculs permettant un équilibre entre la précision et le temps de calcul.

Tableau 3.1 : Effet du maillage sur le nombre de Nusselt moyen pour $Re = 100$, $Pr = 0.7$ and $Ri=5$ and 30

Nombre de nœuds	41x41	81x81	101x101	161x161
$Ri=5$	6.409972	6.501360	6.519890	6.554256
$Ri=30$	7.760660	7.760660	8.235425	8.280651

Tableau 3.2 : Effet du maillage sur la génération d'entropie moyenne $\overline{S_{gen}}$ et le nombre de Bejan moyen \overline{Be} pour $Re = 100$, $Pr = 0,7$ et $Ri = 5$ et 30

Ri		41x41	81x81	101x101	161x161
5	$\overline{S_{gen}}$	0.1413722	0.14011485	0.1398440	0.139495
	\overline{Be}	0.99991734	0.999815	0.99976241	0.999604
30	$\overline{S_{gen}}$	5.5527665	5.45867439	5.4468174	5.432849
	\overline{Be}	0.99996553	0.999945	0.99993304	0.999896

2.2. Validation du code de calcul

Afin d'assurer l'efficacité du code développé, une première validation a été réalisée pour comparer les valeurs du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} obtenu dans le cas classique de la convection naturelle dans une cavité carrée remplie d'air dont les parois verticales sont différentiellement chauffées alors que les parois horizontales sont maintenues adiabatiques. Les résultats de nos simulations numériques, obtenus par notre code de calcul ont été comparés avec ceux de De Vahl Davis et Jones (1983), de De Vahl Davis (1983) et de Balam et Gupta (2019).

Le tableau 3.3 montre cette comparaison pour différents nombres de Rayleigh (Ra) lorsque le nombre de Prandtl (Pr) est fixé à 0,7. Nous pouvons constater que les résultats obtenus dans ce présent travail sont en excellent accord avec ceux des travaux cités précédemment.

Tableau 3.3 : Comparaison des nombres du Nusselt moyen \overline{Nu} entre ceux donnés dans la littérature et ceux obtenus dans le présent travail.

Ra	(De Vahl Davis & Jones, 1983)	(De Vahl Davis, 1983)	(Balam & Gupta, 2019)	Présent travail
10^3	1.116	1.117	1.119	1.119
10^4	2.242	2.238	2.260	2.250
10^5	4.564	4.509	4.645	4.592
10^6	9.035	8.817	9.184	9.001

Une validation complémentaire, qui considère le même problème dans la même configuration géométrique, mais cette fois la comparaison porte sur le nombre moyen de génération d'entropie \overline{N}_s ainsi que sur le nombre de Bejan moyen \overline{Be} . La correspondance des valeurs de ces derniers paramètres obtenues par notre code de calcul et celles obtenues par Ilis et al. (2008), Oliveski et al. (2009), Masvik et al. (2014) et Jassim et al. (2019) figure dans le tableau 3.4. Là encore une très bonne concordance est obtenue entre les résultats du présent travail et ceux des auteurs qui viennent d'être cités. Ces différentes comparaisons témoignent d'une excellente fiabilité du code de calcul actuel pour traiter le problème en question.

Tableau 3.4 : Comparaison entre les valeurs du nombre moyen de la génération d'entropie (\overline{N}_s) et du nombre moyen de Bejan (\overline{Be}) du présent travail avec ceux de différents auteurs ($Pr=0.7$, $\varphi=10^{-4}$)

Ri		Ilis et al. (2008)	Oliveski et al. (2009)	Masvik et al. (2014)	Jassim et al. (2019)	Présent travail
10^3	\overline{N}_s	1.20	1.16	1.15	1.152	1.153
	\overline{Be}	0.96	0.96	0.97	0.965	0.97
10^5	\overline{N}_s	23.50	23.87	23.27	23.27	23.94
	\overline{Be}	0.20	0.183	0.194	0.199	0.208

3. RÉSULTATS ET DISCUSSION

3.1. Cas de trois fluides différents

Dans ce cas nous considérons l'écoulement d'un fluide en régime de convection mixte dans la configuration géométrique considérée dans ce travail remplie successivement de mercure avec un nombre de Prandtl de 0.0251, d'air avec un nombre de Prandtl de 0.73 et d'eau avec un nombre de Prandtl de 6.263. Il faut cependant noter que ce cas a été traité en adoptant la forme adimensionnelle du système d'équations régissant l'écoulement du fluide.

Les valeurs de référence des propriétés thermo-physiques de ces différents fluides ont été tirées de l'ouvrage de Cengel et Ghajar (Çengel & Ghajar, 2015) à la même température de référence $T_0 = 298$ K et sont répertoriées dans le tableau 3.5. De plus, pour toutes les simulations numériques, le nombre de Reynolds (Re) et la différence de température ΔT sont fixés à des valeurs constantes égales à 10^2 et 10 K respectivement. Ces simulations numériques ont été réalisées pour différents nombres de Richardson (Ri) calculés sur la base de la longueur de la cavité (L). Un grand intérêt est porté sur l'effet du nombre de Prandtl (Pr) sur l'écoulement du fluide, le transfert de chaleur et la génération d'entropie à l'intérieur de la cavité.

Tableau 3.5 : Propriétés thermo-physiques des fluides de travail à 298 K à partir de la réf. (Çengel & Ghajar, 2015)

	Densité ρ (kgm ⁻³)	Conductivité thermique k (Wm ⁻¹ K ⁻¹)	Viscosité dynamique μ (kgm ⁻¹ s ⁻¹)	Coefficient d'expansion thermique β (K ⁻¹)	Numéro de Prandtl Pr
Mercure	13534	8.51533	$1.534 \cdot 10^{-3}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$	0.0251
Air	1.184	0.02551	$1.849 \cdot 10^{-5}$	$3.3557 \cdot 10^{-3}$	0.7296
Eau	997.1	0.5948	$8.905 \cdot 10^{-4}$	$2.594 \cdot 10^{-4}$	6.263

D'autre part, nous avons fait en sorte que toutes les configurations géométriques aient la même longueur de cavité L pour chaque nombre de Prandtl considéré dans cette étude, afin d'être sûr de comparer ce qui est comparable. La longueur L varie entre deux limites. La limite inférieure est fixée à $5 \cdot 10^{-3}$ m, comme suggéré par Moon et Chung (2019), tandis que la limite supérieure dépendra de l'obtention du régime d'écoulement stable et stationnaire approprié pour chaque nombre de Prandtl. Celui-ci est censé être atteint une fois que le nombre de Nusselt moyen devient constant et indépendant du temps. Ces limites ainsi que leurs nombres de

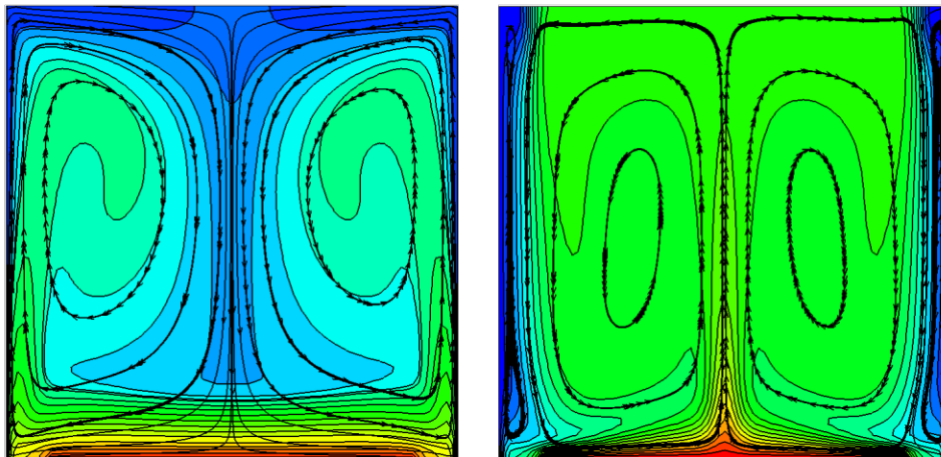
Richardson correspondants, pour les différents fluides considérés dans cette investigation sont montrés dans le tableau 3.6.

Tableau 3.6 : Valeurs limites de la longueur L de la cavité avec les nombres de Richardson (Ri) correspondants pour les fluides de travail.

	$L(\text{min})$	$L(\text{max})$	$Ri(\text{min})$	$Ri(\text{max})$
Eau ($Pr=6.263$)	0.005	0.019	0.4	21.9
Air ($Pr=0.7263$)	0.005	0.1	0.017	135
Mercure ($Pr=0.0251$)	0.005	0.0085	17.3	85

3.1.1. Effet des nombres de Richardson (Ri) et du Prandtl (Pr) sur les champs thermique et dynamique

Les caractéristiques de l'écoulement et du transfert de chaleur ont été présentées et analysées à l'aide des champs dynamique et thermique. La figure 3.1 représente, pour les trois fluides considérés, les champs des écoulements superposés aux isothermes, à gauche pour la limite inférieure ($L=0,005\text{m}$), et à droite pour la limite supérieure (L qui dépend du type de fluide).



$Ri = 0.4$ ($L=0.005\text{m}$)

$Ri = 21.9$ ($L=0.019\text{m}$)

a) Eau ($Pr = 6.263$)

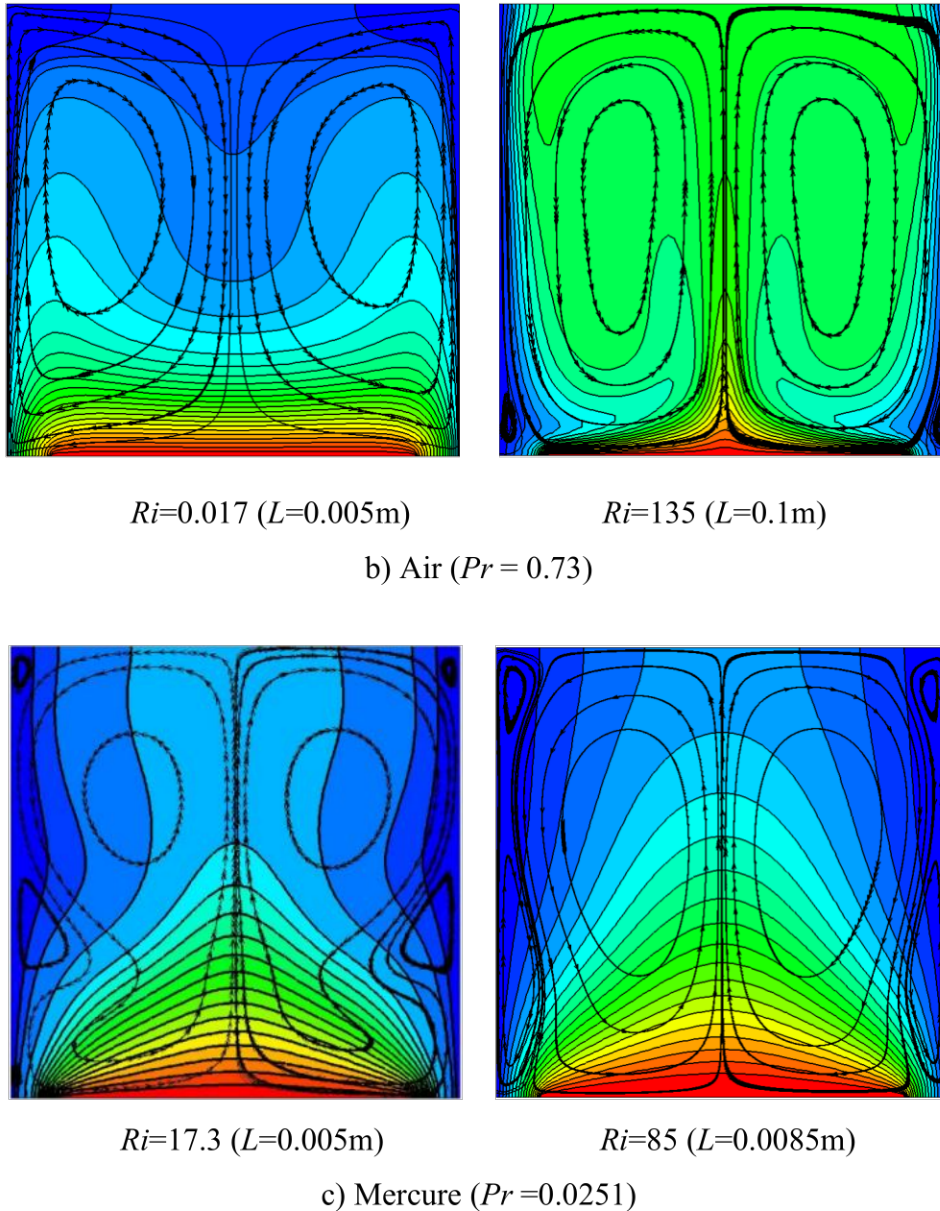


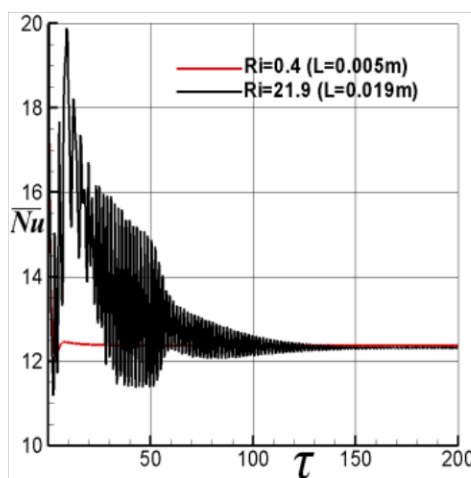
Figure 3.1 : Champs thermique et dynamique pour (a) l'eau, (b) l'air et (c) le mercure

On peut distinguer deux comportements différents de l'écoulement du fluide à travers la cavité en fonction de la valeur du nombre de Richardson. Pour des faibles valeurs de ce paramètre, le champ dynamique est constitué de deux cellules contrarotatives. Les forces visqueuses dues au mouvement ascendant des parois latérales font monter le fluide le long des parois latérales, contournent la paroi supérieure et redescendent le long du centre de la cavité. Dans ce cas, la chaleur récupérée par le fluide de la source de chaleur est directement évacuée par la partie inférieure des parois verticales. A noter que ce comportement n'a pas été observé dans le cas du mercure. Pour des valeurs élevées du nombre de Richardson, l'écoulement se compose de quatre cellules, deux cellules contrarotatives situées au centre de la cavité en raison

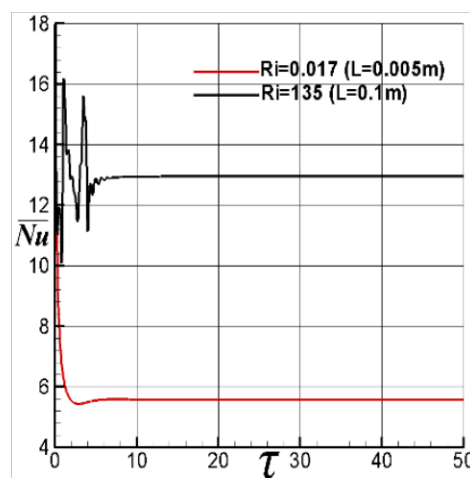
des forces de flottabilité, et les deux autres, également contrarotatives en raison des forces visqueuses, sont faibles et adjacentes aux parois latérales. À l'intérieur de ces dernières, deux tourbillons mineurs apparaissent dans les coins inférieur et supérieur. Dans ce cas, toute la chaleur de la source chaude se propage à travers le centre de la cavité. Ces observations sont similaires à celles faites par Biswas et Manna (Biswas, N., Manna, 2017) qui ont étudié le même phénomène dans la même configuration géométrique. Cependant, concernant l'effet du nombre de Prandtl, on observe, pour le régime dominé par la convection forcée, que la couche limite thermique près les parois latérales est plus mince dans le cas de l'eau que dans celui de l'air. En outre, et dans les mêmes circonstances, il est noté que la pénétration de fluide froid par le haut et qui s'écoule le long de la partie centrale de la cavité est relativement plus importante.

3.1.2. Effet des nombre de Prandtl (Pr) et de Richardson (Ri) sur le nombre de Nusselt moyen

La figure 3.2 présente l'effet des nombres du Prandtl (Pr) et Richardson (Ri) sur l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour les fluides considérés dans les conditions déjà mentionnées ci-dessus. On observe qu'après des fluctuations initiales, le nombre de Nusselt moyen devient stable. Leur durée et leur amplitude continuent d'augmenter de manière significative à fur et à mesure que le nombre de Richardson (Ri) augmente, en particulier pour l'eau et le mercure. D'autre part, on peut aussi voir que l'écart entre les valeurs du nombre de Nusselt moyen est significativement plus élevé dans le cas de l'air ($Pr \sim 1$), que dans le cas de l'eau ($Pr \gg 1$), ou dans le cas de mercure ($Pr \ll 1$).



a) Eau



b) Air

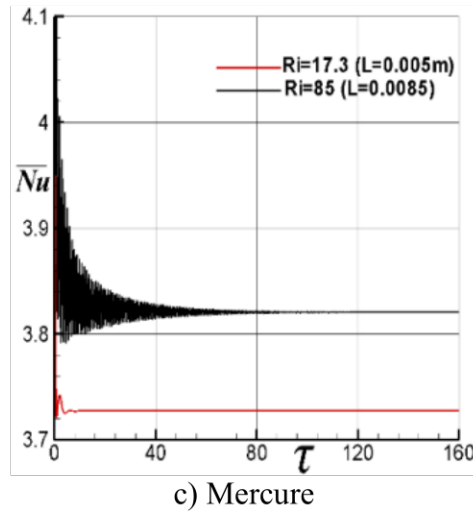
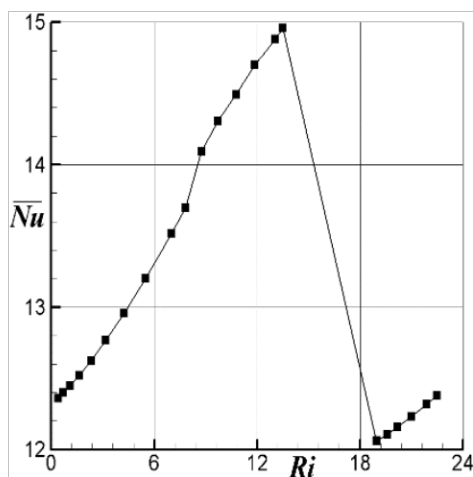
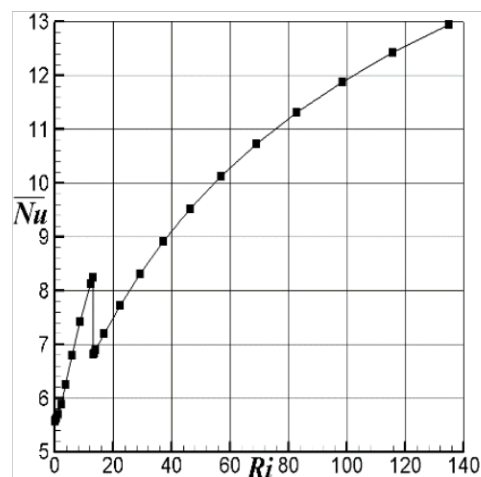


Figure 3.2 : Évolution du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour a) l'eau, b) air et c) mercure

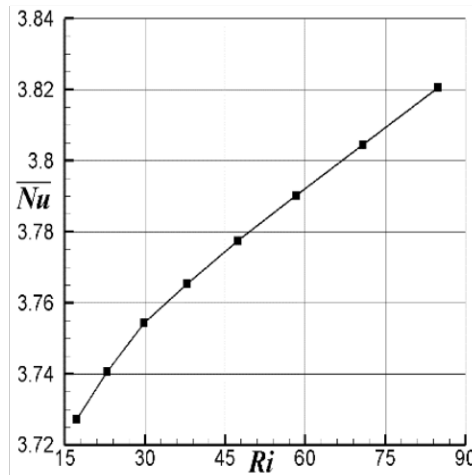
L'effet des nombres de Prandtl et de Richardson sur le nombre de Nusselt moyen est montré dans les figures 3.3. Cette figure fournit une variation typique du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre Richardson (Ri) pour l'eau, l'air et le mercure. Pour le mercure (Figure 3.3 c), le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Richardson (Ri), tandis que pour l'eau et l'air, ce nombre augmente, puis subit une diminution significative lors du passage de l'écoulement caractérisé par deux cellules à celui caractérisé par quatre cellules (bifurcation), puis recommence à augmenter avec l'augmentation du nombre de Richardson.



a) Eau



b) Air



c) Mercure

Figure 3.3 : Nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} en fonction du nombre de Richardson, pour a) l'eau, b) air et c) mercure.

Pour illustrer plus clairement l'effet du nombre de Prandtl sur l'échange thermique au niveau de la paroi chauffée, les figures 3.3 (a), (b) et (c) sont regroupées dans une même figure (Figure 3.4). Nous constatons que le nombre de Nusselt moyen augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl (Pr), quelle que soit la valeur du nombre de Richardson (Ri). Ceci pourrait s'expliquer par le fait qu'au fur et à mesure que le nombre de Prandtl augmente, la diffusion thermique devient de plus en plus réduite, les gradients de température à proximité de la paroi chauffée deviennent beaucoup plus importants, ce qui implique une augmentation du nombre de Nusselt moyen. Des résultats similaires ont été obtenus par Cheng (Cheng, 2011a) et Moallemi et Jang (Moallemi, MK., Jang, 1992).

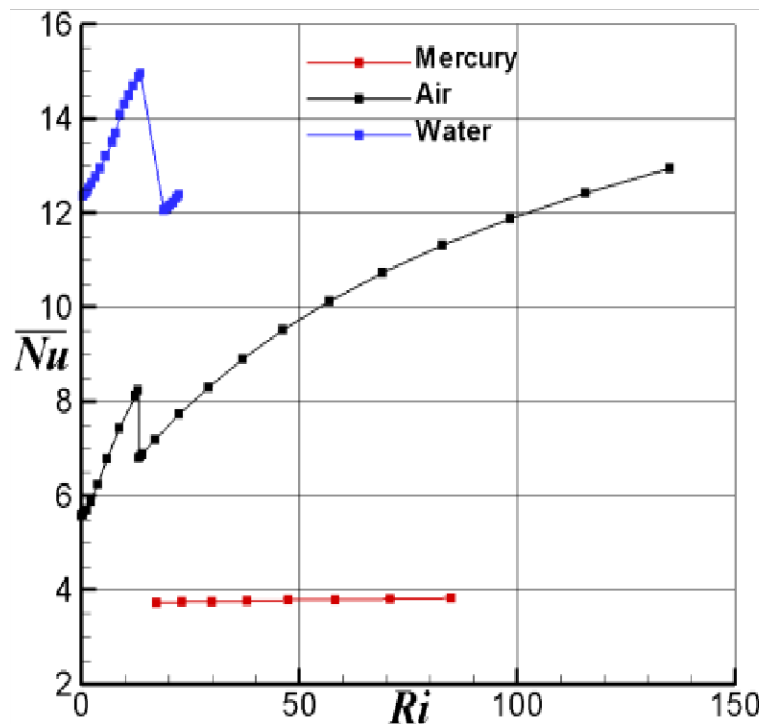


Figure 3.4 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour les différents fluides en fonction du nombre de Richardson.

3.1.3. Effet des nombres de Prandtl (Pr) et de Richardson (Ri) sur la génération d'entropie

La génération d'entropie totale (S_{gen}), la génération d'entropie due au transfert de chaleur (S_{th}) et la génération d'entropie due au frottement visqueux (S_{ff}) pour l'eau ($0,4 \leq Ri \leq 21,9$), l'air ($0,017 \leq Ri \leq 135$) et le mercure ($17,3 \leq Ri \leq 85$) sont présentées dans les figures 3.5 (a-b), 3.6 (a-b) et 3.7 (a-b) respectivement.

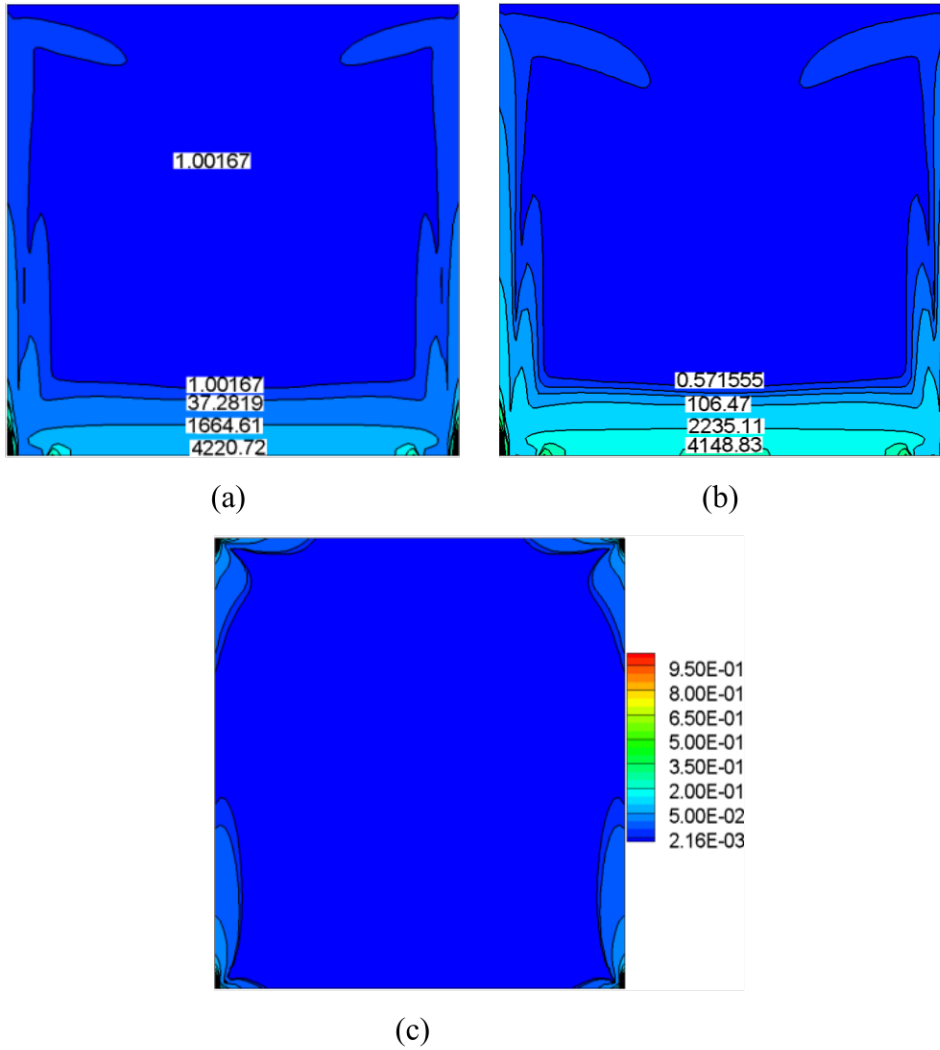
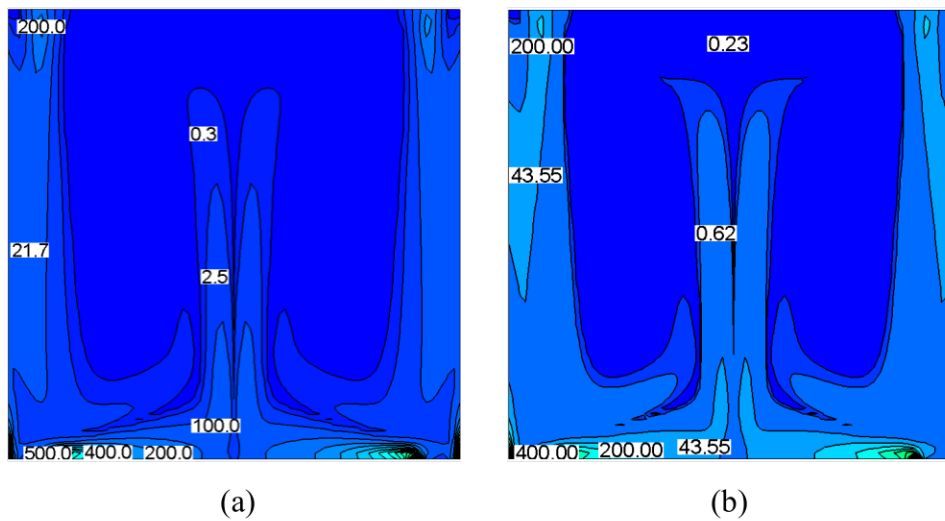
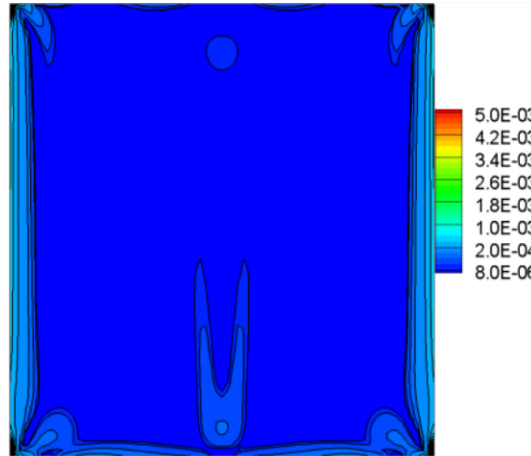


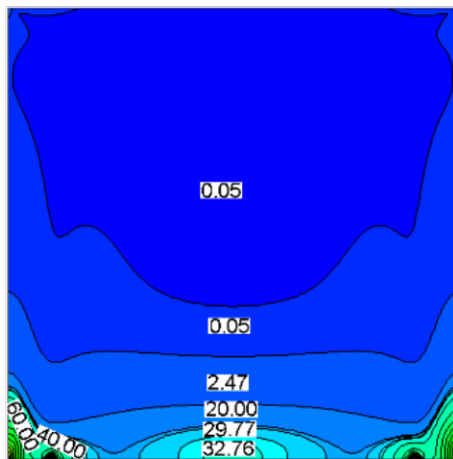
Figure 3.5 (a) : Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour l'eau à $Ri=0,4$



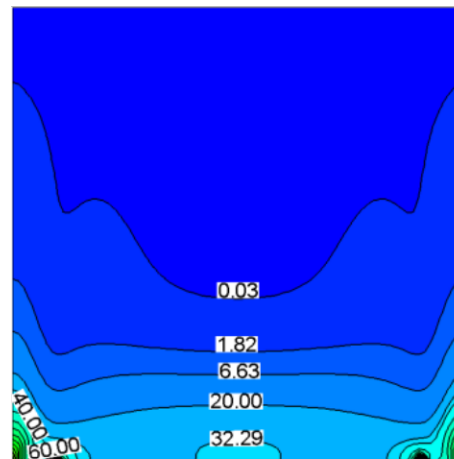


(c)

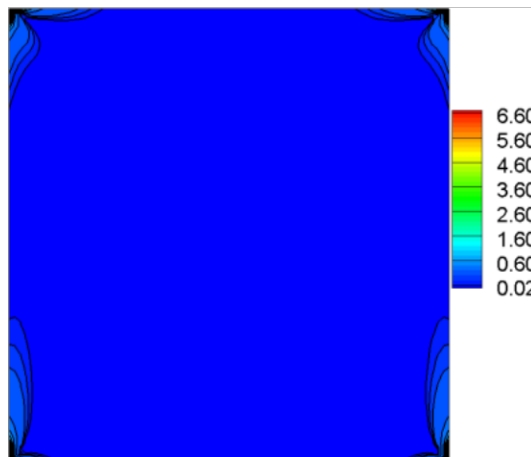
Figure 3.5 (b) : Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour l'eau à $Ri=21,9$



(a)



(b)



(c)

Figure 3.6 (a) : Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour l'air à $Ri=135$

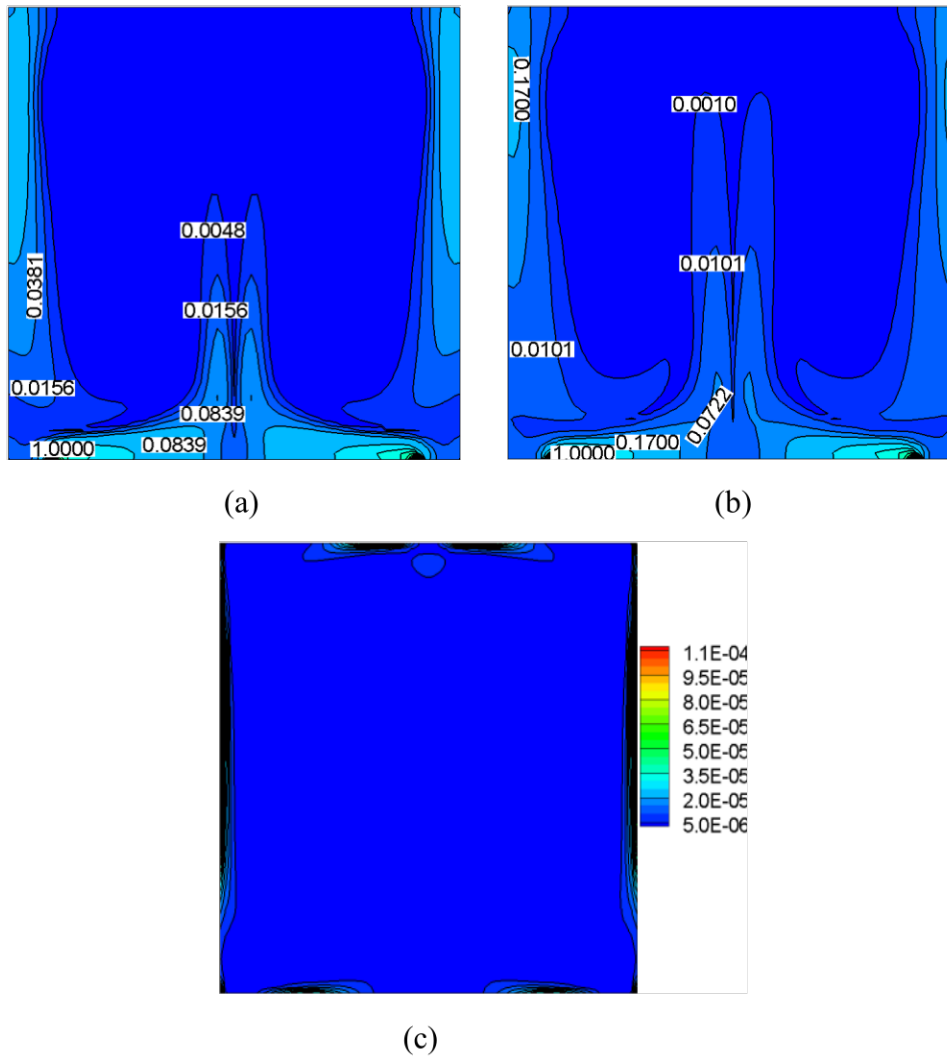


Figure 3.6 (b) : Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour l'air à $Ri=0,017$

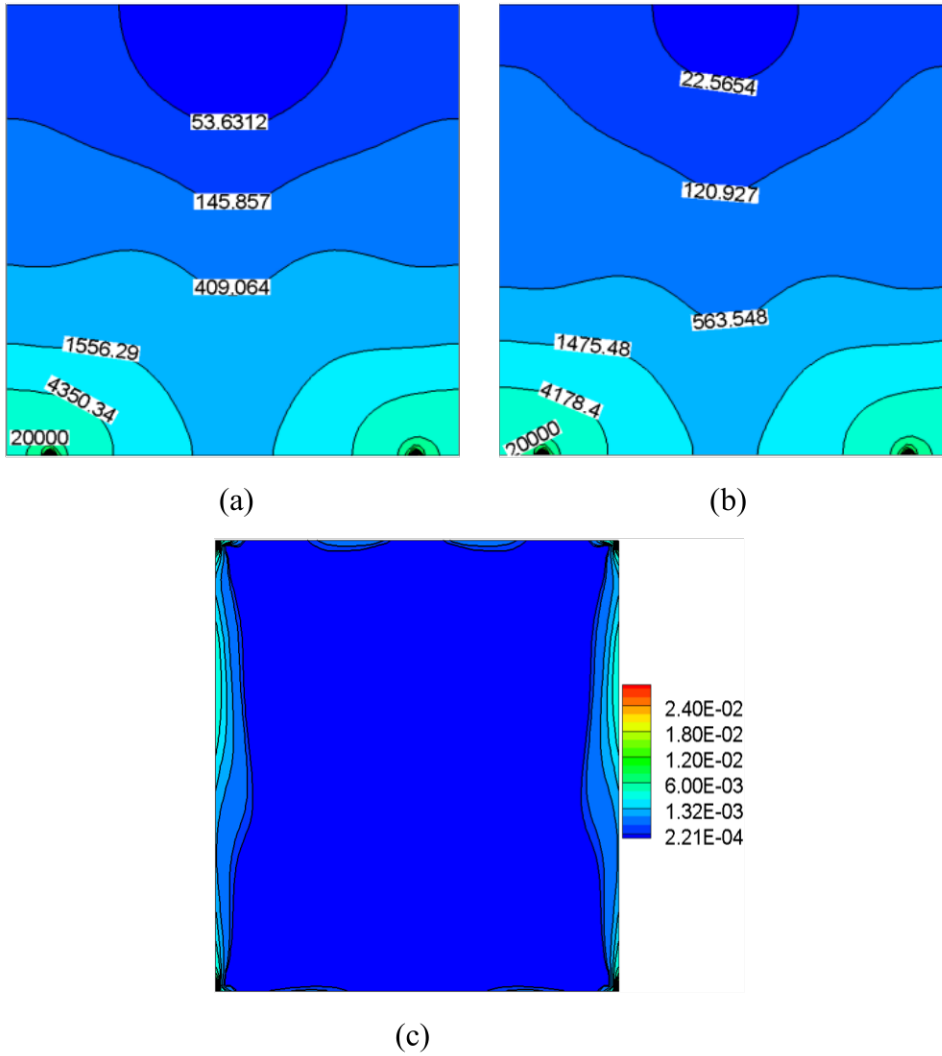
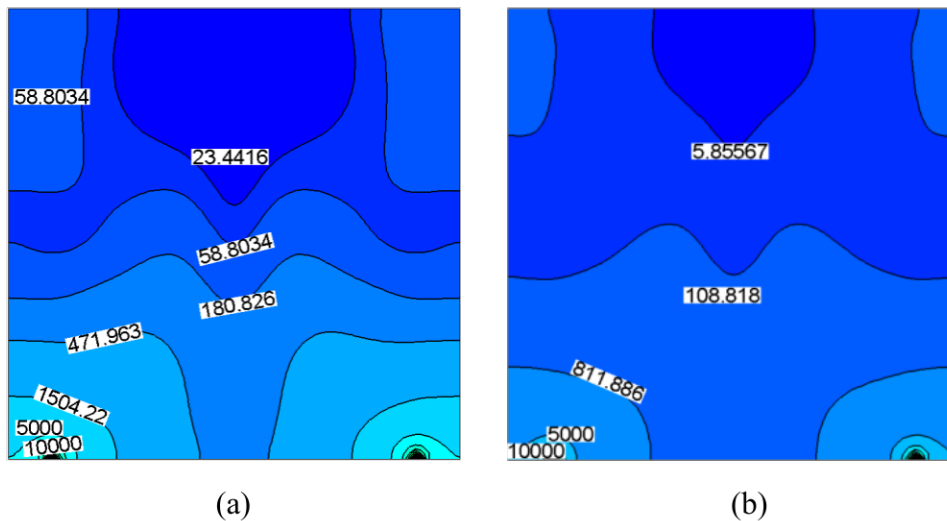
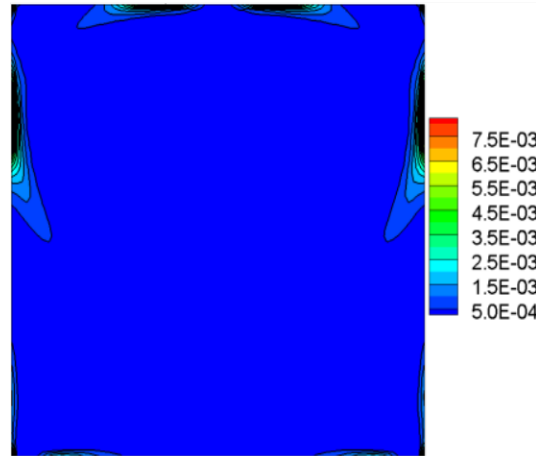


Figure 3.7 (a) : Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour le mercure à $Ri = 17,3$





(c)

Figure 3.7 (b) : Contour de la génération d'entropie totale S_{gen} (a), la génération d'entropie due au transfert de chaleur S_{th} (b) et la génération d'entropie due au frottement des fluides S_{ff} (c) pour le mercure à $Ri=85$

Comme on le voit à partir de ces figures, il est possible de faire, qualitativement, quelques observations. La première est que les contours de la génération d'entropie suivent la tendance des isothermes. La seconde est que la génération d'entropie totale est proche de celle de la génération d'entropie due au transfert de chaleur. Par conséquent, la génération d'entropie due au frottement visqueux du fluide est assez insignifiante par rapport à la génération d'entropie due au transfert de chaleur. En conséquence, le nombre de Bejan moyen est proche de un, et nous avons donc décidé qu'il était plus pertinent de ne pas inclure ses contours dans ce travail. Une autre raison est que la majeure partie de la génération d'entropie provient de chaque extrémité de la source chauffée, tandis que la génération d'entropie due à la friction des fluides se développe le long des parois mobiles latérales. Très récemment, une remarque similaire a été rapportée par Monaledi et Makinde (Lucky Monaledi, R., Makinde, 2020). Tous ces commentaires sont également valides pour toutes les autres valeurs des nombres de Prandtl et de Richardson.

Afin d'évaluer objectivement et quantitativement l'impact des nombres de Prandtl et de Richardson, le logarithme de la génération d'entropie moyenne en fonction du nombre de Richardson (Ri), pour les trois fluides considérés, est présenté sur la figure 3.8.

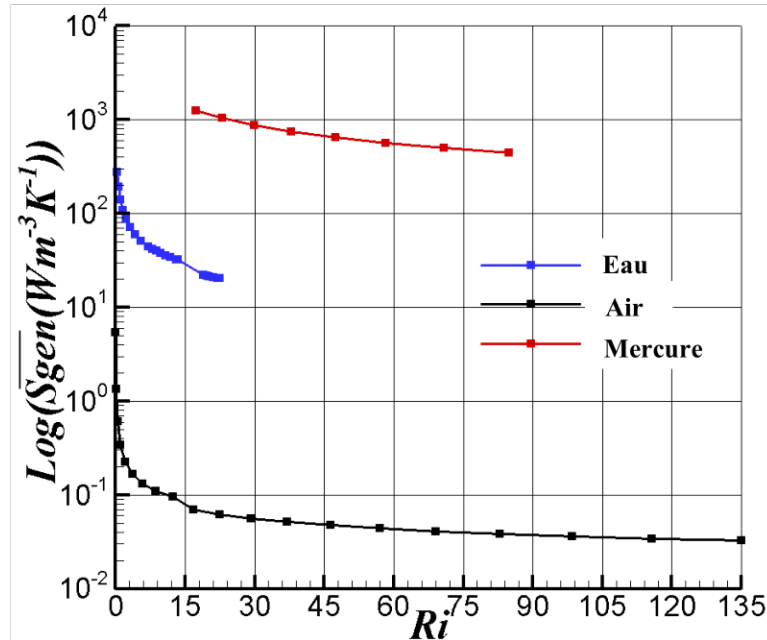


Figure 3.8 : Comparaison de la génération d'entropie totale moyenne pour les fluides considérés en fonction du au nombre de Richardson.

Nous pouvons ainsi remarquer que la génération d'entropie totale moyenne diminue lorsque le nombre de Richardson (Ri) augmente. Ebrahimi et al. (Ebrahimi et al., 2021) rapportent également ce même résultat significatif. Nous observons également que la valeur de la génération d'entropie totale moyenne s'avère plus élevée pour le mercure ($Pr=0,0251$) et l'eau ($Pr=6,263$) que pour celle de l'air ($Pr=0,73$).

Afin de mettre en évidence les valeurs très faibles de la génération d'entropie moyenne due au frottement des fluides pour les différents nombres de Prandtl, nous avons représenté sur la figure 3.9 la variation du logarithme de celui-ci en fonction de Ri . Il est intéressant d'observer que la génération moyenne d'entropie due au frottement des fluides suit une tendance similaire à la génération d'entropie totale moyenne. L'échelle moyenne de la génération d'entropie totale est comprise entre 10^{-2} et 10^4 tandis que la génération d'entropie moyenne due au frottement des fluides est comprise entre 10^{-6} et 10^1 . En d'autres termes cela signifie que la génération d'origine visqueuse est insignifiante devant celle qui est due au transfert de chaleur. Ce résultat confirme l'hypothèse communément adoptée, qui stipule que la fonction de dissipation

visqueuse, qui est aussi proportionnelle aux carrés des gradients de vitesses, est négligée dans l'équation d'énergie.

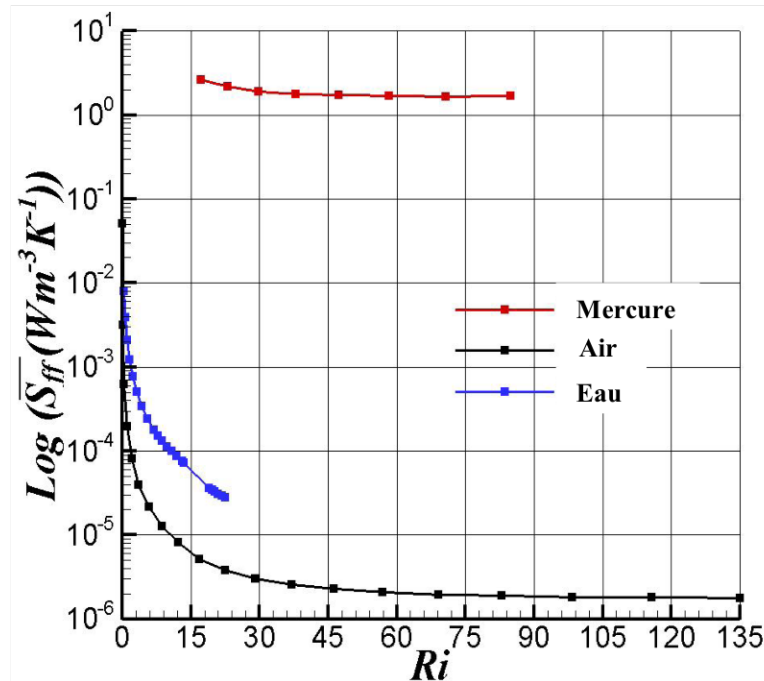


Figure 3.9 : Comparaison de la génération moyenne d'entropie due au frottement des fluides en fonction du nombre de Richardson

Pour faire apparaître plus précisément les principaux foyers des pertes d'énergie, les profils de la génération d'entropie sur la paroi inférieure sont tracés sur la figure 3.10 pour (a) l'eau ($Pr=6,263$), (b) l'air ($Pr= 0,73$) et (c) mercure ($Pr=0,0251$). Comme on peut le constater, la génération d'entropie totale est générée principalement dans les coins inférieurs des parois latérales de la cavité ainsi qu'aux deux extrémités de la source de chaleur située dans la section médiane de la paroi inférieure de la cavité. Il semblerait, de manière générale, que les contours de la génération d'entropie aient presque la même forme. Cependant, il existe de légères différences selon le type de fluide et selon que la structure d'écoulement est à deux ou quatre cellules (avant ou après la bifurcation). Dans le cas où l'écoulement est caractérisé par deux cellules, la génération d'entropie est maximale et plus importante au niveau de la paroi inférieure gauche (ou droite) ainsi qu'aux deux extrémités de la source de chaleur dans le cas de l'eau par rapport au cas de l'air. Cela peut s'expliquer par le fait que plus de chaleur est retirée de la source de chaleur dans le cas de l'eau que dans le cas de l'air, comme le montre la colonne de gauche des figures 3.1 (a) et 3.1 (b). En partant de l'extrémité gauche (ou droite) de la source

de chaleur, une chute soudaine de la génération d'entropie est observée et reste à une valeur presque constante tout au long de la section chauffée. Dans la situation où l'écoulement est caractérisé par quatre cellules, la génération d'entropie est maximale et plus importante aux deux extrémités de la source de chaleur sur la paroi gauche (ou droite) ainsi qu'au niveau de la paroi inférieure gauche (ou droite). En effet, dans ce cas, toute la chaleur est évacuée de la source de chaleur par le centre de la cavité, comme illustré dans la colonne de droite des figures 3.1 (a) et 3.1 (c).

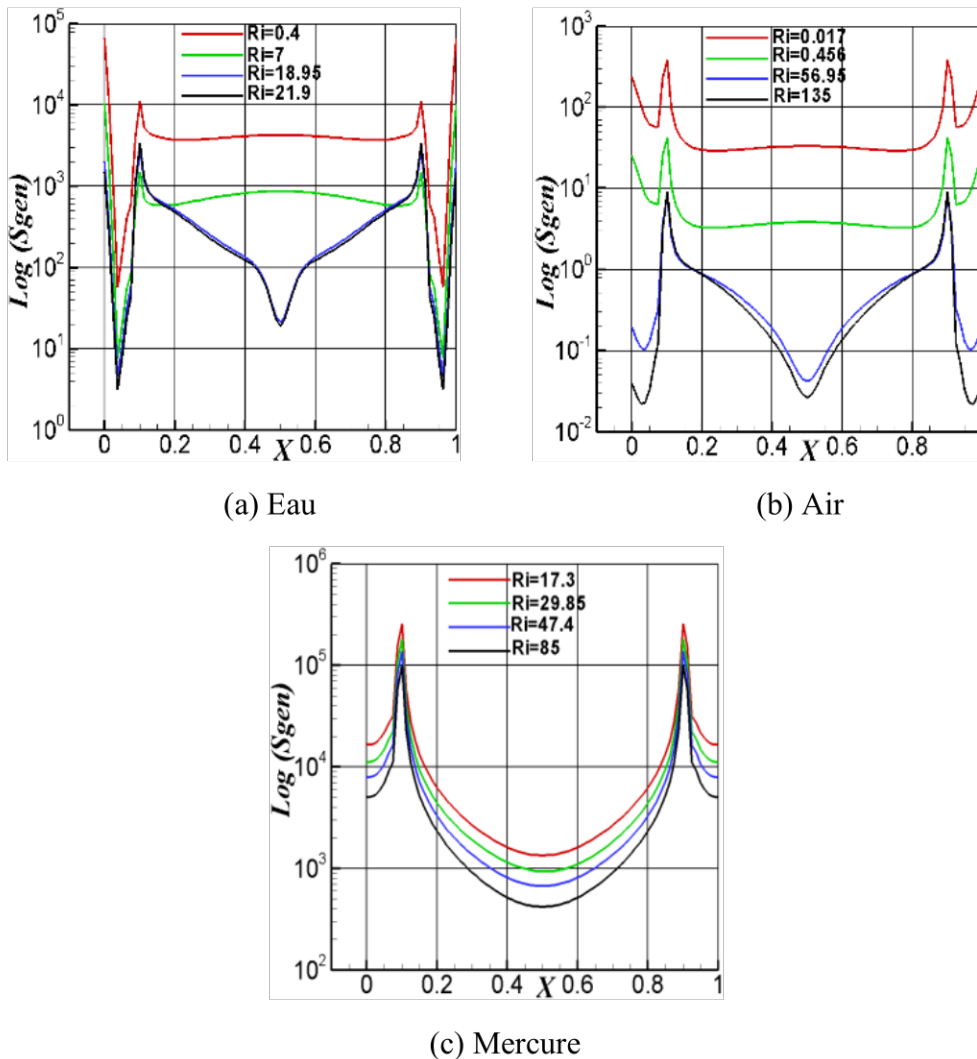


Figure 3.10 : Profils de la génération d'entropie sur la paroi inférieure à différentes valeurs du nombre de Richardson pour (a) l'eau, (b) l'air et (c) le mercure.

La génération d'entropie décroît fortement à partir des deux extrémités de la source de chaleur sur la paroi gauche (ou droite) puis continue à décroître progressivement pour atteindre sa valeur minimale au centre de la cavité. Cela est principalement dû au fait que, sur la base des

conditions aux limites de la paroi inférieure, et puisque la génération d'entropie due aux effets de viscosité est négligeable, l'équation de génération d'entropie totale est réduite à :

$$\overline{S_{gen}}|_{Y=0} \approx s_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{Y=0}^2$$

Cependant, lorsque l'on trace le profil du gradient vertical de température au niveau de la paroi inférieure, comme le montre la figure 5.11., on constate qu'il a une valeur minimale au milieu de l'élément chauffant, ce qui explique la valeur minimale de la génération d'entropie totale à ce niveau.

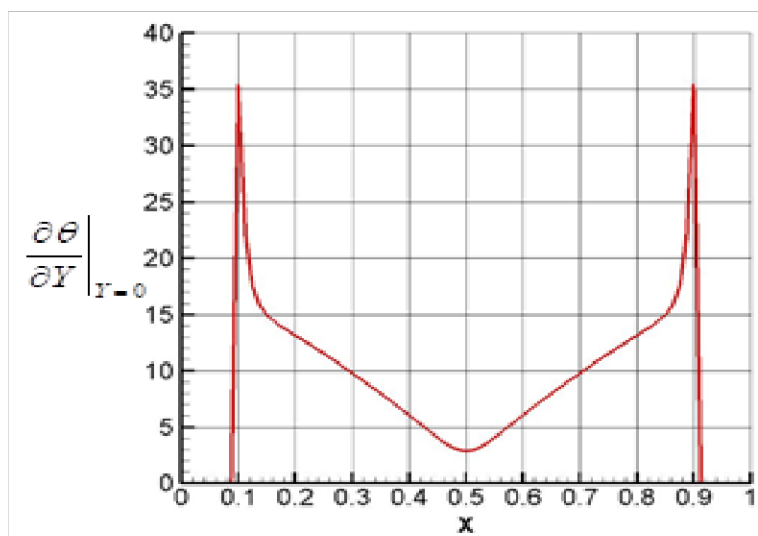


Figure 3.11 : Gradient vertical de la température sur la paroi inférieure à $Ri = 56,96$ pour l'air.

Néanmoins et contrairement aux cas de l'eau et de l'air, le mercure pour lequel l'écoulement n'est caractérisé que par quatre cellules, la génération d'entropie décroît de façon parabolique des deux extrémités de la source de chaleur sur la paroi gauche (ou droite) vers le centre de la cavité. De plus, il convient de noter que lorsque la convection naturelle domine (valeurs plus importantes du nombre de Richardson), la génération d'entropie devient indépendante du nombre de Richardson ce qui signifie que les gradients de température diminuent significativement dans la région centrale et que la génération d'entropie tend vers une valeur relativement constante limite.

3.1.4. Conclusion

L'écoulement de convection mixte dans la configuration géométrique choisie, prenant en compte trois fluides avec des nombres de Prandtl différents, a été étudié et discuté. De nombreuses simulations numériques ont été réalisées pour montrer l'effet du nombre de Prandtl (Pr) et du nombre de Richardson (Ri) sur les champs dynamiques et thermiques, ainsi que sur la génération d'entropie. Les résultats obtenus montrent que :

- Les effets du nombre de Prandtl sur le nombre du Nusselt moyen, les gradients de vitesse et de température, ainsi que la génération d'entropie est assez significatif.
- L'augmentation du nombre de Prandtl (Pr) implique l'augmentation du nombre Nusselt moyen qui varie de 3.7 à 3.8 pour le mercure, de 5.5 à 13 pour l'air, et de 12.5 à 15 pour l'eau.
- La génération d'entropie totale est plus importante pour le mercure ($Pr \ll 1$) et de l'eau ($Pr \gg 1$) que dans le cas de l'air ($Pr \sim 1$). En effet la valeur de la génération d'entropie totale varie de 700 à 1100 W/m^3K pour le mercure, de 200 à 500 W/m^3K pour l'eau, alors qu'elle ne varie que de 0.03 à 5 W/m^3K pour l'air. On peut donc en déduire que seuls les fluides dont le nombre de Prandtl est proche de 1 génèrent une perte d'énergie minimale.

3.2. Cas de l'eau à différents nombres de Prandtl

Contrairement au cas précédent, nous ne considérons qu'un seul fluide, cette fois-ci de l'eau à différents nombres de Prandtl. Ce choix est fondé sur le fait que l'eau est l'un des fluides qui présentent des disparités assez significatives entre les valeurs du nombre de Prandtl en fonction de la température. À cet égard, la figure 3.12 montre, d'une manière générale, la variation du nombre de Prandtl (Pr) en fonction de la température alors que les valeurs précises de référence des propriétés thermo-physiques de l'eau à 30°C (303 K), 60°C (333 K) et 90°C (363 K) sont listées dans le tableau 3.7. Précisons toutefois que ce cas a été traité en adoptant la forme dimensionnelle du système d'équations régissant l'écoulement du fluide. De plus, malgré le fait que la solution numérique implique une solution dépendante du temps, il convient de noter que seuls les résultats concernant les écoulements de fluide stables sont présentés ici.

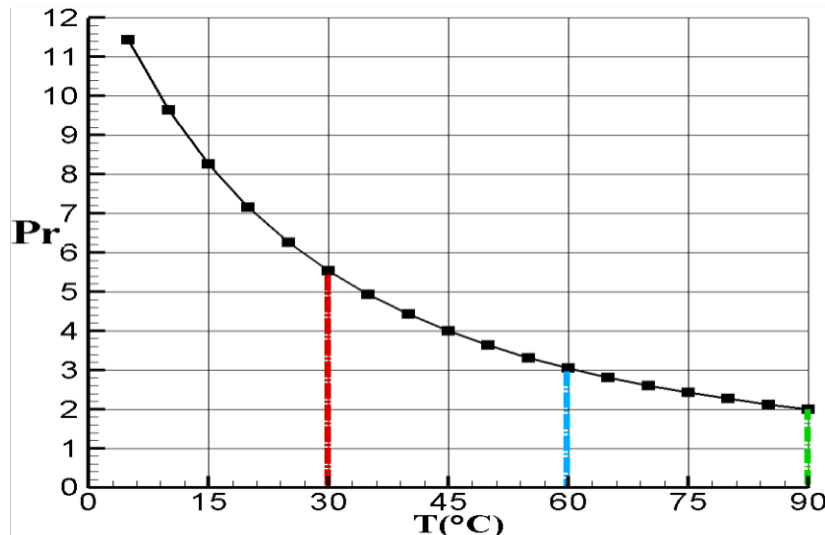


Figure 3.12 : Nombre de Prandtl de l'eau en fonction de la température (Dinçer et Zamfirescu 2016)

Tableau 3.7 : Propriétés thermo-physiques de l'eau pure à la pression atmosphérique (Dinçer et Zamfirescu 2016)

T_0 (°C)	ρ ($kg\ m^{-3}$)	μ ($kg\ m^{-1}\ s^{-1}$)	α ($m^2\ s^{-1}$)	k ($W\ m^{-1}\ K^{-1}$)	β (K^{-1})	Pr
30	995.7	$7.977\ 10^{-4}$	$1.4477\ 10^{-7}$	$6.03\ 10^{-1}$	$3.05\ 10^{-4}$	5.534
60	983.2	$4.666\ 10^{-4}$	$1.5585\ 10^{-7}$	$6.41\ 10^{-1}$	$5.22\ 10^{-4}$	3.045
90	965.3	$3.145\ 10^{-4}$	$1.6290\ 10^{-7}$	$6.613\ 10^{-1}$	$6.96\ 10^{-4}$	2.

La longueur L de la cavité a été considérée comme la longueur de référence typique de la configuration géométrie et a été utilisée pour calculer les valeurs des nombres sans dimensions. Dans un souci de clarification, il a été jugé opportun de montrer la variation du nombre de Richardson (Ri) en fonction de la longueur (L) de la cavité que nous avons présentée sur la figure 3.13, de manière à voir précisément l'écart qui puisse exister entre les valeurs spécifique de ce nombre pour chacun des nombres de Prandtl (Pr) considérés.

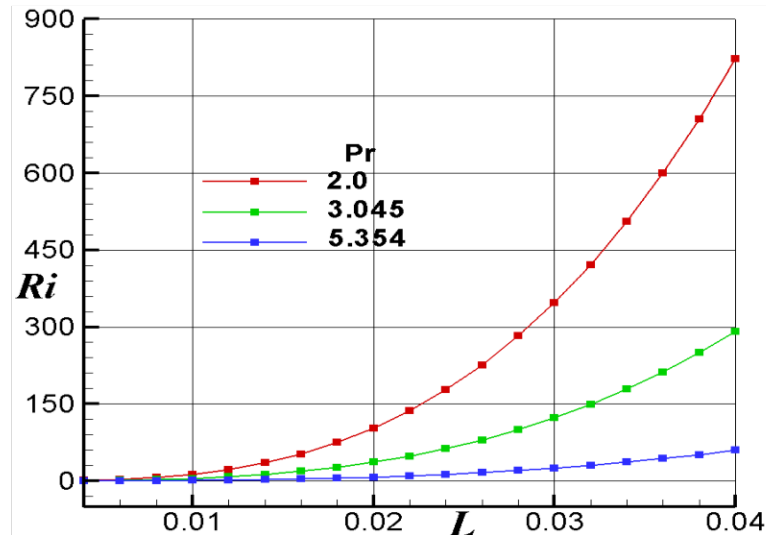
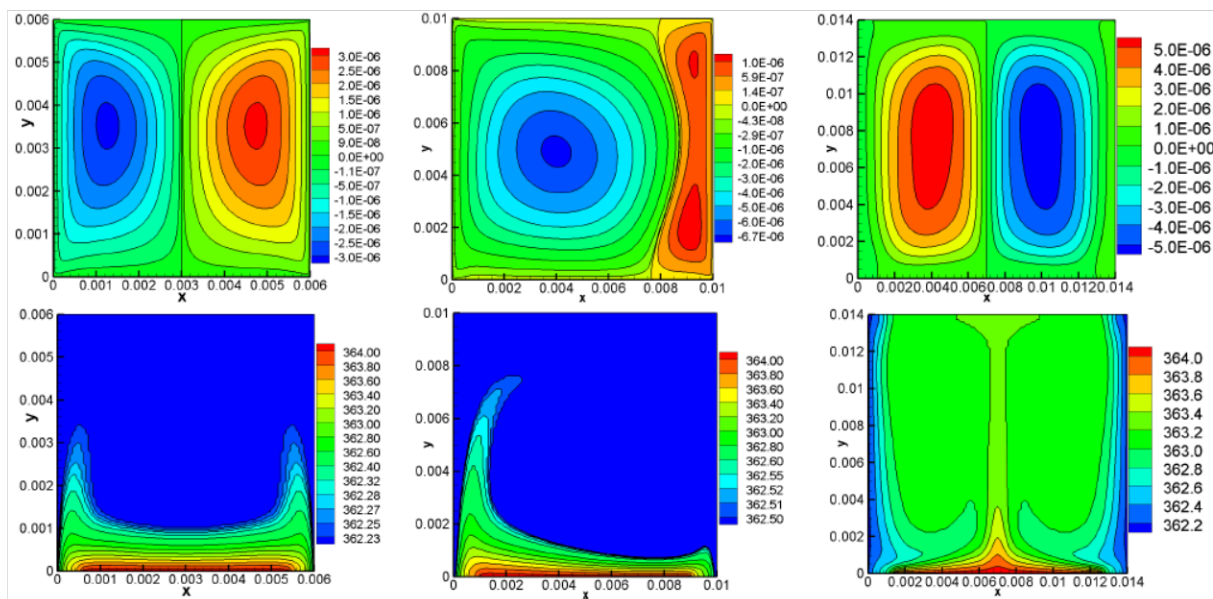


Figure 3.13 : Variation du nombre de Richardson en fonction de la longueur de référence L, pour les différentes valeurs du nombre de Prandtl considérées.

3.2.1. Les champs dynamiques et thermiques

La détermination de la génération d'entropie dépend des gradients de vitesse et de température, c'est pourquoi les champs dynamique et thermique doivent être examinés en premier lieu. La structure des lignes de courant et des isothermes sont présentées dans la figure 3.14 (a), (b) et (c) pour les valeurs du nombre de Prandtl de 2, 3,045 et 5,534, respectivement.

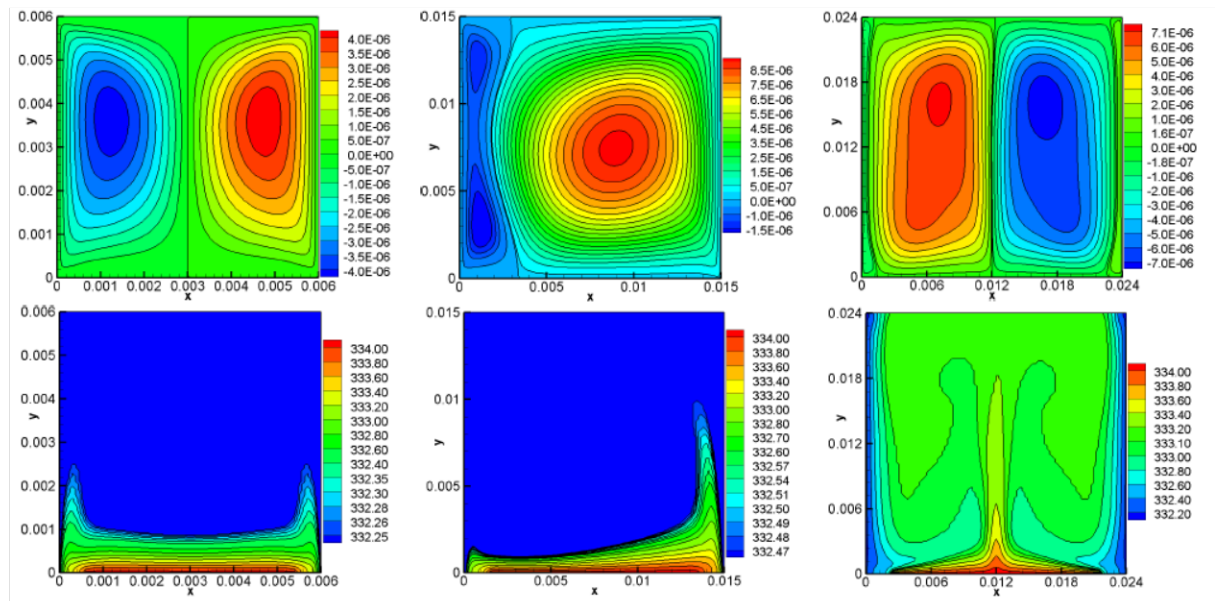


$Ri=2.78$

$Ri=12.86$

$Ri=35.3$

(a) $Pr=2$. ($T_0=90^\circ C$)

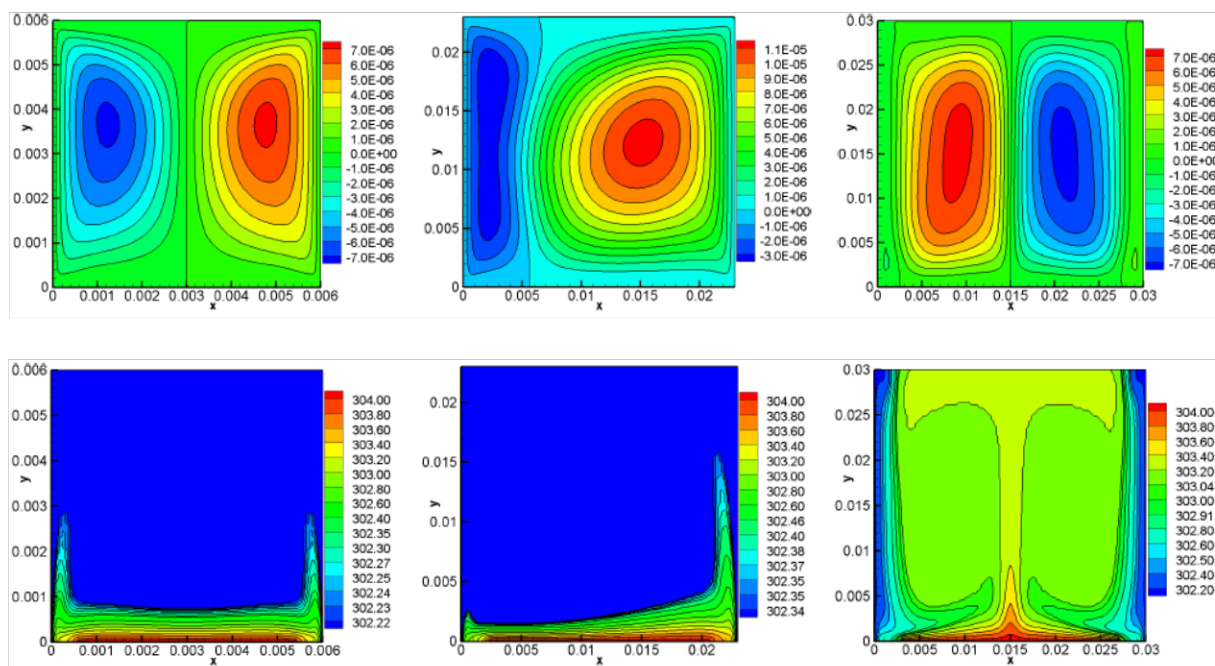


$Ri=0.98$

$Ri=15.35$

$Ri=62.87$

(b) $Pr=3,045$ ($T_0=60^\circ C$)



$Ri=0.2$

$Ri=11.35$

$Ri=25.18$

(c) $Pr=5,534$ ($T_0=30^\circ C$)

Figure 3.14 : Contours des lignes de courant (première rangée), des isothermes (deuxième rangée) pour différents nombres de Richardson (Ri) pour (a) $Pr=2,0$, (b) $Pr=3,045$ et, (c) $Pr=5,534$

Cette figure montre que la circulation du fluide à l'intérieur de la cavité dépend fortement du nombre de Richardson (c'est-à-dire de la longueur de la cavité L). Il faut néanmoins noter que chaque figure présente la cavité avec sa propre dimension relevée sur les axes x et y . Les résultats des différentes simulations numériques montrent l'existence de trois types d'écoulements bien distincts selon la valeur du nombre de Richardson (Ri). Le premier type se produit à de faibles valeurs de Ri . Les lignes de courant sont caractérisées par la présence, à l'intérieur de la cavité, de deux cellules strictement symétriques par rapport à l'axe vertical passant par le milieu de la cavité (première colonne de la figure 3.14 a, b, c). Celle de gauche tourne dans le sens des aiguilles d'une montre et celle de droite tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Les forces dues au mouvement des parois latérales sont suffisamment importantes pour puiser la chaleur de la partie chauffée, située sur la paroi inférieure de la cavité, pour la répartir uniformément le long de ces parois. Le deuxième type se produit lorsque Ri dépasse une valeur critique (première bifurcation). Dans ce cas particulier, des structures d'écoulement et des distributions de température dissymétriques sont observées à l'intérieur de l'enceinte (deuxième colonne de la figure 3.14 a, b, c). Le troisième et le dernier type a lieu lorsque Ri continue d'augmenter pour dépasser une deuxième valeur critique (deuxième bifurcation). Des changements notables et significatifs dans les lignes de courant et les isothermes sont observés (troisième colonne de la figure 3.14 a, b, c). Dans ce cas, l'écoulement est principalement composé de quatre cellules symétriques, deux cellules contrarotatives situées au centre de la cavité en raison des forces de flottabilité, et les deux autres, également contrarotatives en raison des forces visqueuses, sont de faible intensité et sont adjacentes aux parois latérales. À l'intérieur de chacune de ces dernières, deux petits tourbillons apparaissent dans les coins inférieur et supérieur. Dans ce cas, toute la chaleur de la source chaude se propage au centre de la cavité. Il convient toutefois de noter que si l'écoulement passe d'un état stationnaire à un état chaotique, l'augmentation du nombre de Richardson doit être arrêtée. C'est une procédure similaire qui a déjà été utilisée par Cheng (2011). Nous notons que Biswas et Manna (2017) ont précédemment rapporté l'existence de ces mêmes modèles d'écoulement qui prennent naissance dans une cavité carrée chauffée par le fond et remplie d'air, où les deux parois latérales refroidies (ou adiabatiques) se déplacent à une vitesse constante, soit verticalement vers le haut, soit verticalement vers le bas, tandis que la paroi supérieure est considérée comme adiabatique ou maintenue à une température froide constante.

Par ailleurs nous observons cependant que pour $Pr = 3.045$ et Ri variant entre 22.35 ($L = 0.017$ m) et 36.38 ($L = 0.02$ m), les distributions des lignes de courant et des contours de

température sont considérablement modifiées et un autre type intéressant d'écoulement du fluide fait son apparition. Afin de mieux identifier et définir ce nouveau type d'écoulement inattendu et déconcertant, les lignes de courant et les isothermes pour les valeurs limites du nombre de Richardson citées ci-dessus sont comparées sur la figure 3.15. Cette figure indique que pour $Ri = 22.35$, les lignes de courant affichées consistent en deux cellules strictement antisymétriques par rapport à l'axe médian vertical ($x = L/2$) mais sont pratiquement symétriques par rapport à l'axe médian horizontal ($y = L/2$).

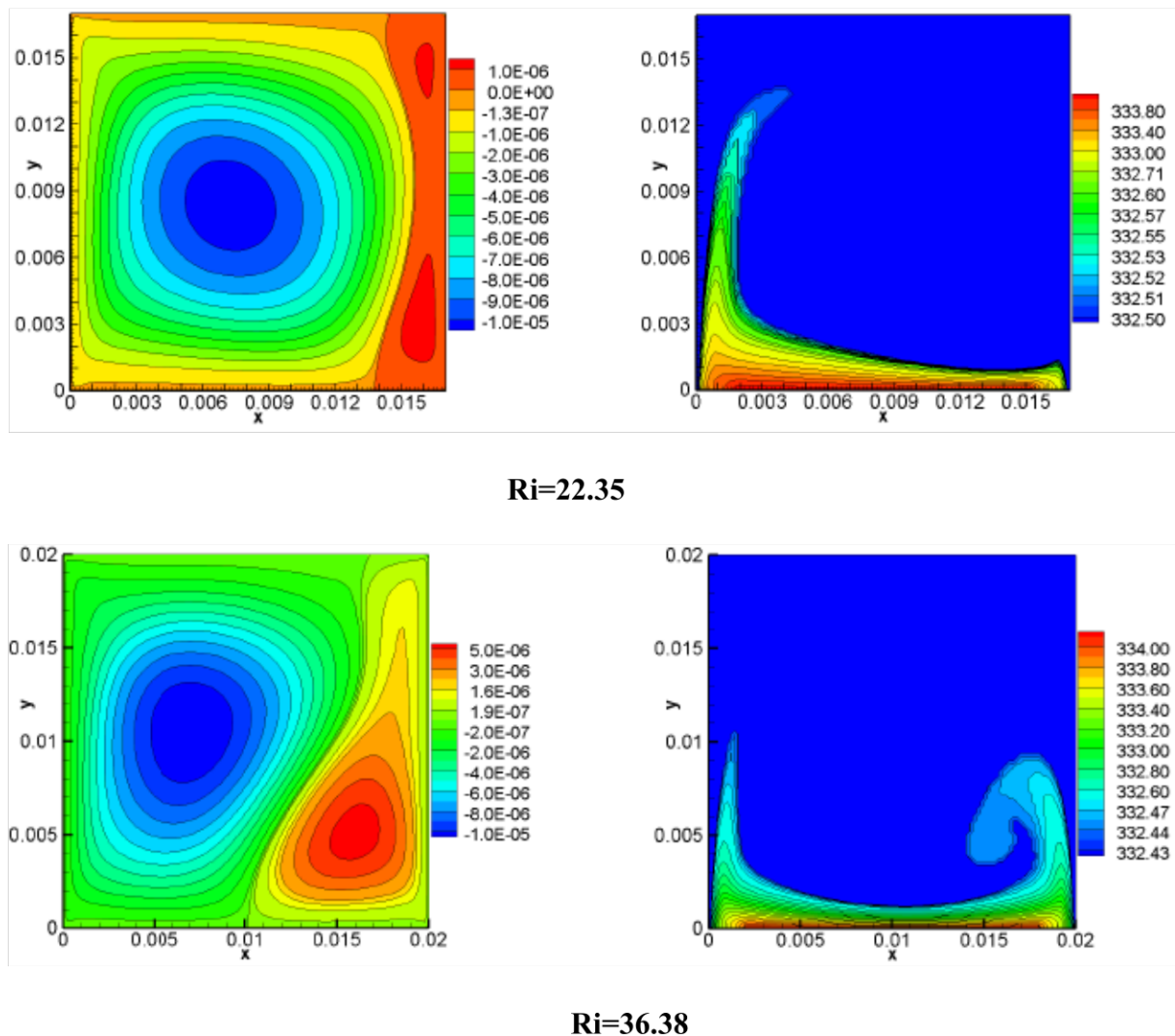


Figure 3.15 : Comparaison des lignes de courant (colonne gauche) et des isothermes (colonne droite) pour $Ri=22.35$ et 35.36 à $Pr=3.045$

Cette figure montre que pour $Ri=22.35$ les lignes de courant sont constituées de deux cellules strictement antisymétriques par rapport à l'axe vertical médian ($x=L/2$), mais

pratiquement symétriques par rapport à l'axe horizontal médian ($y=L/2$). On remarque également que la chaleur de la source chaude se propage sur une seule paroi latérale. Cependant, pour $Ri = 36,38$, le nouveau type de régime d'écoulement est caractérisé par deux cellules non symétriques, non seulement par rapport à l'axe médian vertical ($x=L/2$) mais aussi par rapport à l'axe médian horizontal ($y= L/2$). D'autre part, contrairement au cas précédent les isothermes se propagent le long des deux parois latérales de la cavité. Il est également important de souligner que lorsque le nouveau type d'écoulement est considéré, le comportement de ce dernier est souvent imprévisible. Pour illustrer ce point, une comparaison du nombre de Nusselt moyen pour $Ri = 22,35$ et $36,38$ est présentée dans la figure 3.16.

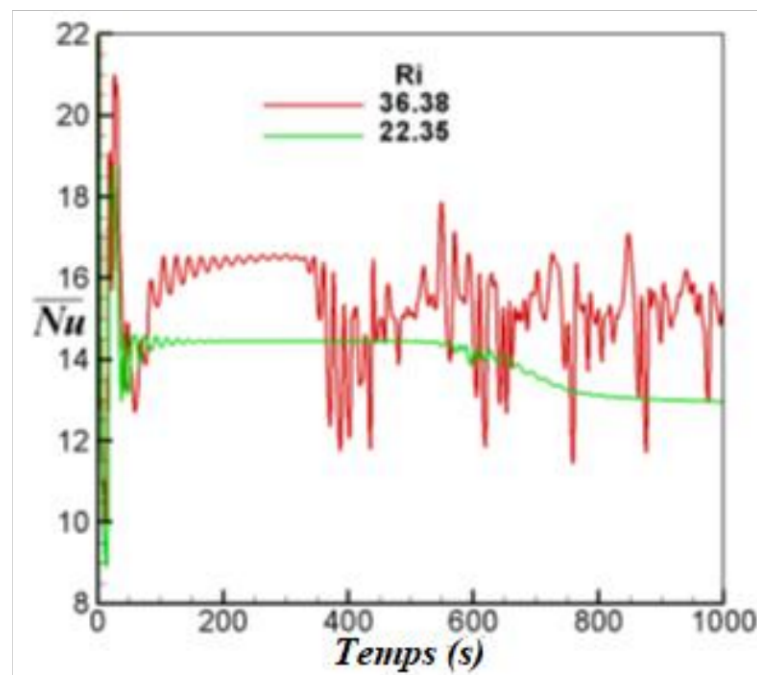


Figure 3.16 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour $Ri=36,38$ et, $22,35$ à $Pr= 3,045$

On voit que, pour $Ri = 22,35$, l'évolution de la valeur du nombre de Nusselt moyen converge vers une valeur fixe, alors que pour $Ri = 36,38$ l'évolution de ce même nombre reste tellement fluctuante qu'aucune valeur stable de ce nombre ne peut être déterminée pratiquement. Soulignons également que Evgrafova et Sukhanovsky (2019a et 2021b) en examinant de près les régimes convectifs laminaire et transitoire à partir d'une source de chaleur localisée à l'intérieur d'un récipient cylindrique rempli d'huile de silicone de différents diamètres à différentes valeurs du nombre de Prandtl ($Pr = 209, 104, 67$ et 38) et à une température de

référence égale à 25°C, ont vérifié et validé expérimentalement cette complexité de l'écoulement du fluide et du transfert de chaleur. Par ailleurs, une tendance similaire est observée lorsque l'écoulement passe du nouveau type de régime d'écoulement (deux cellules non symétriques) au troisième type de régime d'écoulement (quatre cellules symétriques). Ici aussi, nous avons noté, à partir de la figure 3.17 (a), que l'évolution du nombre de Nusselt moyen à $Pr=3.045$ pour $Ri=62.87$, caractérisant le troisième type de régime d'écoulement (quatre cellules symétriques) développe aussi des fluctuations imprévisibles qui commencent à s'amplifier lorsque le temps de simulation dépasse 900 s. Par contre, pour les autres nombres de Prandtl ($Pr=2.$ et $Pr=5.534$) le débit de fluide reste toujours stable pour le même type de régime d'écoulement (quatre mailles symétriques). La figure 3.17 (b) est une illustration de cette stabilité pour des valeurs arbitraires des nombres de Richardson caractérisant le même type de régime d'écoulement (quatre cellules symétriques). Nous avons également constaté que, l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour $Pr=2,0$ à $Ri=35,3$, comme pour $Pr=5,534$ à $Ri = 25,18$, évolue vers une valeur constante témoignant d'une évolution stable de l'écoulement du fluide.

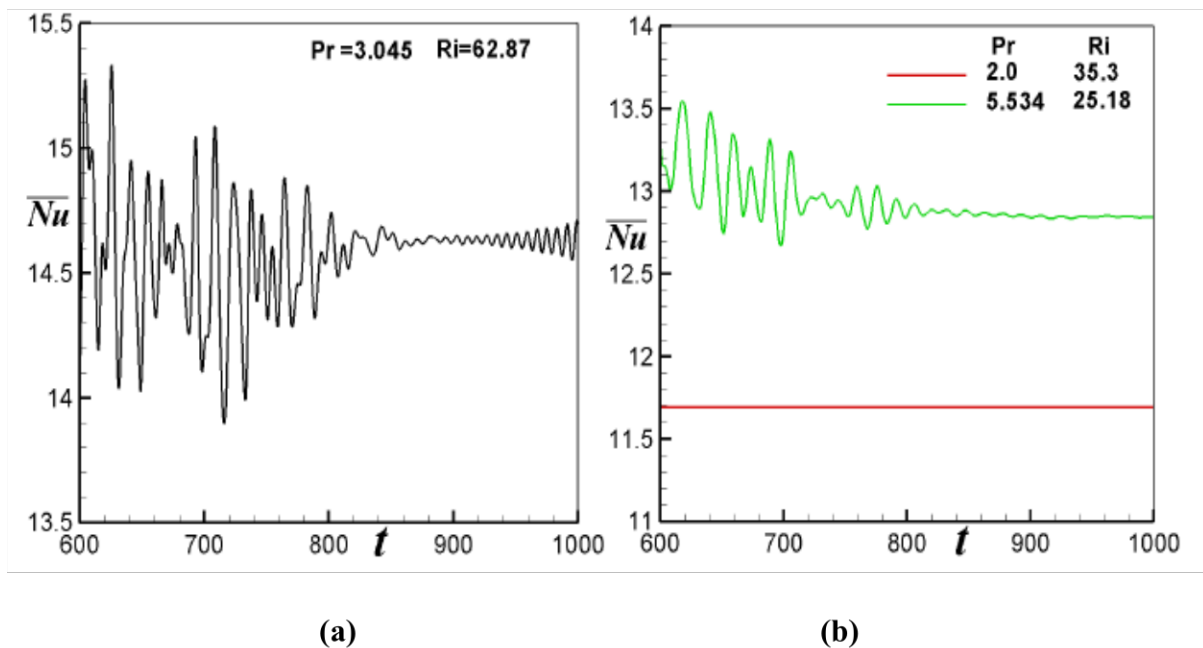


Figure 3.17 : Comparaison de l'évolution du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} (a) pour $Pr=3,045$ à $Ri= 62,87$; (b) pour $Pr=2,0$, et, $5,534$ à $Ri=35,3$ et, $25,18$, respectivement

Enfin, nous avons brièvement résumé dans le tableau 3.8, l'identification des différents types de régimes d'écoulement, définis par leurs nombres de Richardson (Ri) et la longueur de cavité correspondante (L), pour les nombres de Prandtl (Pr) considérés dans cette étude.

Tableau 3.8 : Identification des différents types de régimes d'écoulement pour les nombres de Prandtl considérés.

Régime d'écoulement	Premier type	Deuxième type	Troisième type
Pr=2.0 stable	$0.823 \leq Ri \leq 4.41$ $0.004 \leq L \leq 0.007$	$6.58 \leq Ri \leq 19.56$ $0.008 \leq L \leq 0.007$	$Ri \geq 22.22$ $L \geq 0.012$
Pr=3.045 stable	$0.291 \leq Ri \leq 6.06$ $0.004 \leq L \leq 0.011$	$6.92 \leq Ri \leq 22.34$ $0.0115 \leq L \leq 0.017$	-----
Pr=3.045 instable	-----	$26.52 \leq Ri \leq 36.38$ $0.018 \leq L \leq 0.023$	$Ri \geq 48.43$ $L \geq 0.024$
Pr=5.534 stable	$0.0597 \leq Ri \leq 9.93$ $0.004 \leq L \leq 0.022$	$11.35 \leq Ri \leq 18.36$ $0.023 \leq L \leq 0.027$	$Ri \geq 20.47$ $L \geq 0.28$

Une fois la distribution de la température dans la configuration choisie connue, nous pouvons alors déterminer le taux de transfert de la chaleur au niveau de la paroi chaude qui est caractérisé par le nombre de Nusselt.

3.2.2. Taux de transfert de chaleur

L'effet du nombre de Richardson sur l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour les cas de $Pr = 2,0, 3,045$ et $5,534$ est illustré sur la figure 3.18.

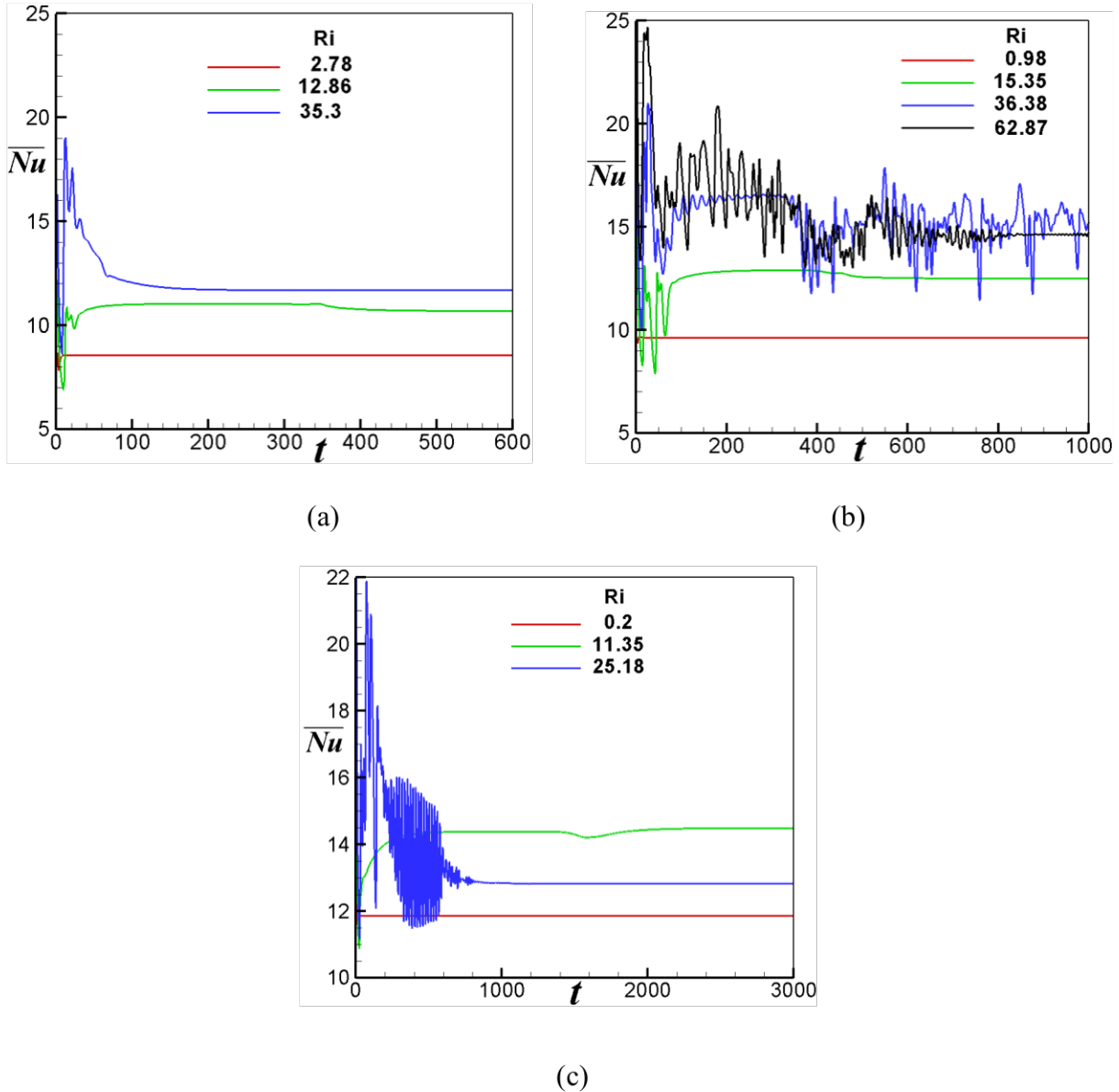


Figure 3.18 : Evolution du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} pour différents Ri , (a) $Pr=2,0$, (b) $Pr=3,045$ et, (c) $Pr=5,534$

Il doit être noté que les mêmes valeurs du nombre de Richardson (Ri) qui caractérisent la structure des lignes de courant et des isothermes, présentées précédemment, ont été prises en compte pour représenter l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour chaque type de régime d'écoulement. De manière générale, on constate que le nombre de Nusselt moyen, quel que soit le nombre de Prandtl, présente au départ des fluctuations qui deviennent de plus en plus importantes au fur et à mesure que le nombre de Richardson augmente avant de se stabiliser à une valeur fixe. De plus, le régime à deux cellules non symétriques est caractérisé par une chute brutale de l'évolution du nombre de Nusselt moyen. On constate également que plus Ri

augmente, quel que soit le nombre de Prandtl, plus de chaleur est transférée depuis la paroi inférieure chauffée, soit le long des parois latérales (le premier et le second type de régime d'écoulement) soit le long de la partie centrale de la cavité (le troisième type de régime d'écoulement). Cela signifie que le gradient de température au niveau de la paroi inférieure chauffée augmente également et, par conséquent, le nombre de Nusselt atteint une importance accrue. D'autre part, les temps de calcul pour lesquels les écoulements deviennent stables augmentent au fur et à mesure que les nombres de Richardson et de Prandtl augmentent simultanément et leurs valeurs approximatives sont de 600 s, 1000 s et 5000 s à $Pr = 2,0, 3,045, 5,534$, respectivement. En d'autres termes, le régime permanent est atteint plus rapidement pour les petits nombres de Prandtl que pour les grandes valeurs de ce dernier. Notons, à titre d'information, que dans le cas de $Pr = 5,545$ un temps de calcul compris entre 2 et 3 jours, sur une station de calcul "HP Z820 Workstation", est nécessaire pour chaque simulation numérique pour s'assurer de la stabilité de l'écoulement du fluide lorsque le nombre de Richardson est compris entre 11.35 ($L=0.02m$) et 18.36 ($L=0.03m$).

La figure 3.19 compare le nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} en fonction du nombre de Richardson pour les trois nombres de Prandtl considérés (2,0, 3,045 et 5,534).

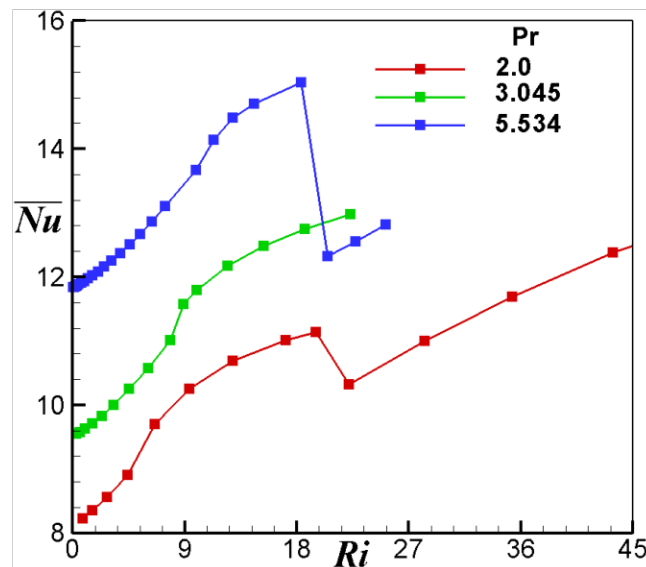


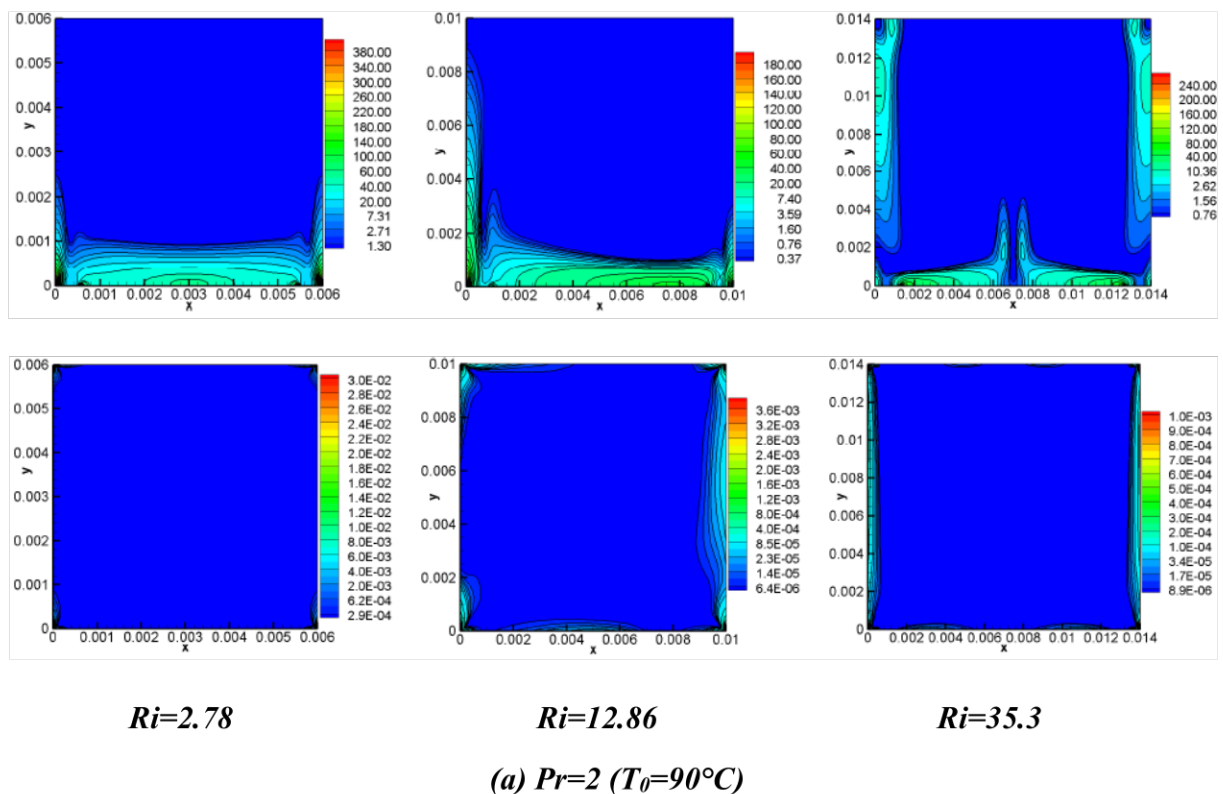
Figure 3.19 : Comparaison du nombre de Nusselt moyen \overline{Nu} en fonction du nombre de Richardson (Ri) pour les valeurs considérées du nombre de Prandtl (Pr)

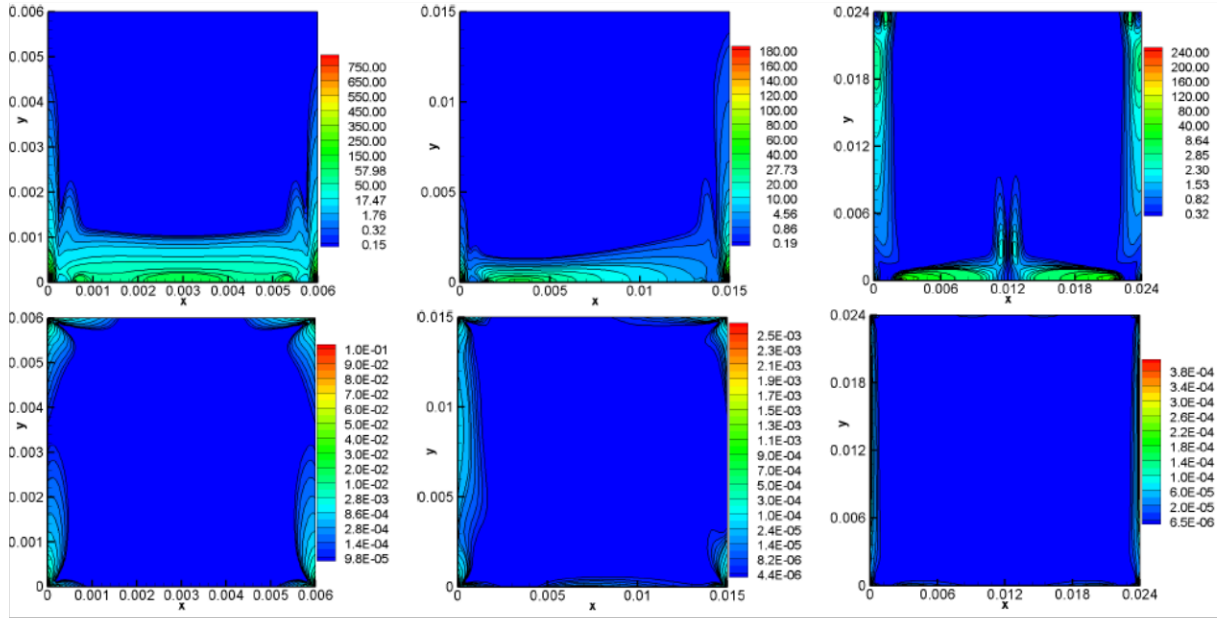
Il est évident qu'une augmentation de la valeur du nombre de Prandtl (c'est-à-dire une diminution de la température de la source de chaleur) conduit à une amélioration significative

du nombre de Nusselt moyen. Un nombre de Prandtl plus élevé a une diffusivité thermique relativement plus faible (voir tableau 3.5), ce qui réduit la conduction thermique et augmente ainsi le gradient de température à la surface chauffée et par conséquent, il peut également augmenter de manière significative le nombre de Nusselt moyen (Nadeem et al., 2016). Par ailleurs, une comparaison du nombre de Nusselt moyen à $Pr=2,0$ et $5,534$, indique clairement que le passage du deuxième type d'écoulement (deux cellules dissymétriques) au troisième (quatre cellules symétriques), se traduit par une chute brutale du nombre de Nusselt moyen (deuxième bifurcation). Ceci ne s'applique pas au cas particulier où $Pr=3,045$, car nous avons déjà vu que la solution devient tellement instable qu'il devient impossible, à partir de $Ri=26,52$, d'obtenir des valeurs fiables pour les différentes inconnues fondamentales du problème.

3.2.3. Caractéristiques de la génération d'entropie

Les contours de la génération totale d'entropie (première rangée) et de la génération d'entropie due au frottement de fluide (deuxième rangée), pour les mêmes nombres de Richardson précédemment considérés, aux nombres de Prandtl de $2,0$, $3,045$ et $5,534$ sont présentés dans la figure 3.20 a, b et, c respectivement.



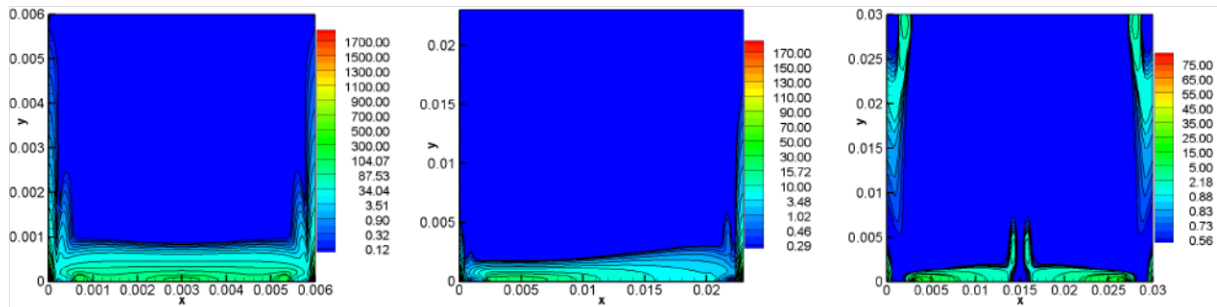


Ri=0.98

Ri=15.35

Ri=62.87

(b) $Pr=3,045$ ($T_0=60^\circ C$)



Ri=0.2

Ri=11.35

Ri=25.18

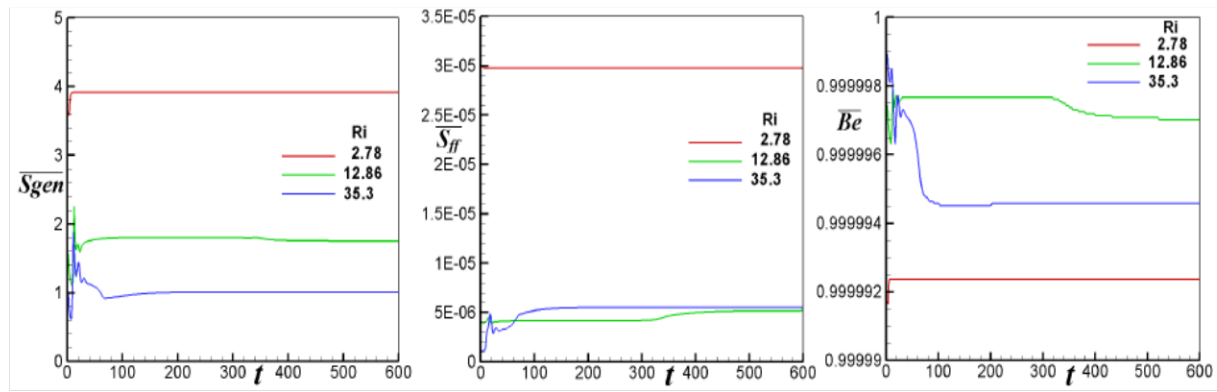
(c) $Pr=5,534$ ($T_0=30^\circ C$)

Figure 3.20 : Contours de la génération d'entropie totale (première rangée) et de la génération d'entropie due au frottement fluide (deuxième rangée), pour différents nombres de Richardson à (a) $Pr=2,0$, (b) $Pr=3,0454$ et, (c) $Pr=5,534$

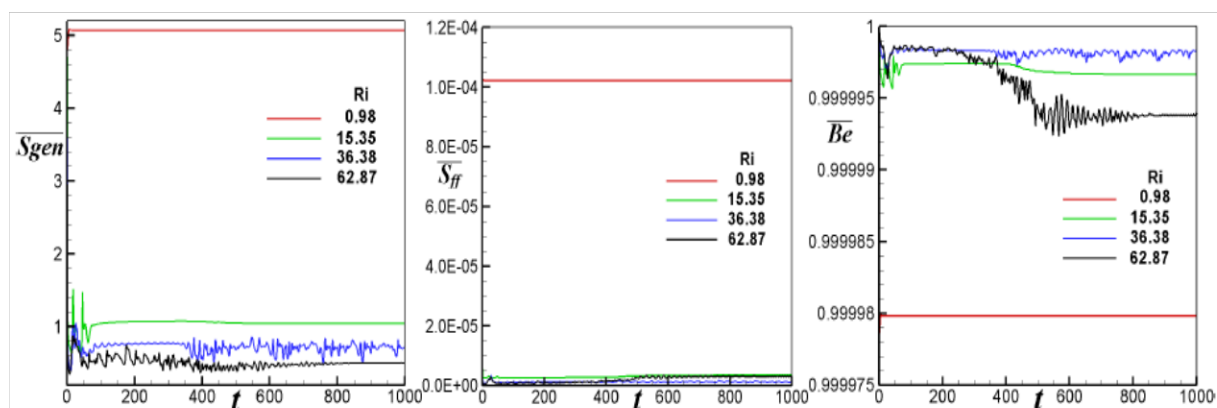
Dans la plupart des cas, la génération d'entropie est plus importantes au niveau des parois et moins sein de la cavité. De plus, les contours de la génération d'entropie totale se produisent fortement près de la partie active (c'est-à-dire la partie chauffée située au fond de la cavité) et progressent rapidement le long des parois latérales au fur et à mesure que le nombre de Richardson augmente. Cela est dû aux gradients de température élevés le long des parois verticales. De plus, cette figure montre que les contours de la génération d'entropie locale due au frottement du fluide ne sont significatifs que près des parois latérales froides et dans les coins, mais deviennent négligeables au sein de la cavité. Dans ce cas particulier, la cause du problème peut être principalement attribuée aux gradients de la composante de vitesse verticale. En comparant les contours de température de la figure 3.15, a, b, c (deuxième rangée) avec ceux de la génération d'entropie totale de la figure 3.20, a, b, c (première rangée), et quelles que soient les valeurs des nombres de Richardson et de Prandtl, on constate qu'elles apparaissent suffisamment similaires dans les deux cas. Cela signifie que les gradients de température jouent un rôle important dans la création de la génération d'entropie. Une conclusion similaire a été rapportée très récemment par Khetib et al (2021).

D'autre part, une comparaison les valeurs des évolutions de la génération d'entropie totale et celles due au frottement du fluide révèle que, quels que soient les nombres de Prandtl et de Richardson, la génération d'entropie due au frottement du fluide est si insignifiante que nous pouvons conclure, conformément à l'équation (1.14) que le nombre de Bejan moyen est très proche de un. Par conséquent, la tendance de la variation de la génération d'entropie thermique est similaire à celle de la génération d'entropie totale. Il a donc été décidé afin d'alléger le texte, de ne pas inclure les résultats relatifs aux contours et aux profils de la génération d'entropie thermique moyenne ainsi que ceux relatifs aux contours du nombre de Bejan.

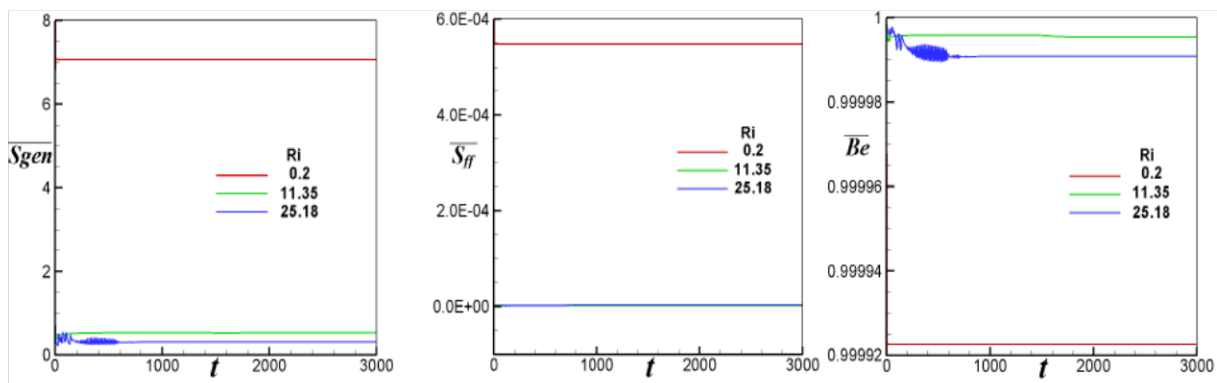
Les évolutions de la génération d'entropie totale moyenne (première rangée), de la génération d'entropie moyenne due au frottement de fluide (deuxième rangée), et du nombre de Bejan moyen (troisième rangée), pour les mêmes nombres de Richardson et de Prandtl, précédemment considérés, sont présentées sur la figure 3.21 (a, b et c).



(a)



(b)



(c)

Figure 3.21 : Évolution de la génération d'entropie totale moyenne (première rangée), de la génération d'entropie moyenne due au frottement de fluide (deuxième rangée) et du nombre de Bejan moyen (troisième rangée), pour différents nombres de Richardson à (a) $Pr=2,0$, (b) $Pr=3,0454$ et, (c) $Pr=5,534$.

Il convient de noter que lorsque les nombres de Richardson augmentent, la production d'entropie totale et la génération d'entropie due au frottement du fluide diminuent tandis que le nombre de Bejan augmente. De plus, il est noté que les valeurs de la génération moyenne d'entropie due au frottement du fluide sont insignifiantes par rapport à celles de la génération moyenne d'entropie globale ce qui implique que le nombre de Bejan moyen est très proche de 1,0.

La figure 3.22 montre la production moyenne d'entropie, la génération moyenne d'entropie due à la friction du fluide et le nombre moyen de Bejan en fonction des nombres de Richardson, et illustre l'influence directe des nombres de Prandtl considérés. Il faut noter que lorsque ces nombres de Prandtl augmentent, la génération d'entropie globale moyenne et la génération d'entropie moyenne due à la friction du fluide diminuent. Les courbes correspondantes décrivent un comportement similaire à celui suivi par les courbes des nombres de Nusselt moyens, la seule différence est, dans ce cas, que lorsque les nombres de Prandtl augmentent, le nombre de Nusselt moyen diminue.

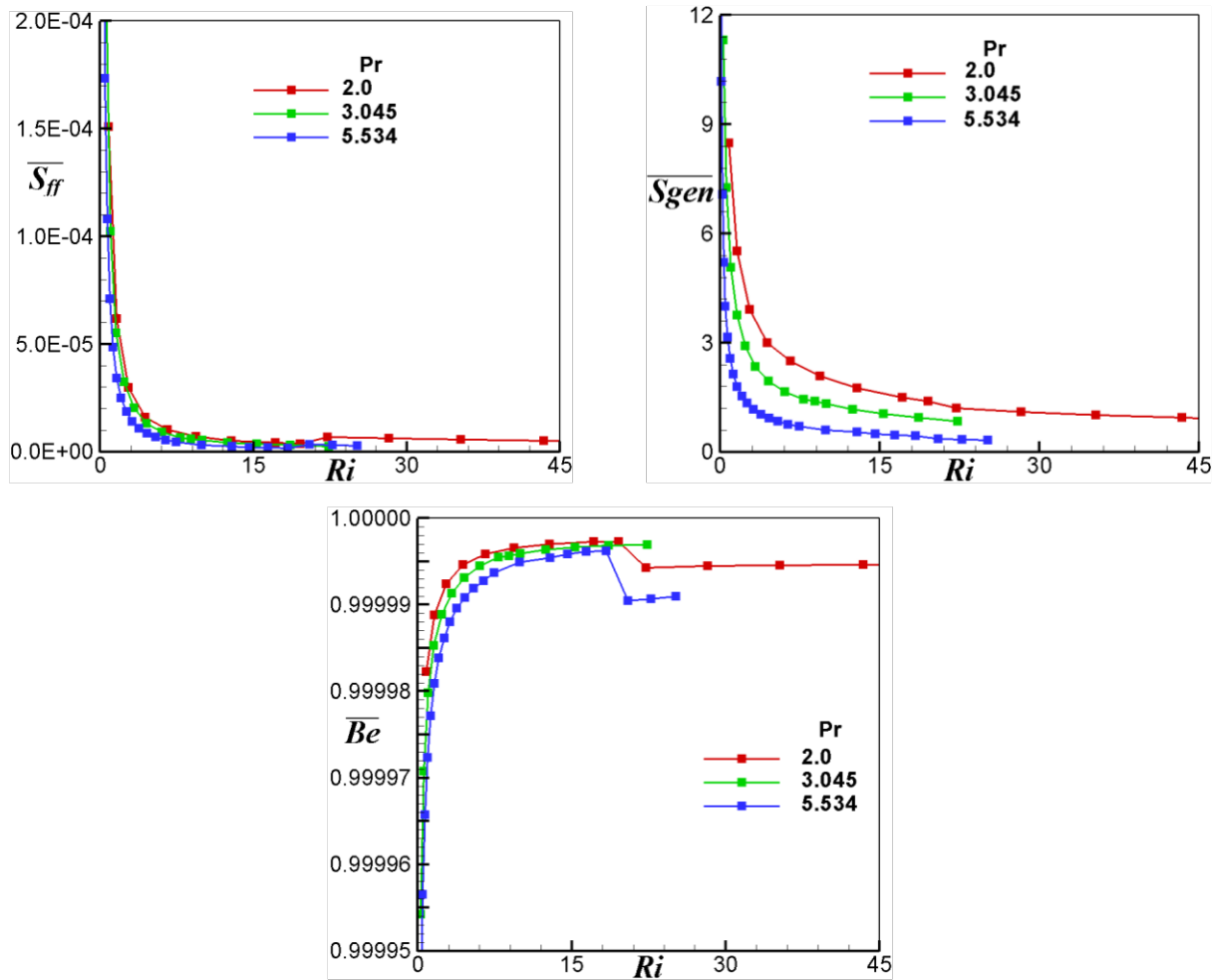


Figure 3.22 : Comparaison de la génération d'entropie moyenne $\overline{s_{gen}}$, de la génération d'entropie moyenne due au frottement du fluide $\overline{s_{ff}}$ et du nombre de Bejan moyen \overline{be} en fonction de Ri pour les valeurs considérées du nombre de Prandtl (Pr)

3.2.4. Conclusion

L'écoulement de convection mixte dans la même configuration géométrique a été de nouveau étudié et discuté. Mais dans ce deuxième cas nous n'avons considéré qu'un seul fluide (Eau) dont les valeurs du nombre de Prandtl sont égales à 5,534, 3,045 et 2, correspondant respectivement aux températures de l'eau de 303 K, 333 K et 363 K.

De nombreuses simulations numériques ont été réalisées pour montrer l'effet du nombre de Prandtl (Pr) et du nombre de Richardson (Ri) sur les champs dynamiques et thermiques, ainsi que sur la génération d'entropie. Les résultats obtenus montrent que :

- Des comportements intéressants des champs de l'écoulement et des champs thermiques, qui impliquent principalement des solutions symétriques et non symétriques stables, ainsi que des régimes instationnaires, en fonction des valeurs spécifiques du nombre de Richardson et de Prandtl.
- Des écoulements instables apparaissent pour un nombre de Richardson supérieur ou égal à 26,52 ($L=0,18m$) à $Pr = 3,045$.
- Une augmentation du nombre de Prandtl, indépendamment du nombre de Richardson, entraîne une augmentation du nombre de Nusselt moyen.
- Dans tous les cas la génération d'entropie moyenne diminue lorsque les nombres de Richardson (Ri) et de Prandtl (Pr) augmentent simultanément.
- Le nombre moyen de Bejan est toujours proche de un, ce qui révèle que la contribution de l'irréversibilité thermique à la production totale d'entropie est toujours beaucoup plus importante que l'irréversibilité par frottement du fluide.

CONCLUSION GÉNÉRALE

CONCLUSION GÉNÉRALE

Le présent travail consiste en l'étude numérique d'un écoulement laminaire en régime de convection mixte dans une cavité carrée. Les parois latérales de la cavité, qui se déplacent vers le haut, sont maintenues à une basse température T_c tandis que seule une partie au centre de la paroi inférieure est maintenue à une température élevée T_h et toutes les autres parties restantes sont maintenues adiabatiques. L'objectif principal de ce travail était la détermination des structures de l'écoulement, du transfert thermique et de la génération d'entropie en prenant en considération les effets des nombres de Prandtl et de Richardson.

La génération d'entropie, un des objets principaux de ce travail, a attiré et continue d'attirer une attention particulière dans la communauté scientifique en raison de ses applications fondamentales dans les domaines technologiques et industriels. En effet, la détermination précise de cette perte d'énergie est nécessaire pour la conception et le dimensionnement de divers équipements mettant en jeu différents processus de transfert. Une recherche bibliographique très approfondie sur ce sujet a donc révélé que la détermination exacte de cette entité physique, reste jusqu'à présent bien peu maîtrisé car les valeurs proposées, par tous les auteurs, sont basées sur le choix arbitraire d'un rapport de distribution de l'irréversibilité figurant dans l'équation du calcul de cette génération d'entropie. De plus, les valeurs proposées varient dans des intervalles assez larges. Dans le but de remédier à cette situation, nous avons proposé, testé et validé, dans le premier chapitre de ce travail, une nouvelle approche pour le calcul du rapport de distribution de l'irréversibilité afin de déterminer avec précision la valeur de la génération d'entropie dans le but de dimensionner correctement tout équipement impliqué dans des processus réels impliquant des fluides en écoulement. Nous avons ensuite utilisé cette nouvelle approche pour déterminer avec précision la génération d'entropie dans la configuration géométrique considérée.

Dans un deuxième chapitre de cette thèse nous avons détaillé la discrétisation des différents termes présents dans le système d'équations gouvernant ce type d'écoulement. Cette discrétisation est basée sur la méthode des différences finies. La discrétisation temporelle a été réalisée en utilisant la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (R.K.4). Les termes convectifs ont été discrétisés à l'aide d'un schéma « Upwind » d'ordre 3. Les termes diffusifs, ainsi que les termes incluant les dérivées premières, ont été discrétisés par un schéma précis d'ordre 4. Une

procédure itérative basée sur une méthode de type Newton-Raphson a été utilisée pour résoudre l'équation de la fonction de courant. Un code de calcul en langage Fortran a été développé puis expérimenté pour la résolution des différentes équations discrétisées.

Dans le troisième et dernier chapitre de cette thèse nous avons présenté et commenté les principaux résultats obtenus à partir de nombreuses simulations concernant deux cas différents pour analyser l'effet du nombre Prandtl sur les champs thermiques, hydrodynamiques et sur les caractéristiques de la génération d'entropie dans la configuration géométrique considérée. Dans le premier cas nous avons considéré trois fluides différents, les plus communément utilisés dans la pratique, à savoir le mercure avec un nombre de Prandtl de 0.0251, l'air avec un nombre de Prandtl de 0.73 et l'eau avec un nombre de Prandtl de 6.263. Leurs propriétés thermo-physiques ont été évaluées à la même température de référence égale à 298 K (25°C). Dans le second cas nous avons considéré un même fluide, il s'agit de l'eau à différent nombre Prandtl dont les valeurs sont : 5.534, 3.045 et 2, correspondant respectivement aux températures de 303 K (30°C), 333 K (60°C), et 363 K (90°C).

Sur la base de l'analyse des résultats obtenus à partir de nombreuses simulations numériques, nous en retiendrons les quelques principales conclusions suivantes :

- Les nombre de Prandtl et de Richardson affectent fortement les champs de vitesse et de température et, par conséquent, également celui de la génération d'entropie. Des structures complexes et instables peuvent apparaître pour certaines valeurs bien particulières de ces nombres.
- Une augmentation du nombre de Prandtl, quel que soit le nombre de Richardson, entraîne une augmentation du nombre de Nusselt moyen. Alors que La génération d'entropie totale moyenne diminue en augmentant le nombre de Richardson et elle s'avère plus élevée pour le mercure ($Pr=0.0251$) et l'eau ($Pr=6.263$) que pour l'air ($Pr= 0.73$). Par conséquent, il est fortement recommandé d'utiliser ce fluide dans les processus de transfert de chaleur.
- En général et quels que soient les nombres de Prandtl et de Richardson, les irréversibilités dues au transfert de chaleur sont largement plus importantes que celles dues au frottement des fluides. Cela se traduit par une valeur du nombre de Bejan moyen proche de 1.

- Dans tous les cas, la production d'entropie diminue lorsque les nombres de Richardson et de Prandtl augmentent simultanément.
- La génération de l'entropie est principalement générée au niveau de la paroi inférieure de la cavité. Les valeurs maximales sont observées au coin inférieur gauche et droit ainsi qu'aux deux extrémités de la source de chaleur.

Enfin, il convient de noter que cette étude peut servir de point de départ pour explorer également des perspectives de recherche qui pourraient faire suite à ce travail :

- Considérer l'étude du même phénomène et la même configuration géométrique mais cette fois en tenant compte de la troisième dimension.
- Envisager l'effet du nombre de Reynolds que ce soit en régime laminaire ou en régime turbulent.
- Utiliser le matériel informatique adéquat pour élucider les zones d'instabilités de l'écoulement de l'eau à différents nombres de Prandtl afin de déterminer avec précision les nombres de Richardson qui leurs correspondent.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIES

- Abbasi, F.M., Gul, M., Shanakhat, I., Anjum, H.J., Shehzad, S.A. (2022). Entropy generation analysis for magnetized peristaltic movement of nanofluid through a non-uniform asymmetric channel with variable thermal conductivity, *Chinese Journal of Physics*, (Article in Press) <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2022.05.006>
- Abderrahmane, A., Qasem, N.A.A., Younis, O. Marzouki, R., Abed Mourad, A., Nehad Ali Shah, N.A., Chung, J.D. (2022). MHD Hybrid Nanofluid Mixed Convection Heat Transfer and Entropy Generation in a 3-D Triangular Porous Cavity with Zigzag Wall and Rotating Cylinder, *Mathematics*, **10**, 769.
- Abdulkadhim, A., Abed, I.M, Said, N. M, (2021). An exhaustive review on natural convection within complex enclosures: Influence of various parameters, *Chinese Journal of Physics*, **74**, 365-388.
- Ait Hssain, M., Mir, R., & El Hammami, Y. (2020). Numerical Simulation of the Cooling of Heated Electronic Blocks in Horizontal Channel by Mixed Convection of Nanofluids. *Journal of Nanomaterials*, **11**.
- Akhter, R., Mokaddes Ali, M., Alim, M.A. (2022). Entropy generation due to hydromagnetic buoyancy-driven hybrid-nanofluid flow in partially heated porous cavity containing heat conductive obstacle, *Alexandria Engineering Journal*, Article in Press. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.07.005>
- Al-Abbasi, O. (2017). Entropy Generation in Rayleigh-Bénard Problem for Different Geometrical Cavities, *International Journal of Thermodynamics*, **20**, 200-208.
- Al-Chlahawi, K.K., Alaydamee, H.H., Faisal, A.E., Al-Farhany, K., Alomari, M.A. (2022). Newtonian and non-Newtonian nanofluids with entropy generation in conjugate natural convection of hybrid nanofluid-porous enclosures: a review. *Heat Transfer*, **51**, 1725-1745.
- Alfannakh, H., Souayeh, B., Hdhiri, N., Al Nuwairan, M., Al-Shaeli, M. (2022). Entropy Generation and Natural Convection Heat Transfer of (MWCNT/SWCNT) Nanoparticles around Two Spaced Spheres over Inclined Plates: Numerical Study. *Energies*, **15**, 2618.
- Alghaseb, M.A., Hassen, W., Mesloub, A., Kolsi, L. (2022). Effect of Heat Source Position in Fluid Flow, Heat Transfer and Entropy Generation in a Naturally Ventilated Room, *Mathematics*, **10**, 178.
- Al-Kouz, W., Kiwan, S., Alkhalidi, A., Sari, M., & Alshare, A. (2018a). Numerical Study of Heat Transfer Enhancement for Low-Pressure Flows in a Square Cavity with Two Fins Attached to the Hot Wall Using Al₂O₃-Air Nanofluid, *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, **64**, 26-36.
- Al-Kouz, A., Alshare, A., Kiwan, S., Al-Muhtady, A., Alkhalidi, A., Saadeh, H. (2018b). Two-dimensional analysis of low-pressure flows in an inclined square cavity with two fins attached to the hot wall, *International Journal of Thermal Sciences*, **126**, 181-193.

Al-Kouz, W., Al-Muhtady, A., Owhaib, W., Al-Dahidi, S., Hader, M., Abu-Alghanam, R. (2019). Entropy Generation Optimization for Rarified Nanofluid Flows in a Square Cavity with Two Fins at the Hot Wall. *Entropy*, **21**:103.

Al-Rashed, Abdullah A.A.A, Kolsi, L., Hussein, A.K., Hassen, W., Aichouni, M., Borjini, M.N. (2017). Numerical study of three-dimensional natural convection and entropy generation in a cubical cavity with partially active vertical walls, *Case Studies in Thermal Engineering*, **10**, 100–110.

Al-Rashed, Abdullah A.A.A, Kalidasan, K., Kolsi, L., Velkennedy, R., Aydi, A., Hussein, A.K., Malekshah, E.H. (2018). Mixed convection and entropy generation in a nanofluid filled cubical open cavity with a central isothermal block, *International Journal of Mechanical Sciences*, **135**, 362–375

Alsabery, A. I., Tayebi, T., Chamkha, A. J., Hashim, I. (2018a) Effect of rotating solid cylinder on entropy generation and convective heat transfer in a wavy porous cavity heated from below, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **95**, 197–209.

Alsabery, A.I., Muneer A. I, Chamkha, A.J. and Hashim, I. (2018b). Numerical Investigation of Mixed Convection and Entropy Generation in a Wavy-Walled Cavity Filled with Nanofluid and Involving a Rotating Cylinder, *Entropy*, **20**, 664.

Alsabery, A.I., Tayebi, T., Roslan, R., Chamkha, A.J., Hashim, I. (2020). Entropy Generation and Mixed Convection Flow Inside a Wavy-Walled Enclosure Containing a Rotating Solid Cylinder and a Heat Source. *Entropy*, **22**,606.

Alshare, A., Abderrahmane, A., Guedri, K., Younis, O., Fayz-Al-Asad, M., Ali, H.M., Al-Kouz, W. (2022). Hydrothermal and Entropy Investigation of Nanofluid Natural Convection in a Lid-Driven Cavity Concentric with an Elliptical Cavity with a Wavy Boundary Heated from Below. *Nanomaterials*, **12**, 1392.

Ashok Reddy, K. (2016). A Critical Review of Entropy Generation Analysis in Micro Channel Using Nano Fluids, *International Journal of Scientific Development and Research*, **1**, 6-12.

Atashafrooz, M., Shafie, M. (2020). Analysis of Entropy Generation for Mixed Convection Fluid Flow in a Trapezoidal Enclosure Using the Modified Blocked Region Method, *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*, **14**, 97-116.

Asad, M. F. A., Nur Alam, M., Tunç, C., & Sarker, M. M. A. (2021). Heat Transport Exploration of Free Convection Flow inside Enclosure Having Vertical Wavy Walls. *J. Appl. Comput. Mech.*, 7(3), 1334–1347.

Awad, M.M. (2015). A review of entropy generation in microchannels, *Advances in Mechanical Engineering*, **7**, 1-32.

Bahiraee, M., Mazaheri, N., Daneshyar, M.R., Mwesigye, A. (2022). Two-phase simulation of irreversibilities for Ag–water nanofluid flow inside an elliptical pin-fin heat sink: Entropy generation and exergy considerations, *Powder Technology*, 117723, In Press, Journal Pre-proof. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2022.117723>

- Baliti, J., Hssikou, M., Elguennouni, Y., Moussaoui, A., Alaoui, M. (2020). Heat Transfer and Entropy Generation for Natural Convection by Adiabatic Obstacles Inside a Cavity Heated on the Left Side. , *FME Transactions* **48**, 825-832.
- Barakos, G., Mitsoulis, E., Assimacopoulos, D. (1994). Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **18**, 695-719.
- Barnoon, P., Toghraie, D., Dehkordi, R. B., Abed, H. (2019). MHD mixed convection and entropy generation in a lid-driven cavity with rotating cylinders filled by a nanofluid using two-phase mixture model, *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **483**, 224–248
- Basak, T., Kaluri, R.S. and Balakrishnan, A. R. (2011). Effects of Thermal Boundary Conditions on Entropy Generation During Natural Convection, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **59**, 372-402.
- Baytaş, A.C. (2000). Entropy generation for natural convection in an inclined porous cavity, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **43**, 2089–2099.
- Balam, N. B., & Gupta, A. (2019). Numerical solution of natural-convection flow in enclosures: An implicit vorticity boundary condition type method. *Heat Transfer Research*, 50(14). <https://doi.org/10.1615/HeatTransRes.2019028547>
- Bejan, A. (1996). Entropy generation minimization: The new thermodynamics of finite-size devices and finite-time processes, *Journal of Applied Physics*, **79**, 1191-1218.
- Bejan, A. (1982). *Entropy generation through heat and fluid flow* (Vol. 1). New York: Wiley.
- Bejan, A. (1987). The thermodynamic design of heat and mass transfer processes and devices, *Journal of Heat and Fluid Flow*, **8**, 258-275.
- Bejan, A. (2001). Entropy generation minimization: the method and its applications. *Strojniški vestnik - Journal of Mechanical Engineering*, **47**, 345-355.
- Bejan, A. (2013). *CONVECTION HEAT TRANSFER, FOURTH EDITION*, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, New Jersey, Chap. 1, p.17
- Benzema, M., Benkahla, Y.K., Boudiaf, A., Ouyahia, S., & Ganaoui, M.E. (2020). Entropy generation due to the mixed convection flow of MWCNT-MgO/water hybrid nanofluid in a vented complex shape cavity. *MATEC Web of Conferences*. **307**, 01007.
- Biswal, P., Basak, T. (2017). Entropy generation vs energy efficiency for natural convection based energy flow in enclosures and various applications: A review. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **80**, 1412-1457.
- Biswas, N., Manna, N. (2017). Transport phenomena in a sidewall-moving bottom-heated cavity using heat lines. *Sādhanā*, **42**, 193–211. <https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s12046-016-0586-4>

Bouabid, M., Magherbi, M., Hidouri, N., Ben Brahim, A. (2011). Entropy Generation at Natural Convection in an Inclined Rectangular Cavity, *Entropy*, **13**, 1020-1033.

Boudebous, S., Ferroudj, N. (2021). New Approach to Compute Accurately the Entropy Generation due to Natural Convection in a Square Cavity, *E3S Web of Conferences*, **321**, 04020.

Cai, M., Cui, P., Qin, Y., Geng, D., Wei, Q., Wang, X., Yang, D., and Zhang, G. (2020). Entropy Generation Methodology for Defect Analysis of Electronic and Mechanical Components - A Review, *Entropy*, **22**, 254.

Chamkha, A. J., Rashad, A. M., Armaghani, T., Mansour, M. A. (2018). Effects of partial slip on entropy generation and MHD combined convection in a lid-driven porous enclosure saturated with a Cu–water nanofluid, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, **132**, 1291–1306.

Chen, X., Zhao, T., Zhang, M.Q., Chen, Q. (2019). Entropy and entransy in convective heat transfer optimization: A review and perspective, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **137**, 1191-1220.

Cheng, T. S. (2011a). Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(2).

<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.09.012>

Cheng, T. S. (2011b). Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers. *International Journal of Thermal Sciences*, 50(2), 197–205.

Çengel, Y., & Ghajar, A. (2015). *Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications*. McGraw-Hill.

Costa, V.A.F. (2005). Thermodynamics of natural convection in enclosures with viscous dissipation, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **48**, 2333–2341.

Dincer, I., Cengel, Y. A. (2001). Energy, Entropy and Exergy Concepts and Their Roles in Thermal Engineering, *Entropy*, **3**, 116–149.

Dinçer, I., Zamfirescu, C., *Drying Phenomena: Theory and Applications*, First Edition, John Wiley & Sons, 2016.

Divya A, Reddy P.B.A. (2022). Electro-magneto-hydrodynamic unsteady flow with entropy generation and hall current of hybrid nanofluid over a rotating disk: An application in hyperthermia therapeutic aspects. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*.

<https://doi.org/10.1177/09544062221076294>

Drost, M.K. & Zaworski, J.R. (1989). Review of second law analysis techniques applicable to the Energy Conversion and Utilization Technologies Thermal Sciences Program, report; Richland, Washington.

<https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc1109458/>

Dufrasne, G. (2017-2018). Etude numérique de la convection de Rayleigh-Bénard dans une cavité cubique, Mémoire de Master, Ecole Polytechnique de Louvain (Belgique).

Dutta, S., Bhattacharyya, S., Pop, I. (2023). Effect of hybrid nanoparticles on conjugate mixed convection of a viscoplastic fluid in a ventilated enclosure with wall mounted heated block, *Alexandria Engineering Journal*, **62**, 99-111.

De Vahl Davis, G. (1983). Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3(3).
<https://doi.org/10.1002/flid.1650030305>

Dhahad, H. A., Al-Sumaily, G. F., Habeeb, L. J., & Thompson, M. C. (2020). The Cooling Performance of Mixed Convection in a Ventilated Enclosure With Different Ports Configurations. *Journal of Heat Transfer*, 142, 122601.

Erbay, L. B., Altaç, Z., Sülüş, B. (2003). An Analysis of the Entropy Generation in a Square Enclosure, *Entropy*, **5**, 496-505.

Erbay, L. B., Altaç, Z., Sülüş, B. (2004). Entropy generation in a square enclosure with partial heating from a vertical lateral wall, *Heat and Mass Transfer*, **40**, 909-918.

Ebrahimi, D., Yousefzadeh, S., Akbari, O. A., Montazerifar, F., Rozati, S. A., Nakhjavani, S., & Safaei, M. R. (2021). Mixed convection heat transfer of a nanofluid in a closed elbow-shaped cavity (CESC). *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*.
<https://doi.org/10.1007/s10973-021-10548-1>

Erbay, L. B., Altaç, Z., & Sülüş, B. (2003). An analysis of the entropy generation in a square enclosure. *Entropy*, 5(5 SPEC.), 496–505.
<https://doi.org/10.3390/e5050496>

Erbay, L. B., Altaç, Z., & Sülüş, B. (2004). Entropy generation in a square enclosure with partial heating from a vertical lateral wall. *Heat and Mass Transfer/Waerme- Und Stoffuebertragung*, 40(12), 909–918.
<https://doi.org/10.1007/S00231-003-0497-x>

Evgrafova, A., & Sukhanovskii, A. (2019). Specifics of heat flux from localized heater in a cylindrical layer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 135, 761–768.

Evgrafova, A., & Sukhanovskii, A. (2021). Dependence of boundary layer thickness on layer height for extended localised heaters. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 121, 110275.

Farah, Z., and Sabeur, A. (2022). CFD-Based Analysis of Entropy Generation on Laminar Natural Convection in Enclosures with Partitioned Walls and for Different Heating Positions. *ASME. J. Heat Transfer*, **144**: 062601.

Ghalambaz, M., Hashem Zadeh, S.M., Veismoradi, A., Sheremet, M.A., Pop, I. (2021). Free Convection Heat Transfer and Entropy Generation in an Odd-Shaped Cavity Filled with a Cu-Al₂O₃ Hybrid Nanofluid, *Symmetry*, **13**, 122.

Ghalambaz, M., & Jun Zhang, J. (2020). Conjugate solid-liquid phase change heat transfer in heatsink filled with phase change material-metal foam. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 146, 118832.

Ghalambaz, M., Mehryan, S. A. M., Hajjar, A., & Veismoradi, A. (2020). Unsteady natural convection flow of a suspension comprising Nano-Encapsulated Phase Change Materials (NEPCMs) in a porous medium. *Advanced Powder Technology*, 31 (3), 954–966.

Ghalambaz, M., Zadeh, S. M. H., Mehryan, S. A. M., Pop, I., & Wen, D. S. (2020). Analysis of melting behavior of PCMs in a cavity subject to a non-uniform magnetic field using a moving grid technique. *Applied Mathematical Modelling*, 77 (2), 1936–1953.

Ghisu, T., Cambuli, F., Puddu, P., Mandas, N., Seshadri, P., Parks, G.T. (2018) Numerical evaluation of entropy generation in isolated airfoils and Wells turbines. *Meccanica* **53**, 3437-3456.

Goodarzi, M., Safaei, M. R., Oztop, H.F., Karimipour, A., Sadeghinezhad, E., Dahari, M., Kazi, S.N., and Jomhari, N. (2014). Numerical Study of Entropy Generation due to Coupled Laminar and Turbulent Mixed Convection and Thermal Radiation in an Enclosure Filled with a Semitransparent Medium, *The Scientific World Journal*, Article ID 761745
<https://doi.org/10.1155/2014/761745>

Goyal, R., Reddy, K.S. (2022). Numerical investigation of entropy generation in a solar parabolic trough collector using supercritical carbon dioxide as heat transfer fluid, *Applied Thermal Engineering*, **208**, 118246.

Hajatzadeh Pordanjani, A., Aghakhani, S., Karimipour, A., Afrand, M., Goodarzi, M. (2019). Investigation of free convection heat transfer and entropy generation of nanofluid flow inside a cavity affected by magnetic field and thermal radiation. *J Therm Anal Calorim*, **137**, 997-1019.

Hamzah, H.K., Ali, F.H., Hatami, M. (2022). MHD mixed convection and entropy generation of CNT- water nanofluid in a wavy lid- driven porous enclosure at different boundary conditions, *Scientific Reports*, **12**:2881

Hashemi-Tilehnoee, M., Palomo del Barrio, E., Seyyedi, S. M. (2022). Magneto-turbulent natural convection and entropy generation analyses in liquid sodium-filled cavity partially heated and cooled from sidewalls with circular blocks, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **134**, 106053

Hassen, W., Selimefendigil, F., Ben Khedher, N., Kolsi, L., Borjini, M.N., and Alresheedi, F. (2021). Control of Magnetohydrodynamic Mixed Convection and Entropy Generation in a Porous Cavity by Using Double Rotating Cylinders and Curved Partition, *ACS Omega*, **6**, 35607-35618.

Herwig, H. (2012). The role of entropy generation in momentum and heat transfer. *J. Heat Transf.* **134**: 031003.

Hoseinpour, B., Ashorynejad, H. R., Javaherdeh, K. (2017). Entropy Generation of Nanofluid in a Porous Cavity by Lattice Boltzmann Method, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **31**, 1-8.

Huminic, G., Huminic, A. (2020). Entropy generation of nanofluid and hybrid nanofluid flow in thermal systems: A review, *Journal of Molecular Liquids*, **302**, 112533.

Hussain, S.M. (2022). Dynamics of radiative Williamson hybrid nanofluid with entropy generation: significance in solar aircraft. *Scientific Reports*, **12**, 8916.

Hussain, S., Pour, M.S., Jamal, M., Armaghani, T. (2022). MHD Mixed Convection and Entropy Analysis of Non-Newtonian Hybrid Nanofluid in a Novel Wavy Elbow-Shaped Cavity with a Quarter Circle Hot Block and a Rotating Cylinder, *Experimental Techniques* (2022). <https://doi.org/10.1007/s40799-022-00549-6>

Hussain, S., Zeeshan, M., Sagheer, D.-e-S. (2022). Irreversibility analysis for the natural convection of Casson fluid in an inclined porous cavity under the effects of magnetic field and viscous dissipation, *International Journal of Thermal Sciences*, **179**, 107699.

Ilis, G.M., Mobedi, M., Sunden, B. (2008). Effect of aspect ratio on entropy generation in a rectangular cavity with differentially heated vertical walls. *International Communication in Heat Mass Transfer*, **35**, 96-703.

Ishak, M.S., Alsabery, A.I., Ishak, H., Chamkha, A.J. (2021). Entropy production and mixed convection within trapezoidal cavity having nanofluids and localised solid cylinder, *Scientific Reports*, **11**:14700.

Ismael, M.A., Armaghani, T., Chamkha, A. J. (2016). Conjugate heat transfer and entropy generation in a cavity filled with a nanofluid-saturated porous media and heated by a triangular solid, *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, **59**, 138–151.

Jakeer S., Reddy P.B.A. (2022). Entropy generation on the variable magnetic field and magnetohydrodynamic stagnation point flow of Eyring–Powell hybrid dusty nanofluid: Solar thermal application. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. <https://doi.org/10.1177/09544062211072457>

Jassim, H. M., Ali, F. H., Al-Amir, Q. R., Hamzah, H. K., Khafaji, S. O. W. (2019). Entropy Generation Analysis of a Natural Convection inside a Sinusoidal Enclosure with Different Shapes of Cylinders, *Frontiers in Heat and Mass Transfer*, **12**, 22.

Jatau, T., Bello-Ochende, T. (2022). Numerical investigation and entropy generation for flow boiling evaporation in U-bend tube heat exchanger with elliptical and circular cross-sections, *Thermal Science and Engineering Progress*, (35), 101480.

Javed, M.F, Waqas, M., Khan, N.B., Muhammad, R., Ur Rehman, M., Khan, M.I, Khan, S.W, Hassan, M.T. (2019) On entropy generation effectiveness in flow of power law fluid with cubic autocatalytic chemical reaction, *Applied Nanoscience* **9**, 1205–1214.

Jin, Y. (2017). Second-Law Analysis: A Powerful Tool for Analyzing Computational Fluid Dynamics (CFD) Results. *Entropy*, **19**, 679.

Kaluri, R.S., Basak T. (2011a). Analysis of entropy generation for distributed heating in processing of materials by thermal convection, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **54**, 2578–2594

Kaluri, R.S., Basak T. (2011b) Entropy generation due to natural convection in discretely heated porous square cavities, *Energy*, **36**, 5065-5080.

Kaluri, R.S., Basak T. (2011c) Role of entropy generation on thermal management during natural convection in porous square cavities with distributed heat sources, *Chemical Engineering Science*, **66** 2124–2140.

Karki, P., Perumal, D.A. & Yadav, A.K. (2022). Comparative studies on air, water and nanofluids based Rayleigh–Benard natural convection using lattice Boltzmann method: CFD and exergy analysis. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, **147**, 1487–1503.

Khan, D., Kumam, P., Wathayu, W., Khan, I. (2022). Heat transfer enhancement and entropy generation of two working fluids of MHD flow with titanium alloy nanoparticle in Darcy medium. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*.
<https://doi.org/10.1007/s10973-022-11284-w>

Khan, F., Xiao-Dong, Y., Aamir, N., Saeed, T., Ibrahim, M. (2021). The effect of radiation on entropy and heat transfer of MHD nanofluids inside a quarter circular enclosure with a changing L-shaped source: lattice Boltzmann methods, *Chemical Engineering Communications*.
<https://doi.org/10.1080/00986445.2021.1990887>

Khorasanizadeh, H., Amani, J., Nikfar, M. (2012). Numerical investigation of Cu-water Nano fluid natural convection and entropy generation within a cavity with an embedded conductive baffle, *Scientia Iranica Transactions F, Nanotechnology*, **19**, 1996-2003.

Kolsi, L, Hussein, A.H., Borjini, M.N., Mohammed, H. A., Ben Aïssia, H. (2014). Computational Analysis of Three-Dimensional Unsteady Natural Convection and Entropy Generation in a Cubical Enclosure Filled with Water-Al₂O₃ Nanofluid, *Arabian Journal for Science and Engineering*, **39**, 7483–7493.

Kolsi, L. (2016). MHD Mixed Convection and Entropy Generation in a 3D Lid-Driven Cavity, *Frontiers in Heat and Mass Transfer*, **7**, 26

Kolsi, L., Oztop, H.F., Abu-Hamdeh, N., Alghamdi, A., Borjini, M.N. (2016) Three Dimensional Analysis of Natural Convection and Entropy Generation in a Sharp Edged Finned Cavity, *Alexandria Engineering Journal*, **55**, 991–1004.

Korei, Z., Benissaad, S. (2021). Entropy generation of a hybrid nanofluid on MHD mixed convection in a lid-driven cavity with partial heating having two rounded corners, *E3S Web of Conferences*, **321**, 02004.

Korpyś, M., Gancarczyk, A., Iwaniszyn, M., Sindera, K., Jodłowski, P.J., Kołodziej, A. (2020) Analysis of Entropy Production in Structured Chemical Reactors: Optimization for Catalytic Combustion of Air Pollutants. *Entropy*.**22**:1017

Kumar, K., Kumar, R., Bharj, R.S. (2020). Entropy generation analysis due to heat transfer and nanofluid flow through microchannel: a review, *Int. J. Exergy*, **31**, 49-86.

Kumar, P., Saha, S.K, Sharma, A. (2022). Entropy generation minimization-based heat transfer and mass transfer study of rectangular packed-bed filled with spherical particles, *Fusion Engineering and Design*, (**184**), 113295.

Kumar, V., Krishna Murthy, S.V.S.S.N.V.G., Rathish Kumar, B.V. (2023). Multi-force effect on fluid flow, heat and mass transfer, and entropy generation in a stratified fluid-saturated porous enclosure, *Mathematics and Computers in Simulation*, **203**, 328-367.

Kumawat, C., Sharma, B.K., Al-Mdallal, Q.M., Rahimi-Gorji, M. (2022). Entropy generation for MHD two-phase blood flow through a curved permeable artery having variable viscosity with heat and mass transfer, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **133**, 105954.

Kawamura, T., Takami, H., Kuwahara, K. (1985). New higher order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations. Ninth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. *Lecture Notes in Physics*, **218**, 291-295.

Laidoudi, H., Abderrahmane, A., Mohammed Saeed, A., Guedri, K., Weera, W., Younis, O., Mourad, A. and Marzouki, R. (2022). Irreversibility Interpretation and MHD Mixed Convection of Hybrid Nanofluids in a 3D Heated Lid-Driven Chamber, *Nanomaterials*, **12**, 1747.

Li, H., Wang, X., Huang, H., Ning, J., Li, A., Tu, J. (2022). Numerical study on the effect of superheat on the steam ejector internal flow and entropy generation for MED-TVC desalination system, *Desalination*, **537**, 115874.

Li, Y., Rico Cortes, L.F., Hamel, H., Nishad, K., Biondo, L., Ries, F. (2022). Prediction of Heat Transfer and Fluid Flow Effects on Entropy Generation in a Monolithic Catalytic Converter Using Large-Eddy Simulation. *Entropy*, **24**, 602.

López-Núñez, O.A., Alfaro-Ayala, J. A., Ramírez-Minguela, J.J., Cano-Banda, F, Ruiz-Camacho, B., Manuel Belman-Flores, J. (2022). Numerical analysis of the thermo-hydraulic performance and entropy generation rate of a water-in-glass evacuated tube solar collector using TiO₂ water-based nanofluid and only water as working fluids, *Renewable Energy*, Article in Press.

<https://doi.org/10.1016/j.renene.2022.07.156>

Mabood, F., Suriya Uma Devi, S., Khan, W. A., Prakash, M. & Jamshed, W. (2021). Irreversibility in triple diffusion stream over porous medium plate with radiation and joule heating, *Chemical Engineering Communications*.

<https://doi.org/10.1080/00986445.2021.1998011>

Magherbi, M., Abbassi, H., Brahim, A. B. (2003). Entropy Generation at the Onset of Natural Convection, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **46**, 3441-3450.

Mahian, O., Kianifar, A., Kleinstreuer, C., Al-Nimr, M.A, Pop, I., Sahin, A. Z, Wongwises, S. (2013). A review of entropy generation in nanofluid flow, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **65**, 514–532.

Mahmoud, Emad E., Algehyne, Ebrahim A., Alqarni, M. M., Afzal, Asif, & Muhammad Ibrahim (2021). Investigating the thermal efficiency and pressure drop of a nanofluid within a micro heat sink with a new circular design used to cool electronic equipment, *Chemical Engineering Communications*.

<https://doi.org/10.1080/00986445.2021.1935254>

Maneengam, A., Bouzennada, T., Abderrahmane, A., Ghachem, K., Kolsi, L., Younis, O., Guedri, K., Weera, W. (2022). Numerical Study of 3D MHD Mixed Convection and Entropy Generation in Trapezoidal Porous Enclosure Filled with a Hybrid Nanofluid: Effect of Zigzag Wall and Spinning Inner Cylinder. *Nanomaterials*, **12**, 1974.

Mansour, M.A., Ahmed, S.E. and Chamkha, A.J. (2017). Entropy generation optimization for MHD natural convection of a nanofluid in porous media-filled enclosure with active parts and viscous dissipation, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, **27**, 379-399.

Maougal, A., and Bessaïh, R. (2013). Heat Transfer and Entropy Analysis for Mixed Convection in a Discretely Heated Porous Square Cavity, *Fluid Dynamics & Materials Processing*, **9**, 35-59.

Mayeli, P., Sheard, G.J. (2021). Natural convection and entropy generation in square and skew cavities due to large temperature differences: A Gay–Lussac-type vorticity stream-function approach, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **93**, 2396-2420.

Mehdizadeh-Fard, M., Pourfayaz, F., Maleki, A. (2021) Exergy analysis of multiple heat exchanger networks: An approach based on the irreversibility distribution ratio, *Energy Reports* **7**, 174-193.

Mehryan, S.A.M., Izadi, M., Chamkha, A. J., Sheremet, M. A. (2018). Natural convection and entropy generation of a ferrofluid in a square enclosure under the effect of a horizontal periodic magnetic field, *Journal of Molecular Liquids*, **263**, 510-525.

Mehta, S.K., Mondal, P.K. (2022). Free convective heat transfer and entropy generation characteristics of the nanofluid flow inside a wavy solar power plant. *Microsyst Technol.*
<https://doi.org/10.1007/s00542-022-05348-y>.

Mendu, S.S., Nagaraju, D. (2022). Minimization of entropy generation in natural convection using optimum isothermal heaters: CFD analysis. *Int. J. Environ. Sci. Technol.*
<https://doi.org/10.1007/s13762-022-04198-5>

- Michalek, T., Kowalewski, T.A. and Šarler, B. (2005). Natural convection for anomalous density variation of water: numerical benchmark, *Progress in Computational Fluid Dynamics*, **5**, 158–170.
- Mliki, B., Abbassi, M.A. (2021). Entropy generation of MHD natural convection heat transfer in a heated incinerator using hybrid-nanoliquid, *Propulsion and Power Research*, **10**, 1-12
- Mondal, P., Mahapatra, T. R. (2021). MHD double-diffusive mixed convection and entropy generation of nanofluid in a trapezoidal cavity, *International Journal of Mechanical Sciences*, **208**, 106665.
- Mondal, P., Mahapatra, T. R., Parveen, R. (2021). Entropy generation in nanofluid flow due to double diffusive MHD mixed convection, *Helvion* **7**, e06143.
- Moon, J.Y. Chung, B.J. (2019). Influence of Prandtl number, height and lateral cooling condition on laminar natural convection in a rectangular enclosure. *Heat Mass Transfer*, **55**, 1593–1605.
- Mourad, A., Abderrahmane, A., Younis, O., Marzouki, R., Alazzam, A. (2022). Numerical Simulations of Magneto hydrodynamics Natural Convection and Entropy Production in a Porous Annulus Bounded by Wavy Cylinder and Koch Snowflake Loaded with Cu–Water Nanofluid. *Micromachines*. **13**:182.
- Mukherjee, S., Aljuwayhel, N.F., Bal, S., Mishra, P.C., Ali, N. (2022). Modelling, Analysis and Entropy Generation Minimization of Al₂O₃-Ethylene Glycol Nanofluid Convective Flow inside a Tube. *Energies*, **15**, 3073.
- Nadeem, S., Qadeer, S., Akhtar, S., Almutairi, S., Wang, F. (2022). Mathematical model of convective heat transfer for peristaltic flow of Rabinowitsch fluid in a wavy rectangular duct with entropy generation, *Physica Scripta*. (Accepted Manuscript)
<https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac6d88>
- Naterer, G. F., Camberos, J. A. (2003). Entropy and the Second Law Fluid Flow and Heat Transfer Simulation", *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, **17**, 360-371.
- Nayak, R. K., Bhattacharyya, S., Pop, I. (2015) Numerical study on mixed convection and entropy generation of Cu–water nanofluid in a differentially heated skewed enclosure, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **85**, 620-634.
- Nayak, R. K., Bhattacharyya, S., Pop, I. (2016). Numerical Study on Mixed Convection and Entropy Generation of a Nanofluid in a Lid-Driven Square Enclosure, *Journal of Heat Transfer*, **138** / 012503-1
- Nejad, S.Z., Keshtkar, M. M. (2017). Entropy Generation Analysis of Natural Convection in Square Enclosures with Two Isoflux Heat Sources, *Engineering, Technology & Applied Science Research*, **7**, 1486-1495.
- Nishad, S., Bhargava, R. (2022). Entropy Generation Parallel Analysis and Optimised Efficiency of a Wavy Solar Collector, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, DOI: [10.1080/10618562.2022.2123108](https://doi.org/10.1080/10618562.2022.2123108).

Nouanegué, H.F. (2008). Etude du transfert thermique conjugué dans les cavités rectangulaires en convection naturelle, Thèse « Philosophiae Doctor ». Ecole Polytechnique de Montréal (Canada)

O'Connell, J. P. (2018). Chemical process systems analysis using thermodynamic balance equations with entropy generation. Revaluation and extension, *Comp. & Chem. Eng.* **111**, 37-42.

Öğüt, E. B. (2019). Second Law Analysis of Mixed Convection of Magneto hydrodynamic Flow in an Inclined Square Lid-driven Enclosure, *Journal of Thermal Engineering*, **5**, 240-251

Olanrewaju, A.M., Salawu, S.O., Olanrewaju, P.O., Amoo, S.A. (2021). Unsteady radiative magnetohydrodynamic flow and entropy generation of maxwell nanofluid in a porous medium with arrhenius chemical kinetic, *Cogent Engineering*, **8**:1, 1942639.

Oliveski, R. D. C., Macagnan, M. H., Copetti, J. B. (2009). Entropy generation and natural convection in rectangular cavities, *Applied Thermal Engineering*, **29**, 1417-1425.

Oztop, H.F., Al-Salem, K. (2012). A review on entropy generation in natural and mixed convection heat transfer for energy systems, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **16**, 911-920.

Oztop, H.F., Almeshaal, M. A., Kolsi, L., Rashidi, M. M., and Ali, M. E. (2019). Natural Convection and Irreversibility Evaluation in a Cubic Cavity with Partial Opening in Both Top and Bottom Sides, *Entropy*, **21**, 116.

Parvin, S., Chamkha, A.J. (2014). An analysis on free convection flow, heat transfer and entropy generation in an odd-shaped cavity filled with nanofluid, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **54**, 8–17.

Patil, P.M, Latha, D.N., Chamkha, A.J. (2019). Non-similar Solutions of MHD Mixed Convection over an Exponentially Stretching Surface: Influence of Non-uniform Heat Source or Sink, *J. Appl. Comput. Mech.*, **7**, 1334-1347.

Parveen, R., Mahapatra, T. R. (2022) Heat and mass source effect on MHD double-diffusive mixed convection and entropy generation in a curved enclosure filled with nanofluid, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, **27**, 308–330.

Rahman, A., Redwan, D.A., Thohura, S., Kamrujjaman, Md., Mamun Molla, Md. (2022). Natural convection and entropy generation of non-Newtonian nanofluids with different angles of external magnetic field using GPU accelerated MRT-LBM, *Case Studies in Thermal Engineering*, **30**, 101769.

Rahmanian, S., Rahmanian Koushkaki, H., Shahsavari, A. (2022). Numerical assessment on the hydrothermal behaviour and entropy generation characteristics of boehmite alumina nanofluid flow through a concentrating photovoltaic/thermal system considering various shapes for nanoparticle, *Sustainable Energy Technologies and Assessments*, **52**, Part B, 102143.

- Rashad, A.M., Armaghani, Chamkha A.J., Mansour, M. A. (2018). Entropy generation and MHD natural convection of a nanofluid in an inclined square porous cavity: Effects of a heat sink and source size and location, *Chinese Journal of Physics*, **56**, 193–211.
- Rasool, G., Saeed, A.M., Lare, A.I., Abderrahmane, A., Guedri, K., Vaidya, H., Marzouki, R. (2022). Darcy-Forchheimer Flow of Water Conveying Multi-Walled Carbon Nanoparticles through a Vertical Cleveland Z-Staggered Cavity Subject to Entropy Generation. *Micromachines*, **13**, 744.
- Rathnam, V. M., Biswal, P., Basak, T. (2016a). Analysis of entropy generation during natural convection within entrapped porous triangular cavities during hot or cold fluid disposal, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **69**, 931-956.
- Rathnam, V. M., Roy M., Basak, T. (2016b). Analysis of entropy generation during natural convection in tilted triangular enclosures with various base angles, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **69**, 1332-1354.
- Rosen, M.A. (1999). Second-law analysis: approaches and implications, *Int. J. Energy Res.* **23**, 415–429.
- Roy, M., Roy, S., Basak, T. (2015a). Analysis of entropy generation on mixed convection in square enclosures for various horizontal or vertical moving wall(s), *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **68**, 258–266.
- Roy, M., Basak, T., Roy, S., Pop, I. (2015b). Analysis of Entropy Generation for Mixed Convection in a Square Cavity for Various Thermal Boundary Conditions, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **68**, 44-74.
- Roy, M., Basak, T., Roy, S. (2015c) Analysis of Entropy Generation During Mixed Convection in Porous Square Cavities: Effect of Thermal Boundary Conditions, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, **68**, 925-957.
- Saffari, P.R., Salarian, H., Lohrasbi, A., and Salehi, G. (2021) Entropy Generation Analysis of a Thermal Cracking Reactor, *ACS Omega*, **6**, 6335–6347.
- Saffarzadeh, H., Djavareshkian, M.H. (2021). A numerical study of the entropy generation and heat transfer rate of airflow around a NACA 0015 airfoil subjected to an external magnetic field, *Phys. Scr.* **96**, 055708.
- Said, K., Ouadha, A., Sabeur, A. (2022). CFD-based analysis of entropy generation due to mean and fluctuating fields during turbulent natural convection in a square enclosure, *Heat Transfer*, <https://doi.org/10.1002/htj.22686>
- Sanjib Kr Pal, Bhattacharyya, S. (2017). Conjugate Mixed Convection Heat Transfer and Entropy Generation of Cu-Water Nanofluid in an Enclosure with Thick Wavy Bottom Wall, *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, **11**, No: 4.
- Sarmiento-Laurel, C., Cardemil, J.M., & Calderón-Muñoz, W.R. (2022). Local entropy generation model for numerical CFD analysis of fluid flows through porous media, under

laminar and turbulent regimes, *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, **16**, 804-825.

Sauerheber, R. (2018). Thermodynamics and Entropy in Natural and Artificial Systems, *American Research Journal of Chemistry*, **2**, 1-26.

Seyyedi, S. M., Dogonchi, A.S., Hashemi-Tilehnoee, M., Waqas, M., Ganji, D. D. (2020). Investigation of entropy generation in a square inclined cavity using control volume finite element method with aided quadratic Lagrange interpolation functions, *International Communications in Heat and Mass Transfer* **110**, 104-398.

Sciacovelli, A., Verda, V., Sciubba, E. (2015). Entropy generation analysis as a design tool - A review, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **43**, 1167-1181.

Shahsavari, A., Farhadi, P., Yıldız, Ç, Moradi, M., Arici, M. (2022). Evaluation of entropy generation characteristics of boehmite-alumina nanofluid with different shapes of nanoparticles in a helical heat sink, *International Journal of Mechanical Sciences*, 107338 (article in Press) <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2022.107338>

Shahzad, M. H., Awan, A. U., Akhtar, S. and Nadeem, S. (2022). Entropy and stability analysis on blood flow with nanoparticles through a stenosed artery having permeable walls, *Science Progress*, **105**, 1–34

Shavik, S. M., Nasim Hassan, M., Monjur Morshed, A. K. M., Quamrul Islam, M. (2014). Natural convection and entropy generation in a square inclined cavity with differentially heated vertical walls. *Procedia Engineering* **90**, 557-562.

Sheremet, M.A., Grosan, T., and Pop, I. (2017). Natural Convection and Entropy Generation in a Square Cavity with Variable Temperature Side Walls Filled with a Nanofluid: Buongiorno's Mathematical Model, *Entropy*, **19**, 337.

Shirani, N., Toghraie, D. (2021). Numerical investigation of transient mixed convection of nanofluid in a cavity with non-Darcy porous inner block and rotating cylinders with harmonic motion, *Scientific Reports*, **11**:17281.

Sivanandam S., Chamkha A.J., M. Mallawi, F.O., Alghamdi, M.S., Alqahtani, A.M. (2020). Effects of Entropy Generation, Thermal Radiation and Moving-Wall Direction on Mixed Convective Flow of Nanofluid in an Enclosure. *Mathematics*, **8**:1471.

Souayeh, B., Hammami, F., Hdhiri, N., Waqas-Alam, M., Yasin, E., Abuzir, A. (2021). Simulation of natural convective heat transfer and entropy generation of nanoparticles around two spheres in horizontal arrangement, *Alexandria Engineering Journal*, **60**, 2583-2605.

Sudarsana Reddy, P., Sreedevi, P., Nageswara Reddy, V. (2022). Entropy generation and heat transfer analysis of magnetic nanofluid flow inside a square cavity filled with carbon nanotubes, *Chemical Thermodynamics and Thermal Analysis* **6**, 100045.

- Varol, Y., Oztop, H.F., Koca, A. (2008a). Entropy generation due to conjugate natural convection in enclosures bounded by vertical solid walls with different thicknesses, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **35**, 648–656.
- Varol, Y., Oztop, H.F., Koca, A. (2008b). Entropy production due to free convection in partially heated isosceles triangular enclosures, *Applied Thermal Engineering*, **28**, 1502–1513.
- Varol Y., Oztop, H.F., Pop I. (2009). Entropy generation due to natural convection in nonuniformly heated porous isosceles triangular enclosures at different positions, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **52**, 1193–1205
- Xamán, J., Arce, J., Álvarez, G., Chávez, Y. (2008). Laminar and turbulent natural convection combined with surface thermal radiation in a square cavity with a glass wall, *International Journal of Thermal Sciences* **47**, 1630-1638.
- Yang, X., Shao, Q., Hoteit, H., Carrera, J., Younes, A., Fahs, M. (2021). Three-dimensional natural convection, entropy generation and mixing in heterogeneous porous medium, *Advances in Water Resources*, **155**, 103992.
- Yejjer, O., Kolsi, L., Abdullah A.A.A. Al-Rashed, A., Aydi, A., Borjini1, M. N., Ben Aissia H. (2017). Numerical analysis of natural convection and entropy generation in a 3D partitioned cavity, *International Journal of Heat and Technology*, **35**, 933-943.
- Yusuf, T.A., Naveen Kumar, R., Punith Gowda, R. J. & Akpan, U. D. (2022). Entropy generation on flow and heat transfer of a reactive MHD Sisko fluid through inclined walls with porous medium, *International Journal of Ambient Energy*.
<https://doi.org/10.1080/01430750.2021.2013941>
- Yousefzadeh, S., Eskandari, M., Farnaz Montazerifar, F., Akbari, O. A., Kahbandeh, F., Khalili, M., Baghaei, S. (2022). Natural convection of Water/MWCNT nanofluid flow in an enclosure for investigation of the first and second laws of thermodynamics, *Alexandria Engineering Journal*, **61**, 11687–11713
- Zahor, F.A., Jain, R., Ali, A.O. and Masanja, V.G. (2022), Modeling entropy generation of magneto hydrodynamics flow of Nano fluid in a porous medium: a review, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. ahead-of-print No. ahead-of-print.
<https://doi.org/10.1108/HFF-05-2022-0266>
- Zemani, F., and Sabeur, A. (2022). Computational Fluid Dynamics-Based Analysis of Entropy Generation on Laminar Natural Convection in Enclosures With Partitioned Walls and for Different Heating Positions. *ASME. J. Heat Transfer*. **144**, 062601.

LISTE DES ANNEXES

ANNEX A

COMMENT ON OBTIENT L'ÉQUATION DE LA VORTICITÉ

1. Dérivation de l'équation de la vorticité

1.1. Equation de quantité de mouvement

1.1.1. Suivant la direction X

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.1})$$

1.1.2. Suivant la direction Y

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \theta \quad (\text{A.2})$$

En dérivant de l'équation (A.1) par rapport à Y et l'équation (A.2) par rapport à X, nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \cdot \partial Y} = U \frac{\partial^2 U}{\partial X \cdot \partial Y} + \frac{\partial U}{\partial Y} \times \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{\partial V}{\partial Y} \times \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial X \cdot \partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \times \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \cdot \partial X} = U \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \times \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial^2 V}{\partial Y \cdot \partial X} + \frac{\partial V}{\partial X} \times \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial^2 P}{\partial X \cdot \partial Y} + \frac{1}{\text{Re}} \times \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \times \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (\text{A.4})$$

La soustraction de l'équation (A.3) de l'équation (A.4) nous donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \tau \cdot \partial X} - \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \cdot \partial Y} \right) + U \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial X \cdot \partial Y} \right) + V \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y \cdot \partial X} - \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) = & -\frac{\partial^2 P}{\partial X \cdot \partial Y} + \frac{\partial^2 P}{\partial X \cdot \partial Y} \\ & + \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right\} \\ & - \left\{ \frac{\partial U}{\partial X} \times \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \times \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial X} \times \frac{\partial V}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial Y} \times \frac{\partial U}{\partial Y} \right\} + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \times \frac{\partial \theta}{\partial X} \end{aligned}$$

En réorganisant les termes convectifs et en tenant compte de l'équation de continuité, nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + U \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + V \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2}{\partial X^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left(\frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \right) + \frac{Gr}{\text{Re}^2} \times \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

D'autre part la vorticité est défini par : $\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$ et le nombre de Richardson est : $Ri = \frac{Gr}{\text{Re}^2}$

En substituant par ses formules dans l'équation (A.5), nous obtenons :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + Ri \frac{\partial \theta}{\partial X}$$

ANNEXE B

DISCRÉTISATION DU TERME CONVECTIF $(U \frac{\partial \varphi}{\partial X} ; V \frac{\partial \varphi}{\partial Y})$ 1. Discrétisation du terme convectif $(U \frac{\partial \varphi}{\partial X} ; V \frac{\partial \varphi}{\partial Y})$

Pour discrétiser les termes convectifs figurants dans le système d'équations à résoudre, nous avons choisi un schéma Upwind du 3^{ème} ordre.

1.1. Schéma Upwind 3^{ème} ordre

Considérant le développement en séries de Taylor d'une variable dépendante φ négligeant les termes d'ordre supérieur à deux. Selon le sens d'écoulement, le schéma Upwind 3^{ème} ordre est représenté comme suit :

1.1.1. Pour $U > 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U > 0} = \frac{1}{3} \left[2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{centrale} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{arriere} \right]$$

1.1.2. Pour $U < 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{Upwind}^{U < 0} = \frac{1}{3} \left[2 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{centrale} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{avant} \right]$$

1.2. Différence centrale

Différence centrale :

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \quad (B.1)$$

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \quad (B.2)$$

Pour éliminer la dérivée seconde, en multipliant (B.1) par (ΔX_{i-1}^2) et (B.2) par $(-\Delta X_i^2)$

$$\begin{cases} \Delta X_{i-1}^2 \times \varphi_{i+1} = -\Delta X_{i-1}^2 \times \varphi_i + \Delta X_i \times \Delta X_{i-1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ -\Delta X_i^2 \times \varphi_{i-1} = -\Delta X_i^2 \times \varphi_i + \Delta X_{i-1} \times \Delta X_i^2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \end{cases}$$

$$\Delta X_{i-1}^2 \times \varphi_{i+1} - \Delta X_i^2 \times \varphi_{i-1} = (\Delta X_{i-1}^2 - \Delta X_i^2) \varphi_i + \Delta X_i \times \Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1} + \Delta X_i) \frac{\partial \varphi}{\partial X}$$

Prenant : $SX_i = \Delta X_{i-1} + \Delta X_i$

$$\Delta X_i \times \Delta X_{i-1} \times SX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} = -\Delta X_i^2 \times \varphi_{i-1} - (\Delta X_{i-1}^2 - \Delta X_i^2) \varphi_i + \Delta X_{i-1}^2 \times \varphi_{i+1}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{centrale} = -\frac{\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i + \frac{\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1} \quad (\text{A})$$

1.3. Différence arrière

De façon analogue que la différence centrale :

Prenant : $SMX_i = \Delta X_{i-2} + \Delta X_{i-1}$

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \quad (\text{B.1})$$

$$\varphi_{i-2} = \varphi_i - SMX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \quad (\text{B.2})$$

Pour éliminer la dérivée seconde, en multipliant (B.1) par (SMX_i^2) et (B.2) par $(-\Delta X_{i-1}^2)$ et faire la sommation :

$$\left\{ \begin{array}{l} SMX_i^2 \varphi_{i-1} = SMX_i^2 \varphi_i - \Delta X_{i-1} \times SMX_i^2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ \quad \quad \quad \quad \quad + \\ -\Delta X_{i-1}^2 \times \varphi_{i-2} = -\Delta X_{i-1}^2 \varphi_i + SMX_i \times SMX_{i-1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \end{array} \right.$$

$$-\Delta X_{i-1}^2 \times \varphi_{i-2} + SMX_{i-1}^2 \varphi_{i-1} = (SMX_{i-1}^2 - \Delta X_{i-1}^2) \varphi_i - SMX_i \times \Delta X_{i-1} (SMX_i - \Delta X_{i-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial X}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{arrière} = \frac{\Delta X_{i-1}}{SMX_i \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-2} - \frac{SMX_i}{\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-1} + \frac{(SMX_i + \Delta X_{i-1})}{SMX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i \quad (\text{B})$$

1.4. Différence avant

De même :

$SPX_i = \Delta X_i + \Delta X_{i+1}$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \quad (\text{B.3})$$

$$\varphi_{i+2} = \varphi_i + SPX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \quad (\text{B.4})$$

Pour éliminer la dérivé seconde, en multipliant (B.3) par (SPX_i^2) et (B.4) par $(-\Delta X_i^2)$ et faire la sommation :

$$\left\{ \begin{array}{l} SPX_i^2 \varphi_{i+1} = SPX_i^2 \varphi_i - \Delta X_{i-1} \times SPX_i^2 \times \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ + \\ -\Delta X_i^2 \times \varphi_{i-2} = -\Delta X_{i-1}^2 \varphi_i + SMX_i \times SMX_{i-1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \end{array} \right.$$

$$-\Delta X_i^2 \times \varphi_{i+2} + SPX_i^2 \varphi_{i+1} = (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_i (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial \varphi}{\partial X}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{avant}} = \frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{SPX_i \times \Delta X_i} \varphi_i + \frac{SPX_i}{\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+1} - \frac{\Delta X_i}{SPX_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+2} \quad (C)$$

1.5. Points intérieurs

- **U>0 : i-2, i-1, i+1 :**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{arrière}} = \frac{\Delta X_{i-1}}{SMX_i \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-2} - \frac{SMX_i}{\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-1} + \frac{(SMX_i + \Delta X_{i-1})}{SMX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i \\ + \\ 2 \times \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} = -\frac{2\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1} \end{array} \right.$$

$$\frac{\Delta X_{i-1}}{SMX_i \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-2} - \left\{ \frac{SMX_i}{\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_{i-1}$$

$$+ \left\{ \frac{(SMX_i + \Delta X_{i-1})}{SMX_i \times \Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i+1}$$

- Nous avons pour U>0 : $\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{Upwind}}^{U>0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{arrière}} \right]$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{Upwind}}^{U>0} = \frac{\Delta X_{i-1}}{3SMX_i \times \Delta X_{i-2}} \varphi_{i-2} - \left\{ \frac{SMX_i}{3\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_{i-1}$$

$$+ \left\{ \frac{(SMX_i + \Delta X_{i-1})}{3SMX_i \times \Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1}$$

- **U<0 : i+2, i+1, i, i-1**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{avant}} = -\frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{SPX_i \times \Delta X_i} \varphi_i + \frac{SPX_i}{\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+1} - \frac{\Delta X_i}{SPX_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+2} \\ + \\ 2 \times \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} = -\frac{-2\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & \frac{-2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} - \left\{ \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} - \frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{SPX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_i \\ & + \left\{ \frac{SPX_i}{\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SP\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} \right\} \varphi_{i+1} - \frac{\Delta X_{i-1}}{SPX_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+2} \end{aligned}$$

- Nous avons pour $U < 0$: $\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{Upwind}}^{U < 0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{avant}} \right]$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{Upwind}}^{U < 0} &= -\frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \left\{ \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} - \frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{3SPX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_i + \\ & \left\{ \frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i+1}} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_{i+1} - \frac{\Delta X_i}{3SPX_i \times \Delta X_{i+1}} \varphi_{i+2} \end{aligned}$$

1.6.Récapitulation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{Upwind}}^{U > 0} = ai(i)\varphi_{i-2} + bpi(i)\varphi_{i-1} + cpi(i)\varphi_i + dpi(i)\varphi_{i+1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{Upwind}}^{U < 0} = bmi(i)\varphi_{i-1} + cmi(i)\varphi_i + dmi(i)\varphi_{i+1} + ei(i)\varphi_{i+2}$$

Avec :

$$ai(i) = \frac{\Delta X_{i-1}}{SMX_i \times \Delta X_{i-2}}$$

$$bpi(i) = -\left\{ \frac{SMX_i}{3\Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2}} + \frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$cpi(i) = \left\{ \frac{(SMX_i + \Delta X_{i-1})}{3SMX_i \times \Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$dpi(i) = \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i}$$

$$bmi(i) = \frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}}$$

$$cmi(i) = \left\{ \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} - \frac{(SPX_i + \Delta X_i)}{3SPX_i \times \Delta X_i} \right\}$$

$$dmi(i) = \left\{ \frac{SPX_i}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i+1}} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \right\}$$

$$ei(i) = -\frac{\Delta X_i}{3SPX_i \times \Delta X_{i+1}}$$

1.7. Points près des parois

Pour les points près les parois, on a établi in schéma Upwind du premier ordre comme suit :

- **U>0 : i-1 , i :**

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{\Delta X_{i-1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{arrière}} = -\frac{1}{\Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{1}{\Delta X_{i-1}} \varphi_i \\ + \\ 2 \times \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} = -\frac{2\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1} \end{array} \right.$$

$$-\left\{ \frac{1}{\Delta X_{i-1}} + \frac{2\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_{i-1} + \left\{ \frac{1}{\Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1}$$

- Nous avons pour U>0 : $\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U>0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{arrière}} \right]$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U>0} = -\left\{ \frac{1}{3\Delta X_{i-1}} + \frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_{i-1} + \left\{ \frac{1}{3\Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1}$$

- **U<0 : i-1 , i :**

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta X_i}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{avant}} = -\frac{1}{\Delta X_i} \varphi_i + \frac{1}{\Delta X_i} \varphi_{i+1} \\ 2 \times \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} = -\frac{2\Delta X_i}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_i + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \varphi_{i+1} \end{array} \right. +$$

$$-\frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i+1} + \left\{ -\frac{1}{\Delta X_i} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \left\{ \frac{1}{\Delta X_i} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{SX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_{i+1}$$

- Nous avons pour $U < 0$: $\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U < 0} = \frac{1}{3} \left[2 \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{centrale}} + \frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{\text{avant}} \right]$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U < 0} = -\frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \varphi_{i-1} + \left\{ -\frac{1}{3\Delta X_i} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\} \varphi_i + \left\{ \frac{1}{3\Delta X_i} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \right\} \varphi_{i+1}$$

1.8. Récapitulation

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U > 0} = bpi(i)\varphi_{i-1} + cpi(i)\varphi_i + dpi(i)\varphi_{i+1}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_{i=2}^{U < 0} = bmi(i)\varphi_{i-1} + cmi(i)\varphi_i + dmi(i)\varphi_{i+1}$$

Avec :

$$bpi(i) = -\left\{ \frac{1}{3\Delta X_{i-1}} + \frac{2\Delta X_i}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$cpi(i) = \left\{ \frac{1}{3\Delta X_{i-1}} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$dpi(i) = \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i}$$

$$dmi(i) = \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_{i-1}}$$

$$cmi(i) = \left\{ -\frac{1}{3\Delta X_i} + \frac{2(\Delta X_i - \Delta X_{i-1})}{3\Delta X_i \times \Delta X_{i-1}} \right\}$$

$$dmi(i) = \left\{ \frac{1}{3\Delta X_i} + \frac{2\Delta X_{i-1}}{3SX_i \times \Delta X_i} \right\}$$

1.9. Récapitulation :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{j=0}^{V>0} = b_{pj}(j)\varphi_{i-1} + c_{pj}(j)\varphi_j + d_{pj}(j)\varphi_{j+1}$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right|_{j=2}^{V<0} = b_{mj}(j)\varphi_{j-1} + c_{mj}(j)\varphi_j + d_{mj}(j)\varphi_{j+1}$$

Avec :

$$b_{pj}(j) = - \left\{ \frac{1}{3\Delta Y_{j-1}} + \frac{2\Delta Y_j}{3SY_j \times \Delta Y_{j-1}} \right\}$$

$$c_{pj}(j) = \left\{ \frac{1}{3\Delta Y_{j-1}} + \frac{2(\Delta Y_j - \Delta Y_{j-1})}{3\Delta Y_j \times \Delta Y_{j-1}} \right\}$$

$$d_{pj}(j) = \frac{2\Delta Y_{j-1}}{3SY_j \times \Delta Y_j}$$

$$b_{mj}(j) = \frac{2\Delta Y_j}{3SY_j \times \Delta Y_{j-1}}$$

$$c_{mj}(j) = \left\{ -\frac{1}{3\Delta Y_j} + \frac{2(\Delta Y_j - \Delta Y_{j-1})}{3\Delta Y_j \times \Delta Y_{j-1}} \right\}$$

$$d_{mj}(j) = \left\{ \frac{1}{3\Delta Y_j} + \frac{2\Delta Y_{j-1}}{3SY_j \times \Delta Y_j} \right\}$$

1.10. Généralisation

$$U = \begin{cases} U_p = \frac{1}{2}(U + |U|) \\ U_n = \frac{1}{2}(U - |U|) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U \frac{\partial \varphi}{\partial X} = & U_p a_i(i)\varphi_{i-2} + [U_p b_{pi}(i) + U_n b_{mi}(i)]\varphi_{i-1} + [U_p c_{pi}(i) + U_n c_{mi}(i)]\varphi_i \\ & + [U_p d_{pi}(i) + U_n d_{mi}(i)]\varphi_{i+1} + U_p e_i(i)\varphi_{i+2} \end{aligned}$$

Nous utilisons les mêmes étapes pour la discrétisation du terme convectif $(V \frac{\partial \varphi}{\partial Y})$ suivant la direction Y.

ANNEXE C

DISCRÉTISATION DU TERME DIFFUSIF $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}, \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2}\right)\right)$ 1. Discrétisation du terme diffusif $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}, \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2}\right)\right)$

Considérant le développement en séries de Taylor d'une variable dépendante ϕ négligeant les termes d'ordre supérieur à quatre. Le but d'augmenter l'ordre de dérivée est :

$$\varphi_{i+2} = \varphi_i + SPX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} + \frac{SPX_i^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\Delta X_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} + \frac{\Delta X_i^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}$$

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\Delta X_{i-1}^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} + \frac{\Delta X_{i-1}^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}$$

$$\varphi_{i-2} = \varphi_i - SMX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SMX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} + \frac{SMX_i^4}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}$$

Pour arriver à l'expression donnant la discrétisation du terme diffusif, trois étapes sont indispensables. L'étape de départ, pour but d'éliminer la dérivée quatrième $\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}\right)$, le second est l'élimination de la dérivée troisième $\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3}\right)$ et la dernière étape pour éliminer la dérivée première $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)$.

1.1.L'élimination de la dérivée quatrième $\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial X^4}\right)$

Multipliant l'équation (C.1) par $(-\Delta X_i^4)$ et l'équation (C.2) par (SPX_i^4) , nous allons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta X_i^4 \varphi_{i+2} = -\Delta X_i^4 \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_i^4 \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^4}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3 \times \Delta X_i^4}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \\ \phantom{-\Delta X_i^4 \varphi_{i+2}} + \\ SPX_i^4 \varphi_{i+1} = SPX_i^4 \varphi_i + SPX_i^4 \times \Delta X_i^4 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^4 \times \Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^4 \times \Delta X_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} -\Delta X_i^4 \varphi_{i+2} - SPX_i^4 \varphi_{i+1} &= (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) \varphi_i + SPX_i \times \Delta X_i (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \\ &\frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2}{2!} (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3 \times \Delta X_i^3}{3!} (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{aligned}$$

De la même façon pour (C.1) et (C.3) : Multipliant l'équation (C.1) par $(-\Delta X_{i-1}^4)$ et l'équation (C.2) par (SPX_i^4) , nous allons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta X_{i-1}^4 \varphi_{i+2} = -\Delta X_{i-1}^4 \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_{i-1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^4}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3 \times \Delta X_{i-1}^4}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \\ \phantom{-\Delta X_{i-1}^4 \varphi_{i+2}} + \\ SPX_i^4 \varphi_{i-1} = SPX_i^4 \varphi_i - SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} -\Delta X_{i-1}^4 \varphi_{i+2} - SPX_i^4 \varphi_{i-1} &= (SPX_i^4 - \Delta X_{i-1}^4) \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_{i-1} (SPX_i^3 + \Delta X_{i-1}^3) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \\ &\frac{SPX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} (SPX_i^2 - \Delta X_{i-1}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^3 \times \Delta X_{i-1}^3}{3!} (SPX_i - \Delta X_{i-1}) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{aligned}$$

Pour les deux équations (C.1) et (C.4) : Multipliant l'équation (C.1) par $(-SMX_i^4)$ et l'équation (C.4) par (SPX_i^4) , nous allons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -SMX_i^4 \varphi_{i+2} = -SMX_i^4 \varphi_i - SPX_i \times SMX_i^4 \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{SPX_i^2 \times SMX_i^4}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3 \times SMX_i^4}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \\ \phantom{-SMX_i^4 \varphi_{i+2}} + \\ SPX_i^4 \varphi_{i-2} = SPX_i^4 \varphi_i - SPX_i^4 \times SMX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^4 \times SMX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^4 \times SMX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} -SMX_i^4 \varphi_{i+2} - SPX_i^4 \varphi_{i-2} &= (SPX_i^4 - SMX_i^4) \varphi_i - SPX_i \times SMX_i (SPX_i^3 + SMX_i^3) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \\ &\frac{SPX_i^2 \times SMX_i^2}{2!} (SPX_i^2 - SMX_i^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} - \frac{SPX_i^3 \times SMX_i^3}{3!} (SPX_i + SMX_i) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \end{aligned}$$

1.2. L'élimination de la dérivée troisième $\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \right)$

Afin d'obtenir les trois équations mentionner (I), (II), (III), par la suite, éliminer la dérivée troisième $\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3}\right)$:

Multipliant l'équation (I) par $\left[\Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1})\right]$ et l'équation (II) par $\left[\Delta X_i^3 (SPX_i + \Delta X_i)\right]$ nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta X_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \varphi_{i+1} = \\ \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \varphi_i + SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + \Delta X_{i-1})}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \\ + \\ -\Delta X_{i-1}^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i+1} = \\ \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_{i-1}^4) (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_{i-1} \times \Delta X_i^3 (SPX_i^3 + \Delta X_{i-1}^3) (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_i^3 (SPX_i^2 - \Delta X_{i-1}^2) (SPX_i - \Delta X_i)}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} & -\Delta X_i^3 \times \Delta X_{i-1}^3 \left[\Delta X_i (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_{i-1} (SPX_i - \Delta X_i) \right] \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1}) \varphi_{i+1} \\ & + SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i+1} = \left[\Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i - \Delta X_{i-1}) + \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_{i-1}^4) (SPX_i - \Delta X_i) \right] \varphi_i \\ & + SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i-1} \left[\Delta X_{i-1}^2 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i - \Delta X_{i-1}) - \Delta X_i^2 (SPX_i^3 + \Delta X_{i-1}^3) (SPX_i - \Delta X_i) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\ & + \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \left[\Delta X_{i-1} (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_i (SPX_i^2 - \Delta X_{i-1}^2) (SPX_i - \Delta X_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \end{aligned}$$

De la même façon pour les équations (I) et (III) : Multipliant l'équation (I) par $\left[SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i)\right]$ et l'équation (III) par $\left[\Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i)\right]$, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\Delta X_i^4 SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i) \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i) \varphi_{i+1} = \\
SMX_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i + SMX_i) \varphi_i + SPX_i \times \Delta X_i \times SMX_i^3 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i + SMX_i) \frac{\partial \varphi}{\partial X} \\
+ \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times SMX_i^3}{2!} (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + SMX_i) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \\
+ \\
-SMX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i-2} = \\
\Delta X_i^3 (SPX_i^4 - SMX_i^4) (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_i - SPX_i \times SMX_i \times \Delta X_i^3 (SPX_i^3 + SMX_i^3) (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \\
\frac{SPX_i^2 \times SMX_i^2 \times \Delta X_i^3}{2!} (SPX_i^2 - SMX_i^2) (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}
\end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta X_i^3 \times SMX_i^3 \left[\Delta X_i (SPX_i + SMX_i) + SMX_i (SPX_i - \Delta X_i) \right] \varphi_{i+2} + SPX_i^4 \times SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i) \varphi_{i+1} \\
& + SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i) \varphi_{i-2} = \left[SMX_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i - SMX_i) + \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - SMX_i^4) (SPX_i - \Delta X_i) \right] \varphi_i \\
& + SPX_i \times \Delta X_i \times SMX_i \left[SMX_i^2 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i - SMX_i) - \Delta X_i^2 (SPX_i^3 + SMX_i^3) (SPX_i - \Delta X_i) \right] \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \\
& \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times SMX_i^2}{2!} \left[SMX_i (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + \Delta X_i) + \Delta X_i (SPX_i^2 - SMX_i^2) (SPX_i - \Delta X_i) \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}
\end{aligned}$$

1.3. L'élimination de la dérivée première $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial X} \right)$

Finalement l'élimination de la dérivée première rend le terme diffusif.

$$(A) \Rightarrow ap2\varphi_{i+2} + ap1\varphi_{i+1} + am1\varphi_{i-1} = a0\varphi_i + a \frac{\partial \varphi}{\partial X} + a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}$$

Avec :

$$ap2 = -\Delta X_i^3 \times \Delta X_{i-1}^3 \left[\Delta X_i (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_{i-1} (SPX_i - \Delta X_{i-1}) \right]$$

$$ap1 = SPX_i^4 \times \Delta X_{i-1}^3 (SPX_i + \Delta X_{i-1})$$

$$am1 = SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i)$$

$$a0 = \left[\Delta X_{i-1}^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) + \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_{i-1}^4) (SPX_i - \Delta X_i) \right]$$

$$a \frac{\partial \varphi}{\partial X} = SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i-1} \left[\Delta X_{i-1}^2 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) - \Delta X_i^2 (SPX_i^3 + \Delta X_{i-1}^3) (SPX_i - \Delta X_i) \right]$$

$$a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} \left[\Delta X_{i-1} (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) (SPX_i + \Delta X_{i-1}) - \Delta X_i (SPX_i^2 - \Delta X_{i-1}^2) (SPX_i - \Delta X_i) \right]$$

$$(B) \Rightarrow bp2\varphi_{i+2} + bp1\varphi_{i+1} + bm1\varphi_{i-2} = b0\varphi_i + b \frac{\partial \varphi}{\partial X} + b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}$$

Avec :

$$bp2 = -\Delta X_i^3 SMX_i^3 \left[\Delta X_i (SPX_i + SMX_i) + SMX_i (SPX_i - \Delta X_i) \right]$$

$$bp1 = SPX_i^4 \times SMX_i^3 (SPX_i + SMX_i)$$

$$b0 = [SMX_i^3 (SPX_i^4 - \Delta X_i^4)(SPX_i + SMX_i) + \Delta X_i^3 (SPX_i^4 - SMX_i^4)(SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$bm2 = SPX_i^4 \times \Delta X_i^3 (SPX_i - \Delta X_i)$$

$$b \frac{\partial \varphi}{\partial X} = SPX_i \times \Delta X_i \times SMX_i [SMX_i^2 (SPX_i^3 - \Delta X_i^3)(SPX_i + SMX_i) - \Delta X_i^2 (SPX_i^3 + SMX_i^3)(SPX_i - \Delta X_i)]$$

$$b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^2 \times SMX_i^2}{2!} [SMX_i (SPX_i^2 - \Delta X_i^2)(SPX_i + SMX_i) + \Delta X_i (SPX_i^2 - SMX_i^2)(SPX_i - \Delta X_i)]$$

Multipliant l'équation (A) par $\left(b \frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)$ et l'équation (B) par $\left(-a \frac{\partial \varphi}{\partial X}\right)$, nous obtenons :

$$\begin{cases} ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i+2} + ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i+1} + am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-1} = a0 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_i + a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \\ -bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i+2} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i+1} - bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-2} = -b0 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_i - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left[ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_{i+2} + \left[ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_{i+1} + am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-1} - \\ & bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-2} = \left[a0 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b0 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_i + \left[a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left[a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = \left[ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_{i+2} + \left[ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_{i+1} -$$

$$\left[a0 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b0 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_i + am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-1} - bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} = \frac{1}{\left[a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right]} \left\{ \begin{aligned} & \left[ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_{i+2} \\ & + \left[ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_{i+1} \\ & - \left[a0 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b0 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \right] \varphi_i \\ & + am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-1} \\ & - bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} \varphi_{i-2} \end{aligned} \right.$$

1.4.Récapitulation

$$\text{Prenant : } d2cx = a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \right|_i = d2xp2(i)\varphi_{i+2} + d2xp1(i)\varphi_{i+1} + d2x0(i)\varphi_i + d2xm1(i)\varphi_{i-1} \\ + d2xm2(i)\varphi_{i-2}$$

Avec :

$$d2xp2(i) = \frac{ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

$$d2xp1(i) = \frac{ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

$$d2x0(i) = \frac{b0 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X} - a0 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

$$d2xm1(i) = \frac{am1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

$$d2xm2(i) = \frac{-bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial X}}{d2cx}$$

La même chose pour la direction (Y), nous avons donc :

$$d2cy = a \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - b \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} \right|_j = d2yp2(j)\varphi_{j+2} + d2yp1(j)\varphi_{j+1} + d2y0(j)\varphi_j + d2ym1(j)\varphi_{j-1} \\ + d2ym2(j)\varphi_{j-2}$$

Avec :

$$d2yp2(j) = \frac{ap2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - bp2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$d2yp1(j) = \frac{ap1 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - bp1 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$d2y0(j) = \frac{b0 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y} - a0 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$d2ym1(j) = \frac{am2 \times b \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

$$d2ym2(j) = \frac{-bm2 \times a \frac{\partial \varphi}{\partial Y}}{d2cy}$$

ANNEXE D

DISCRÉTISATION DU TERME SOURCE $\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_i$ **1. Discrétisation du terme source** $\frac{\partial \varphi}{\partial X} \Big|_i$

Le terme source apparait dans l'équation du transport de la vorticit   Ω . Prenant le d  veloppement en s  ries de Taylor. On obtient les expressions suivantes :

$$\varphi_{i+2} = \varphi_i + SPX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SPX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SPX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \quad (\text{D.1})$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta X_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\Delta X_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \quad (\text{D.2})$$

$$\varphi_{i-1} = \varphi_i - \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_{i-1}^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{\Delta X_{i-1}^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \quad (\text{D.3})$$

$$\varphi_{i-2} = \varphi_i - SMX_i \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^2}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} + \frac{SMX_i^3}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \quad (\text{D.4})$$

Pour arriver    l'expression donnant la discréétisation du terme source, deux   tapes sont indispensables. La premi  re   tape, pour but d'  liminer la d  riv  e troisi  me $\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \right)$, la deuxi  me est l'  limination de la d  riv  e seconde $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \right)$.

1.1.L'  limination de la d  riv  e troisi  me $\left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial X^3} \right)$

Multipliant l'  quation (D.1) par $(-\Delta X_i^3)$ et l'  quation (D.2) par (SPX_i^3) , nous avons :

$$\left\{ \begin{aligned} -\Delta X_i^3 \varphi_{i+2} &= -\Delta X_i^3 \varphi_i - SPX_i \times \Delta X_i^3 \frac{\partial \varphi}{\partial X} - \frac{SPX_i^2 \times \Delta X_i^3}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \\ &+ \\ SPX_i^3 \varphi_{i+1} &= SPX_i^3 \varphi_i + \Delta X_i \times SPX_i^3 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_i^2 \times SPX_i^3}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \end{aligned} \right.$$

$$-\Delta X_i^3 \varphi_{i+2} - SPX_i^3 \varphi_{i+1} = (SPX_i^3 - \Delta X_i^3) \varphi_i + SPX_i \times \Delta X_i (SPX_i^2 - \Delta X_i^2) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{\Delta X_i^2 \times SPX_i^2}{2!} (SPX_i - \Delta X_i) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}$$

$$\begin{aligned}
(2\Delta X_i + \Delta X_{i+1})SPX_i \times \Delta X_i \times \Delta X_{i+1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} &= -\Delta X_i^3 \varphi_{i+2} + \\
SPX_i^3 \varphi_{i+3} - (SPX_i^3 - X_i^3) \varphi_i - \frac{\Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1}}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} &
\end{aligned} \tag{I}$$

De même pour les deux équations (D.3) et (D.4), multipliant l'équation (D.3) par (SMX_i^3) et l'équation (D.4) par $(-\Delta X_{i-1}^3)$, nous obtenons :

$$\begin{cases}
SMX_i^3 \varphi_{i-1} = SMX_i^3 \varphi_i - SMX_i^3 \times \Delta X_{i-1} \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^3 \times \Delta X_{i-1}}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} \\
+ \\
-\Delta X_{i-1}^3 \varphi_{i-2} = -\Delta X_{i-1}^3 \varphi_i + SMX_i \times \Delta X_{i-1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \frac{SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^3}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
-\Delta X_{i-1}^3 \varphi_{i-2} - SMX_i^3 \varphi_{i-1} &= (SMX_i^3 - \Delta X_{i-1}^3) \varphi_i + SMX_i \times \Delta X_{i-1} (\Delta X_{i-1}^2 - SMX_i^2) \frac{\partial \varphi}{\partial X} + \\
\frac{SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2}{2!} (SMX_i - \Delta X_{i-1}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2\Delta X_{i-1} + \Delta X_{i-2})SMX_i \times \Delta X_{i-1} \times \Delta X_{i-2} \frac{\partial \varphi}{\partial X} &= \Delta X_{i-1}^3 \varphi_{i-2} - SMX_i^3 \varphi_{i-1} + \\
(SMX_i^3 - \Delta X_{i-1}^3) \varphi_i + \frac{SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2}}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2} &
\end{aligned} \tag{II}$$

1.2.L'élimination de la dérivée seconde $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right)$

Afin d'obtenir les deux équations mentionner (I) et (II), par la suite, éliminant la dérivée seconde $\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial X^2}\right)$:

Multipliant l'équation (I) par $[SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2}]$ et l'équation (II) par $[\Delta X_i^2 \times SPX_i^2 \times \Delta X_{i+1}]$, nous avons :

$$d1xp1(i) = \frac{SPX_i^2 \times SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2}}{d1cx}$$

$$d1xp2(i) = \frac{-SMX_i^2 \times \Delta X_{i-1}^2 \times \Delta X_{i-2} \times \Delta X_i^3}{d1cx}$$

La même chose pour la discrétisation de la dérivée première suivant la direction (Y), nous avons donc :

$$d1cy = SMY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^2 \times \Delta Y_{j-2} (2\Delta Y_j + \Delta Y_{j+1}) SPY_j \times \Delta Y_j \times \Delta Y_{j+1} \\ + SPY_j^2 \times \Delta Y_j^2 \times \Delta Y_{j+1} (2\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_{j-2}) SMY_j \times \Delta Y_{j-1} \times \Delta Y_{j-2}$$

On obtient alors :

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \right|_j = d1yp2(j)\varphi_{j-2} + d1ym1(j)\varphi_{j-1} + d0y(j)\varphi_j + d1yp1(j)\varphi_{j+1} \\ + d1yp2(j)\varphi_{j+2}$$

Avec :

$$d1ym2(j) = \frac{SPY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^3 \times \Delta Y_j^2 \times \Delta Y_{j+1} (2\Delta Y_{j-1} + \Delta Y_{j-2})}{d1cy}$$

$$d1ym1(j) = \frac{-SMY_j^3 \times SPY_j^2 \times \Delta Y_j^2 \times \Delta Y_{j+1}}{d1cy}$$

$$d0y(j) = \frac{SPY_j^2 \times \Delta Y_j^2 \times \Delta Y_{j+1} (SMY_j^3 - \Delta Y_{j-1}^3) - SMY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^2 \times \Delta Y_{j-2} \times (SPY_j^3 - \Delta Y_j^3)}{d1cy}$$

$$d1yp1(j) = \frac{SPY_j^3 \times SMY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^2 \times \Delta Y_{j-2}}{d1cy}$$

$$d1yp2(j) = \frac{-SMY_j^2 \times \Delta Y_{j-1}^2 \times \Delta Y_{j-2} \times \Delta Y_j^3}{d1cy}$$

**ANNEXE DE
LISTE DES
TRAVAUX
SCIENTIFIQUES**

Prandtl Number Effects on the Entropy Generation During the Transient Mixed Convection in a Square Cavity Heated from Below

Nawal Ferroudj^{1,2*}, Hasan Koten³, Sacia Kachi¹, Saadoun Boudebous⁴

¹ Chemical Engineering Department, Faculty of Process Engineering, University of Salah Boubnider Constantine 3, 25000 Constantine, P.O.B. 'B' 72, Algeria

² Laboratory of Biotechnology, National Higher School of Biotechnology (ENSB), University town Ali Mendjeli, Constantine 3, 25100 Constantine, P.O.B. E66, Algeria

³ Computational Fluid Dynamics Laboratory, Department of Mechanical Engineering, Istanbul Medeniyet University, 34700 Istanbul, Goztep Campus, E5 Street, Turkey

⁴ Faculty of Sciences and Applied Sciences, University of Larbi Ben M'hidi, 04000 Oum el Bouaghi, P.O.B. 358, Algeria

* Corresponding author, e-mail: n.ferroudj@ensbiotech.edu.dz

Received: 21 November 2020, Accepted: 07 May 2021, Published online: 30 August 2021

Abstract

This numerical study considers the mixed convection, heat transfer and the entropy generation within a square cavity partially heated from below with moving cooled vertical sidewalls. All the other horizontal sides of the cavity are assumed adiabatic. The governing equations, in stream function–vorticity form, are discretized and solved using the finite difference method. Numerical simulations are carried out, by varying the Richardson number, to show the impact of the Prandtl number on the thermal, flow fields, and more particularly on the entropy generation. Three working fluid, generally used in practice, namely mercury ($Pr = 0.0251$), air ($Pr = 0.7296$) and water ($Pr = 6.263$) are investigated and compared. Predicted streamlines, isotherms, entropy generation, as well as average Nusselt numbers are presented. The obtained results reveal that the impact of the Prandtl number is relatively significant both on the heat transfer performance and on the entropy generation. The average Nusselt number increase with increasing Prandtl number. Its value varies thereabouts from 3.7 to 3.8 for mercury, from 5.5 to 13 for air and, from 12.5 to 15 for water. In addition, it is found that the total average entropy generation is significantly higher in the case of mercury ($Pr \ll 1$) and water ($Pr \gg 1$) than in the case of air ($Pr \sim 1$). Its value varies approximately from 700 to 1100 $W/m^3 K$ for mercury, from 200 to 500 $W/m^3 K$ for water and, from 0.03 to 5 $W/m^3 K$ for air.

Keywords

Prandtl number, entropy generation, mixed convection, square cavity, finite difference method

This article was originally published with an error. This version has been corrected/amended in the Corrigendum. Please see the Corrigendum (<https://doi.org/10.3311/PPme.19293>)!

1 Introduction

Thermal resistance and friction are mechanisms that generate irreversibility during fluid flows present in any heat transfer process. However, the first and second laws of thermodynamics indicate that these irreversibilities give rise to a loss of available work in the processes of heat transfer. This loss of useful work is referred to as "entropy generation". The most important theoretical studies of entropy generation in heat transfer processes have been reported in several references works e.g. Bejan [1, 2]. The fundamental concepts of energy, entropy and exergy and their applications in many fields of science and technology were well detailed by Dincer and Cengel [3], Naterer and Camberos [4], Sciacovelli et al. [5] and more recently by Sauerheber [6]. One of the main challenges of thermal

engineering is to minimize the entropy generation of in a system to collect the maximum useful work and thus to improve the energy efficiency of the system [7, 8]. In the literature, several studies have been reported on entropy generation of buoyancy flows in enclosures subjected to different boundary conditions. Oztop and Al-Salem [9] reported a comprehensive review of entropy generation in buoyancy-induced flows in cavities and channels. Awad [10] presented a critical review of the thermodynamic optimum of micro channels based on entropy generation analysis. More recently, Biswal and Basak [11] performed a detailed review of the literature on the entropy generation analysis for heat transfer processes involving various practical applications. In addition, it should also be pointed out that

Torabi et al. [12] reported a concise review of a large number of studies where efforts were made to integrate entropy generation in thermal systems with solid structures including also convective-conductive problems in which the conductive process has dominating roles.

In the last decade, significant numerical investigations [13–16] have been performed to include the effect of the Prandtl number during laminar natural or mixed convection in confined spaces. However, the literature review has revealed that few contributions have been made to the effect of the Prandtl number on entropy generation, whether in natural convection or mixed convection. Firstly, as to the natural convection, Kaluri and Basak [17] performed numerical studies on entropy generation during natural convection in porous square cavities heated with differential and distributed heating. Simulations were carried out for a range of permeability of a porous medium between 10^{-6} and 10^{-3} , Rayleigh numbers between 10^3 and 10^6 and for values of the Prandtl numbers = equal to 0.015, 0.7, 10, 1000. They found that friction irreversibility dominates the total entropy generation for higher Prandtl numbers at higher Darcy numbers, whereas the heat transfer irreversibility dominates the total entropy generation for lower Prandtl numbers. Ramakrishna et al. [18] studied the entropy generation for natural convection within trapezoidal cavities in the presence of a hot left wall, cold right wall, and adiabatic horizontal walls. The results were reported for Rayleigh number (Ra) = 10^6 , Prandtl numbers (Pr) = 0.015 and 1000 and Darcy numbers (Da) = 10^{-4} and 10^{-5} . One of their conclusions is that the total entropy generation is found to be high for $Pr = 1000$ compared to that of $Pr = 0.015$ at higher Da . Analysis of the variation of average Bejan number with Da illustrated that the fluid friction irreversibility contributes significantly to the increase in total entropy generation. Rathnam et al. [19] studied the influence of the Rayleigh numbers ($Ra = 10^3$ – 10^5), the Prandtl numbers ($Pr = 1.5 \cdot 10^{-2}$ – 10^3) and the base angles ($\varphi = 45^\circ$ and 60°) on entropy generation during natural convection in isosceles triangular cavities for various base angles or tilt positions. They were able to determine the most suitable parameters as well as geometric configuration to minimize the entropy generation. More recently, Wei et al. [20] used the lattice Boltzmann Method in order to simulate the effect of Prandtl number on the entropy generation in Rayleigh-Bénard convection processes. The Rayleigh number was set at $5.4 \cdot 10^9$ while the values of the Prandtl number were 6, 20, 100 and 10^6 . It was shown that the viscous entropy generation increases progressively with

the increase in Prandtl number; the entropy generation in the flow is dominated by heat transfer irreversibility and frictional irreversibility can be neglected. Very recently, it has been noted, in the literature, that the presence of radiation and magnetic field in enclosures filled with various nanofluids has considerably influenced the generation of entropy on natural convection as evidenced by the work of Pordanjani et al. [21] and Mliki and Abbassi [22].

Secondly, as to the mixed convection, Roy et al. [23–25] investigated the effect of the Prandtl on entropy generation during the mixed convection in a square cavity where the bottom wall is isothermally hot, sidewalls are cold, and the top wall is adiabatic. Simulations were carried out for Prandtl number $Pr = 0.026$ and 7.2 , the Reynolds number Re varied between 10 and 100, and Grashof number Gr varied between 10^3 and 10^5 . In Roy et al. [23] the effect of moving horizontal or vertical wall(s) was considered, in Roy et al. [24], the cavity was filled with porous media and the effect of thermal boundary condition was highlighted and in Roy et al. [25] the effect of various thermal boundary conditions is studied. More recently, Roy et al. [26] dealt with the same problem as those described above but in porous triangular cavities. In each considered case, these authors reported the values of the parameters that contribute to minimize the entropy generation.

In the last few years, the investigation on the entropy generation of the mixed convection confined spaces has also been extended considering the nature of the fluid, the presence of a magnetic field, or a thermal radiation. Goodarzi et al. [27] Investigated, using the Finite Volume Method, the effect of radiation on laminar and turbulent mixed convection heat transfer of a semi-transparent medium in a square enclosure. Aghaei et al. [28] performed numerical investigation, based on the Finite Volume Method, concerning the effect of horizontal and vertical elliptic baffles on the flow, heat transfer and entropy generation of a MWCNTs-water nanofluid. Yousef zadeh et al. [29] analyzed numerically, using the Finite Volume Method, entropy generation of mixed convection of either pure water or nanofluid flow in a circular obstacle inserted in an open cavity. Ebrahimi et al. [30] conducted the computational modeling of laminar mixed convection heat transfer and entropy generation of nanofluids inside a closed elbow-shaped cavity (CESC) using a finite volume method. Kashyap et al. [31] reported, using Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann method, the effects of three different Prandtl number fluids ($Pr = 0.025$, 5.83 and 151) on convective heat transfer inside a closed

square cavity with a square block positioned at its center. Khan et al. [32] applied the three-stage Lobatto technique implemented in MATLAB software to study the impacts of entropy along with non-linear radiation and viscous dissipation on mixed convection flow using an effective Prandtl model and comprising water and ethylene-based $\gamma\text{-Al}_2\text{O}_3$ particles over a stretched vertical sheet.

From this literature review, it appears that the numerical studies of mixed convection in confined spaces taking into account the impact of Prandtl number on the entropy generation are relatively scarce. Therefore, the problem has remained largely insufficiently exploited. For this purpose, the present work investigates the effects of the Prandtl number on entropy generation in mixed convection in a square cavity partially heated from below, with an adiabatic upper wall and cold vertical walls moving upward at a constant velocity.

2 Physical problem and computational domain

The schematic view of the geometric configuration investigated in the current study is shown in Fig. 1. It consists of a square cavity of side length L . The lateral walls of this cavity are maintained at a constant cold temperature T_c and move upwards with a constant velocity v_w . A heat source of size $l = 4/5 L$ is located at the center of the bottom wall of the cavity and maintained at a constant high temperature T_h . All remaining boundaries of the cavity are considered adiabatic. An illustrated mechanism allowing moving walls in relation to this geometric configuration can be found in Roy et al. [23].

3 Governing equations

The flow is steady, laminar and incompressible. Viscous dissipation is negligibly small and all other fluid properties

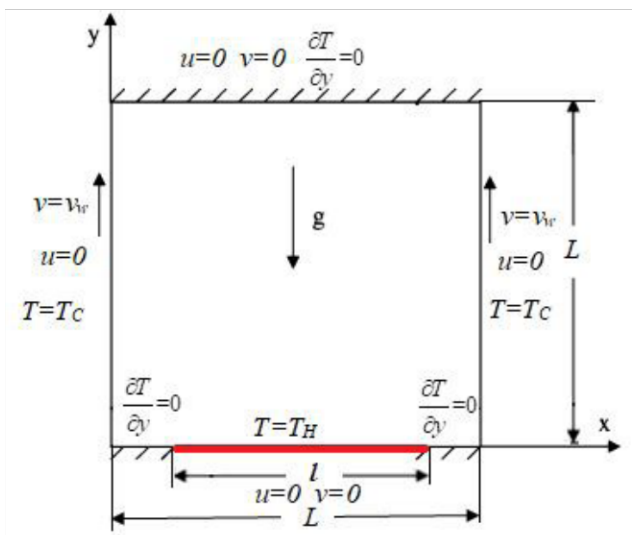


Fig. 1 A schematic diagram for the physical model

are assumed constant except the fluid density giving rise to the buoyancy forces (Boussinesq approximation [33]). Under the above assumptions, the governing equations of energy, vorticity, and stream function for a laminar incompressible fluid can be expressed respectively in dimensionless form as follows [34]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \left(\frac{1}{\text{Re}} \right) \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega. \quad (3)$$

The vorticity and the velocity components in the X and Y directions, respectively, are given by the following expressions:

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}, \quad U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}. \quad (4)$$

The dimensionless variables are defined as:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{\Delta T}, \quad U = \frac{u}{v_w}, \quad V = \frac{v}{v_w},$$

$$\tau = t \frac{v_w}{L}, \quad P = \frac{p - p_0}{\rho v_w^2}, \quad \Omega = \frac{L}{v_w}, \quad \Psi = \frac{\psi}{L v_w}.$$

The dimensionless numbers in these equations are, respectively, the Reynolds (Re), Prandtl (Pr) and Richardson (Ri) numbers and are defined by the following relationships:

$$\text{Re} = \frac{v_w L}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Ri} = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2},$$

where Gr is the Grashof number, $\text{Gr} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$ and $\Delta T = T_h - T_c$ is the temperature difference.

In accordance with the aforementioned definition of the Grashof number, the Richardson number can be rewritten as:

$$\text{Ri} = \frac{g \beta \Delta T}{\nu^2 \text{Re}^2} L^3. \quad (5)$$

Numerical solution of the previous equations is based on the following initial and boundary conditions:

- Initial conditions ($\tau = 0$):

$$0 < Y < 1 \quad \& \quad 0 < X < 1:$$

$$\theta = 0 \quad \Psi = 0 \quad \Omega = 0,$$

- Boundary conditions ($\tau > 0$):

$$\left. \begin{matrix} X = 0 \\ X = 1 \end{matrix} \right\} \& \quad 0 \leq Y \leq 1 \Rightarrow U = \theta = \Psi = 0 \quad V = 1, \quad (6)$$

$$Y = 0 \ \& \ 0 \leq X \leq (1-\varepsilon)/2 \ \& \ (1+\varepsilon)/2 \leq X \leq 1 \Rightarrow U = V = \Psi = \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0, \tag{7}$$

$$Y = 0 \ \& \ (1-\varepsilon)/2 \leq X \leq (1+\varepsilon)/2 \Rightarrow U = V = \Psi = 0 \ \& \ \theta = 1, \tag{8}$$

$$Y = 1 \ \& \ 0 \leq X \leq 1 \Rightarrow U = V = \Psi = 0 \ \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0. \tag{9}$$

Here $\varepsilon = l/L$ is the dimensionless length of the heated part of the bottom wall.

The dimensionless local and average Nusselt numbers along the bottom wall are written respectively as [35]:

$$\text{Nu}(X) = -\frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0}$$

and

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\frac{1-\varepsilon}{2}}^{\frac{1+\varepsilon}{2}} \text{Nu}(X) dX. \tag{10}$$

4 Entropy generation

4.1 Entropy generation equation

In accordance with the concept of the local thermodynamic equilibrium with the linear transport theory [1], the entropy generation relation is given by:

$$S_{gen} = \frac{k}{T_{ref}^2} \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{\mu}{T_{ref}} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]. \tag{11}$$

In non-dimensional form, it is expressed as follows in Eq. (12):

$$S_{gen} = s_1 \underbrace{\left\{ \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right\}}_{S_{th}} + s_2 \underbrace{\left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]}_{S_{ff}}, \tag{12}$$

where the entropy generation due to heat transfer irreversibility is S_{th} , the entropy generation due to fluid friction irreversibility is S_{ff} and the irreversibility distribution ratios are:

$$s_1 = k \left(\frac{\Delta T}{T_{ref}} \right)^2 \frac{1}{L^2}; \quad s_2 = \frac{\mu}{T_{ref}} (\nu \text{Re})^2 \frac{1}{L^4}. \tag{13}$$

Here $T_{ref} = (T_h + T_c)/2$ is the reference temperature.

The total entropy generation may be expressed by integrating Eq. (10) within the whole cavity.

$$\overline{S_{gen}} = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 S_{th} dXdY}_{S_{th}} + \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 S_{ff} dXdY}_{S_{ff}} \tag{14}$$

4.2 Bejan number

The local Bejan number (Be) is defined as the ratio of the entropy generation due to heat transfer to the total entropy generation due to heat transfer and fluid friction, it is expressed as:

$$\text{Be} = \frac{S_{th}}{S_{gen}}. \tag{15}$$

The average value of this number is given by:

$$\overline{\text{Be}} = \frac{\overline{S_{th}}}{\overline{S_{gen}}}. \tag{16}$$

5 Numerical procedure and code validation

5.1 Numerical procedure

The above-mentioned governing equations, Eqs. (1–4) subject to the given boundary conditions, Eqs. (6–9) were discretized by the finite difference method. Temporal discretization was achieved using the Runge-Kutta fourth-order method (R.K.4) with the time step $\Delta\tau = 10^{-5}$ for each iteration. The convective terms in Eqs. (1) and (2) were discretized with a third-order upwind scheme as proposed by Kawamura et al. [36]. The diffusive terms, as well as the terms including the first derivatives, were discretized by a fourth-order accurate scheme. An iterative procedure based on the successive Non Linear Over Relaxation method (NLOR) was used to solve the discretized stream function equation Eq. (3). A convergence criterion for the stream function was imposed at every stage of the Runge-Kutta procedure. Once the dimensionless velocities (U, V) and temperatures (θ) are determined, the average Nusselt number along the hot part of the bottom wall Eq. (10) and the characteristics of the entropy generation are computed using Eqs. (12) to (14) and (16). Finally, it should be mentioned that all the integrals Eqs. (10) and (14) are evaluated using Simpson's rule. An in-house FORTRAN code, with a double precision accuracy, has been developed for solving the systems of the discretized equations.

5.2 Grid independency

Numerical tests have been made to ensure the accuracy of results for the grid used in this study. Four grid sizes (41×41 ; 81×81 ; 101×101 and 161×161) have been considered. These

numerical tests are carried out for the case of Reynolds number $Re = 100$, Prandtl number $Pr = 0.6992$ (air at 453 K) and Richardson number $Ri = 5$ and 30. Table 1 shows the convergence of the average Nusselt number, while Table 2 shows the average of the total entropy generation and Bejan number. It should be noted that the maximum relative error does not exceed 2 % between the grid sizes of 81×81 and 101×101 compared to the grid size of 161×161 . Therefore, it was decided to use a non-uniform grid with 101×101 grid points for all calculations allowing a balance between accuracy and CPU time.

5.3 Validation

In order to ensure the effectiveness of the developed code, a first validation was carried out to compare the values of the average Nusselt number (Nu) obtained in the classic case of natural convection occurring in a square cavity with differentially heated vertical sides and insulated horizontal walls. Table 3 shows this comparison for different Rayleigh numbers when the Prandtl number is set at 0.71.

A complementary validation, which considers the same problem in the same geometrical configuration, but this time the comparison relates to the total entropy generation and the average Bejan number. The results are shown in Table 4.

6 Results and discussion

6.1 Detailed data associated with the problem

The present numerical study investigates the fluid flow and the mixed convection heat transfer in a square cavity partially heated from below with a moving cooled vertical sidewalls. Numerical simulations have been performed for different Richardson numbers (Ri) calculated on the basis of length of the cavity (L). A great deal of interest is being focused on the effect of the Prandtl number (Pr) on the fluid flow, heat transfer and entropy generation inside the cavity considering three working fluids, the most encountered in

Table 1 Grid independence test: average Nusselt number for $Re = 100$, $Pr = 0.6992$ and $Ri = 5$ and 30

	41×41	81×81	101×101	161×161
Ri = 5	6.409972	6.501360	6.519890	6.554256
Ri = 30	7.760660	8.235425	8.280651	8.351396

Table 2 Grid independence test: average Entropy generation and Bejan number for $Re = 100$, $Pr = 0.6992$ and $Ri = 5$ and 30

Ri	41×41	81×81	101×101	161×161	
5	$\overline{S_{gen}}$	0.1413722	0.14011485	0.1398440	0.139495
	$\overline{B_e}$	0.99991734	0.999815	0.99976241	0.999604
30	$\overline{S_{gen}}$	5.5527665	5.45867439	5.4468174	5.432849
	$\overline{B_e}$	0.99996553	0.999945	0.99993304	0.999896

Table 3 Comparison of reported values of the average Nusselt number with present results

Ra	De Vahl Davis and Jones [37]	De Vahl Davis [38]	Balam and Gupta [39]	Present work
10^3	1.116	1.117	1.119	1.119
10^4	2.242	2.238	2.260	2.250
10^5	4.564	4.509	4.645	4.592
10^6	9.035	8.817	9.184	9.001

Table 4 Comparison of reported values of the total entropy generation and the average Bejan number with present results ($Pr = 0.71$, $\varphi = 10^{-4}$)

Ra	Ilis et al. [40]	Oliveski et al. [41]	Masvik et al. [42]	Jassim et al. [43]	Present work	
10^3	$\overline{S_{gen}}$	1.20	1.16	1.15	1.152	1.153
	$\overline{B_e}$	0.96	0.96	0.97	0.965	0.97
10^5	$\overline{S_{gen}}$	23.50	23.87	23.27	23.27	23.94
	$\overline{B_e}$	0.20	0.183	0.194	0.199	0.208

studies, namely mercury ($Pr = 0.0251$), air ($Pr = 0.7296$) and pure water ($Pr = 6.263$). The reference values of their thermo-physical properties have been taken from Cengel and Ghajar [44] at the same bulk temperature $T_{ref} = 298$ K and are listed in Table 5. Furthermore, the Reynolds number (Re) and the temperature difference ΔT are kept constant at 10^2 , and 10 K respectively.

On the other hand, we found it necessary that all geometric configurations will have the same cavity length L for each number of Prandtl considered in this study, so we can be sure to compare what is comparable. The length L varies between two limits. The lower limit is fixed at $5 \cdot 10^{-3}$ m, as suggested by Moon and Chung [16], while the upper limit will depend on getting the suitable stable and stationary flow regime for each Prandtl number. This one is supposed to be achieved once the average Nusselt number becomes constant and independent of time. We have fixed once and for all, in Table 6, these limits as well as their corresponding Richardson numbers, for the different fluids considered in this investigation.

6.2 Effect of Ri and Pr on the thermal and flow fields

The flow and heat transfer characteristics have been presented and analysed using stream traces and isotherms. Figs. 2 to 4 depicts, for the three fluids considered, the stream traces superimposed on the isotherms, on the left for the lower limit ($L = 0.005$ m), and on the right for the upper limit (L depends on the type of fluid).

We can distinguish two different behaviour of the fluid flow through the cavity according to the value of the Richardson number. For low values of this parameter, the

Table 5 Thermo-physical properties of working fluids at 298 K from [44]

	Density ρ (kgm ⁻³)	Thermal conductivity k (Wm ⁻¹ K ⁻¹)	Dynamic viscosity μ (kgm ⁻¹ s ⁻¹)	Thermal expansion coefficient β (K ⁻¹)	Prandtl number (Pr)
Hg	13534	8.51533	1.534 10 ⁻³	1.81 10 ⁻⁴	0.0251
Air	1.184	0.02551	1.849 10 ⁻⁵	3.3557 10 ⁻³	0.73
H ₂ O	997.1	0.5948	8.905 10 ⁻⁴	2.594 10 ⁻⁴	6.263

Table 6 Limit values of the length L of the cavity with the corresponding Richardson numbers for the working fluids

	L (min)	L (max)	Ri (min)	Ri (max)
Water (Pr = 6.263)	0.005	0.019	0.4	21.9
Air (Pr = 0.7263)	0.005	0.1	0.017	135
Mercury (Pr = 0.0251)	0.005	0.0085	17.3	85

flow consists of two counter-rotating cells. The viscous forces due to the upward movement of the side walls causes the fluid to rise along the side walls, bypass the upper wall and descend again along the centre of the cavity. In this case, the heat flow recovered by the fluid from the heat source is directly discharged through the lower portion of the vertical walls. Note that the current behaviour was not observed in the case of mercury. For high values of the Richardson number, the flow consists of four cells, two counter-rotating cells located in the centre of the cavity due to buoyancy forces, and the other two, also counter-rotating due to viscous forces, are weak and adjacent to the lateral sidewalls. Inside each of them, two minor vortices appear at the bottom and top corners. In this instance, all the heat from the hot source is propagated through the centre of the cavity. These observations are similar to those obtained by Biswas and Manna [45] with the same geometrical configuration. However, concerning the effect of the Prandtl number, we observe, for the forced convection-dominated regime, that the sidewall's thermal boundary layer is thinner in the case of water than in that of air. In addition, and in the same circumstances, it should be noted that the penetration of cold fluid from the top and which flows along the central part of the cavity is relatively greater.

6.3 Effect of Pr and Ri on the Nusselt number

The effect of the Prandtl and Richardson numbers on the average Nusselt number is shown in Figs. 5, 6 and 7. Fig. 3 presents the evolution of the average Nusselt number for the working fluids within the limits already mentioned above. It is observed that after initial fluctuations, the average Nusselt number become steady. Their duration

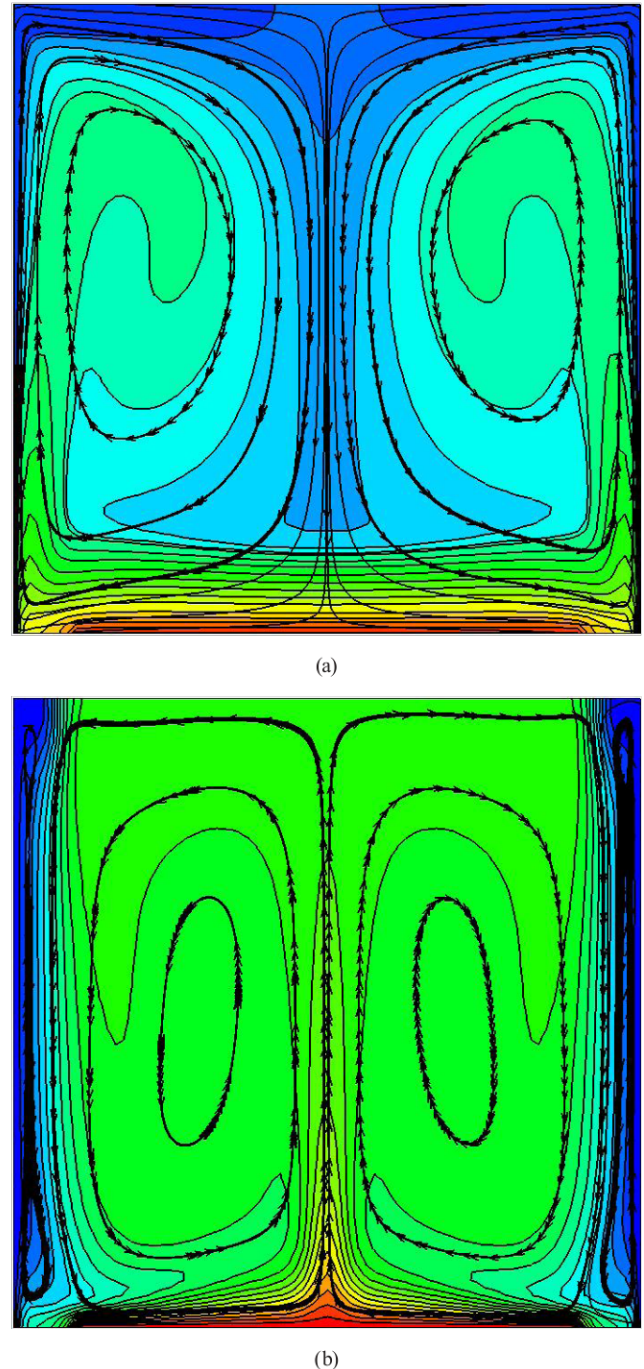
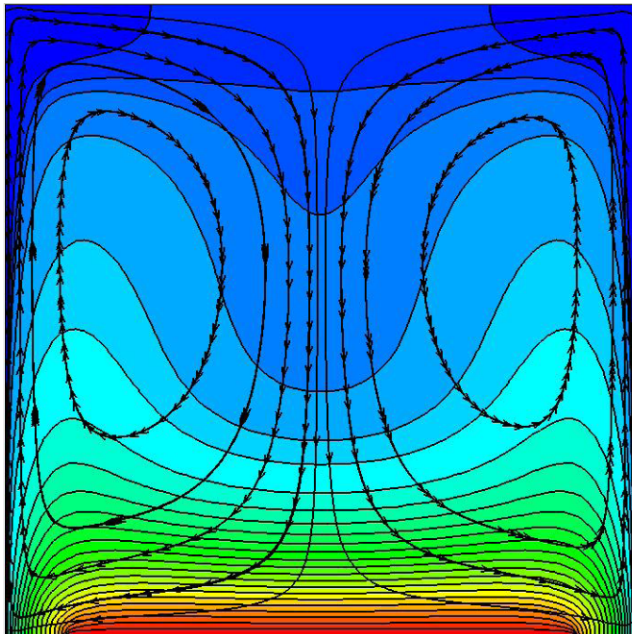
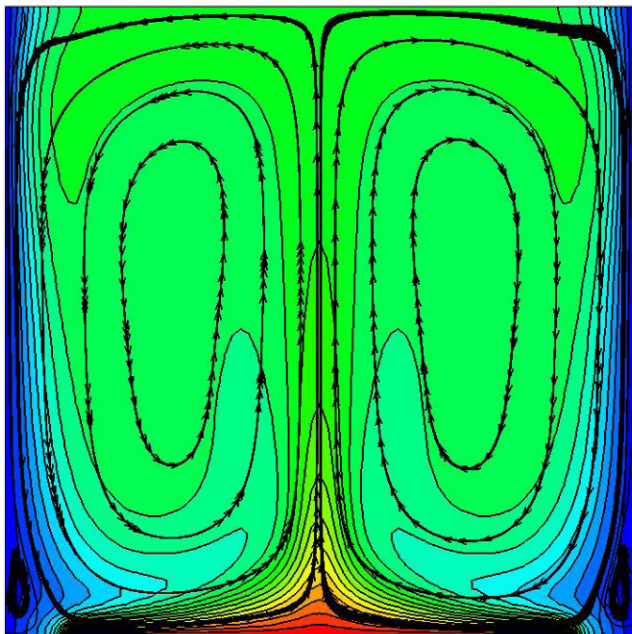


Fig. 2 Stream traces superimposed on the isotherms for water (Pr = 6.263); (a) Ri = 0.4 ($L = 0.005$ m); (b) Ri = 21.9 ($L = 0.019$ m)

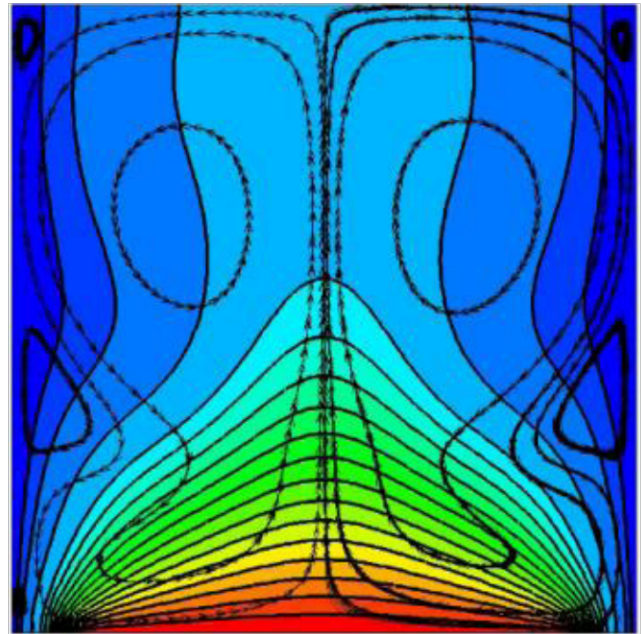


(a)

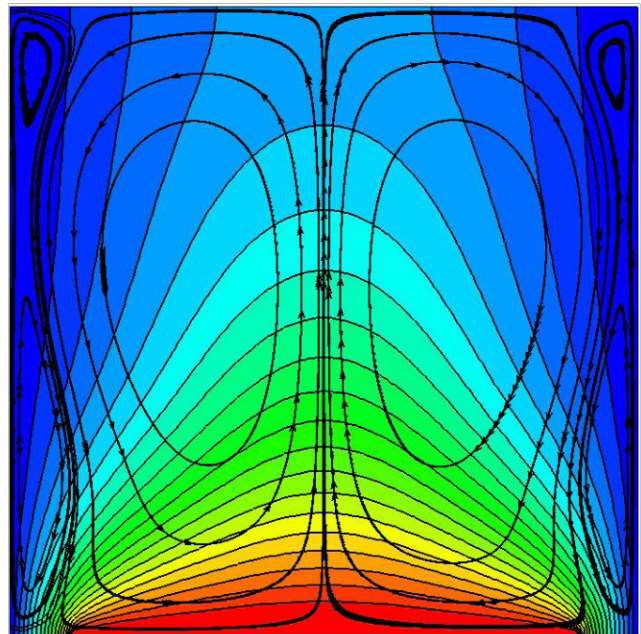


(b)

Fig. 3 Stream traces superimposed on the isotherms for air ($Pr = 0.7296$); (a) $Ri = 0.017$ ($L = 0.005$ m); (b) $Ri = 135$ ($L = 0.1$ m)



(a)



(b)

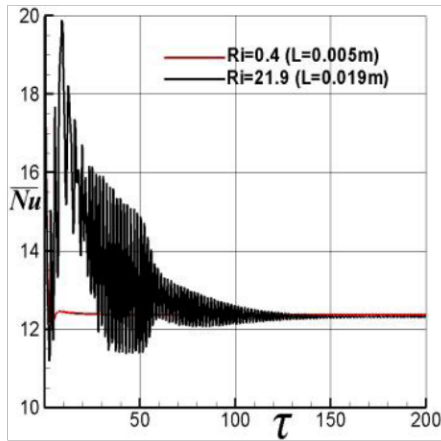
Fig. 4 Stream traces superimposed on the isotherms for mercury ($Pr = 0.0251$); (a) $Ri = 17.3$ ($L = 0.005$ m); (b) $Ri = 85$ ($L = 0.0085$ m)

and amplitude continue to increase significantly as the Ri increase, particularly for water and mercury. On the other hand, we can also see that the gap between the values of the average Nusselt number is significantly higher in the case of air ($Pr \sim 1$), than in the case of water ($Pr \gg 1$), or in the case of mercury ($Pr \ll 1$).

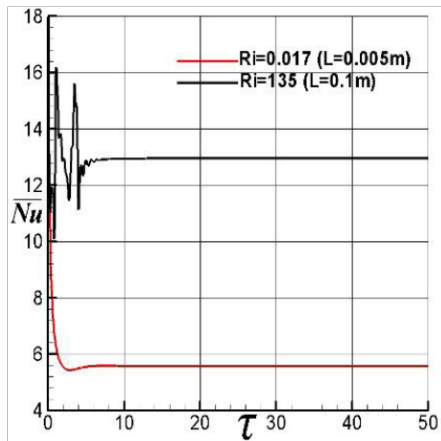
Fig. 6 provides typical variation of the average Nusselt number as a function of Ri number for water, air, and

mercury. For mercury (Fig. 5 (c)), the average Nusselt number increases with increasing Ri , while for water and air, it increases, then undergoes a significant reduction during the transition from the flow characterized by two cells to that characterized by four cells (bifurcation), and then start over increasing.

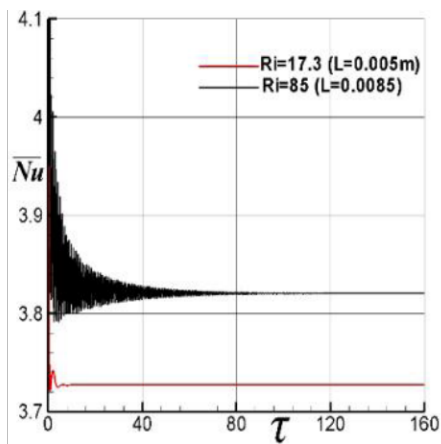
To illustrate more clearly the effect of the Prandtl number on the heat exchange at the heated wall, Fig. 6 (a), (b) and (c)



(a)



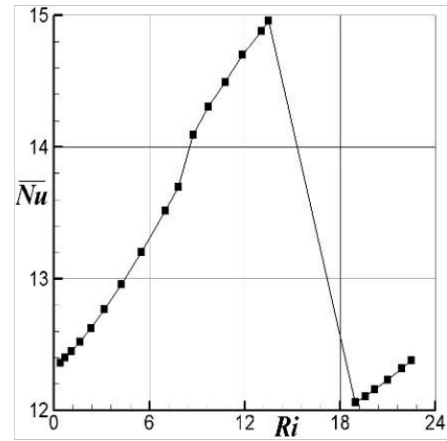
(b)



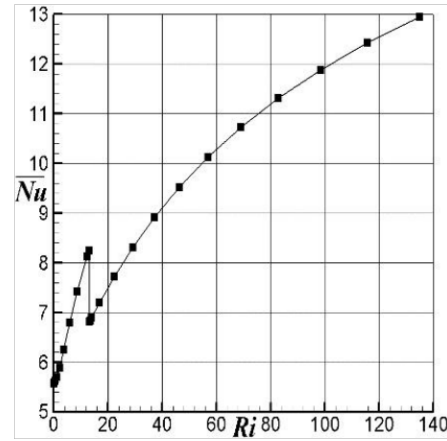
(c)

Fig. 5 Evolution of the average Nusselt number (a) for water, (b) for air and (c) for mercury

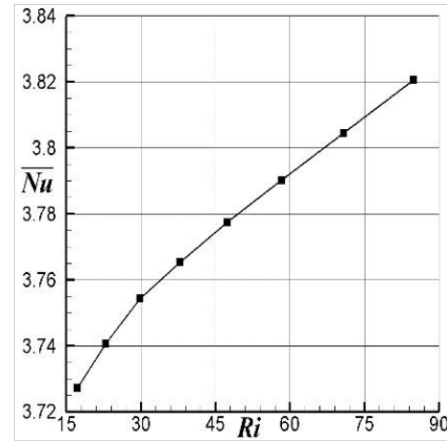
are brought together in Fig. 7. It can be seen that the average Nusselt number increases with the increase of Pr, regardless of the value of Ri. This could be explained by the fact that as the Prandtl number increases, the thermal diffusion becomes, more and more reduced; the temperature gradients near the heated wall become much more significant, which implies an



(a)



(b)



(c)

Fig. 6 Average Nusselt number versus the Richardson number, (a) for water, (b) for air and (c) for mercury

increase in the average Nusselt number. Similar results were obtained by Cheng [13] and, Moallemi and Jang [46].

6.4 Effect of Pr and Ri on the entropy generation

The total entropy generation, the entropy generation due to heat transfer and the entropy generation due to fluid

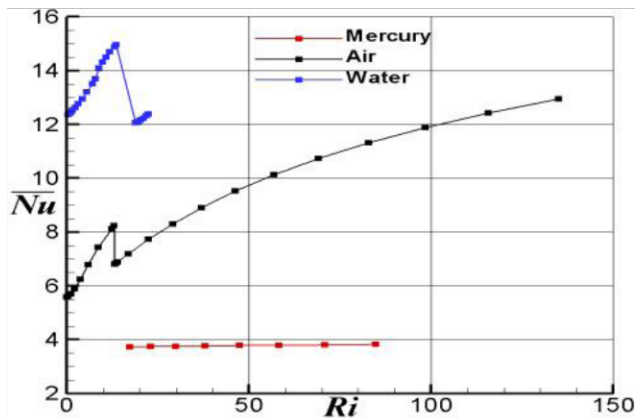


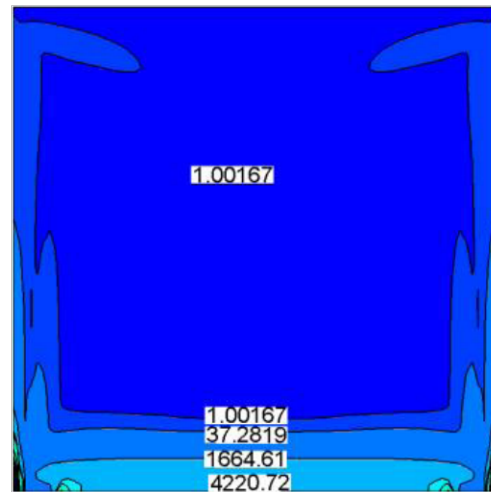
Fig. 7 Comparison of the average Nusselt number for the working fluids versus the Richardson number

friction for water ($0.4 \leq Ri \leq 21.9$), air ($0.017 \leq Ri \leq 135$) and mercury ($17.3 \leq Ri \leq 85$) are presented in Figs. 8–13, respectively.

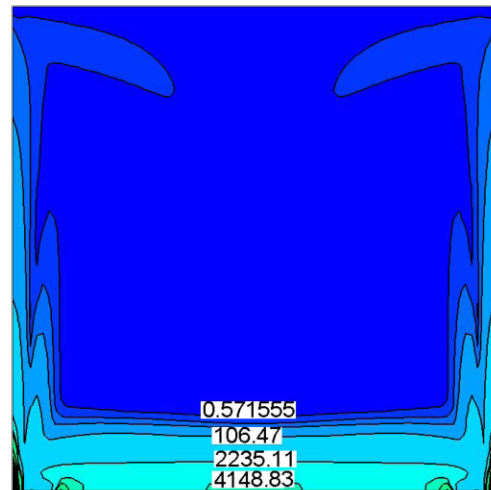
As seen from these figures, it is possible to make, qualitatively some observations. One is that the entropy generation contours follow the isotherms trend. The second is that the total entropy generation is near that of the entropy generation due to heat transfer. Therefore, the entropy generation due to fluid friction is quite insignificant in relation to the entropy generation due to the heat transfer. As a result, the average Bejan number is close to one, and thus we decided it was more relevant not to include its contours in this paper. Another is that the bulk of entropy generation comes from each end of the heated source, while the entropy generation due to fluid friction develops along the lateral moving walls. Very recently, a similar point was made by Monaledi and Makinde [47]. All of these comments are valid for all values considered of Prandtl and Richardson numbers.

In order to assess objectively and quantitatively the impact of the Prandtl and Richardson numbers, the logarithm of the average entropy generation versus Ri , for the three working fluids, is presented in Fig. 14. It is worth noting that the average total entropy generation decreases by increasing the Richardson number. Ebrahimi et al. [30] also reported this significant result. We also observe that the average total entropy generation is found to be high for mercury ($Pr = 0.0251$) and water ($Pr = 6.263$) compared to that of air ($Pr = 0.7296$).

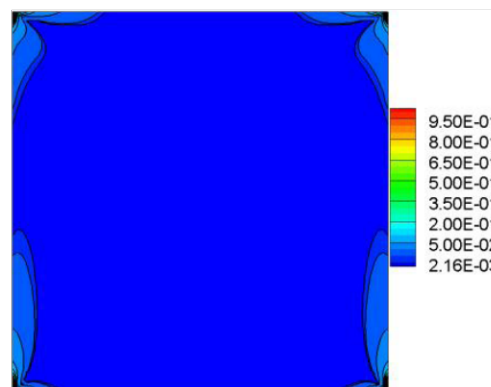
In order to highlight the very low values of the average entropy generation due to fluid friction for the different Prandtl numbers, we have displayed in Fig. 15 the variation of the logarithm of this one versus Ri . It is interesting to observe that the average entropy generation due to fluid



(a)



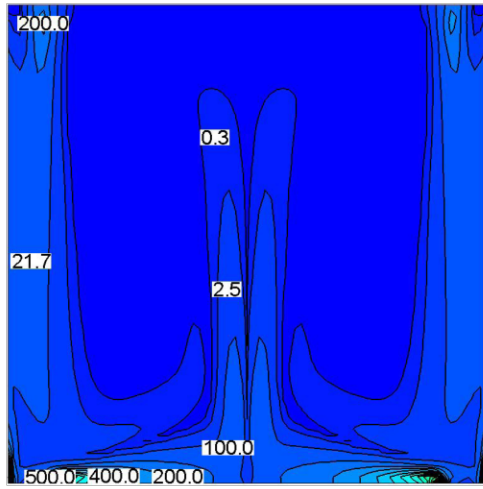
(b)



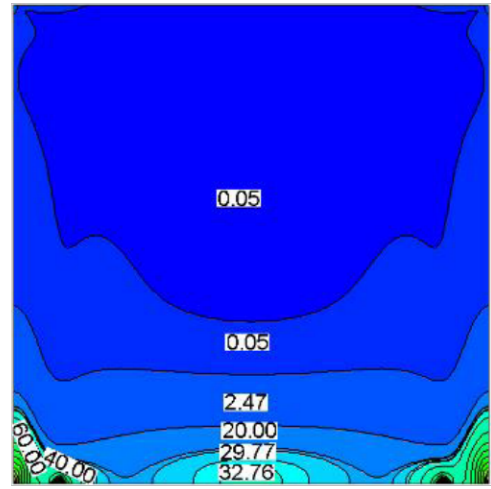
(c)

Fig. 8 (a) Contour of the total entropy generation S_{gen} , (b) the entropy generation due to heat transfer S_{th} , and (c) the entropy generation due to fluid friction S_{ff} for water at $Ri = 0.4$

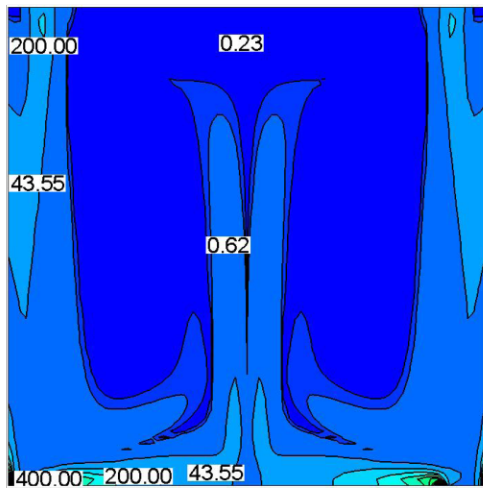
friction follows a similar trend as the average total entropy generation. The average total entropy generation scale is



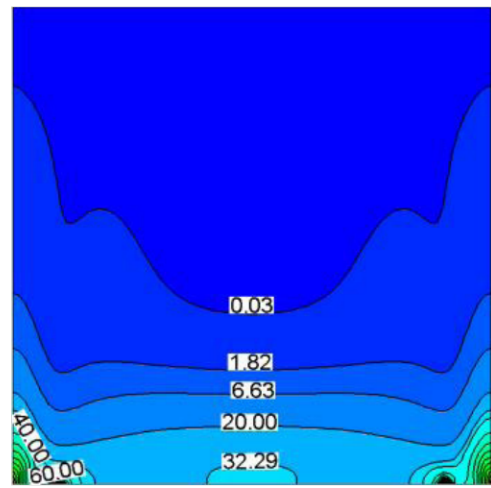
(a)



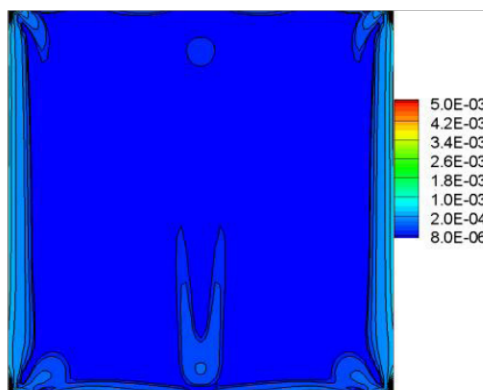
(a)



(b)

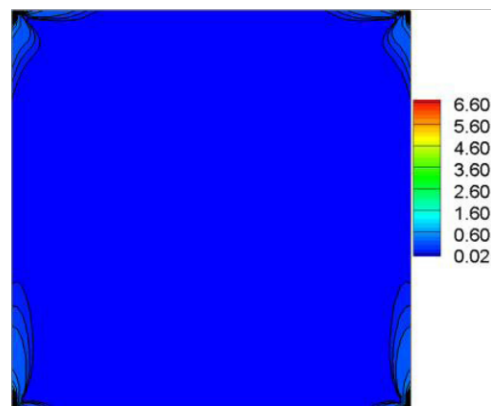


(b)



(c)

Fig. 9 (a) Contour of the total entropy generation S_{gen} , (b) the entropy generation due to heat transfer S_{th} , and (c) the entropy generation due to fluid friction S_{ff} for water at $Ri = 21.9$

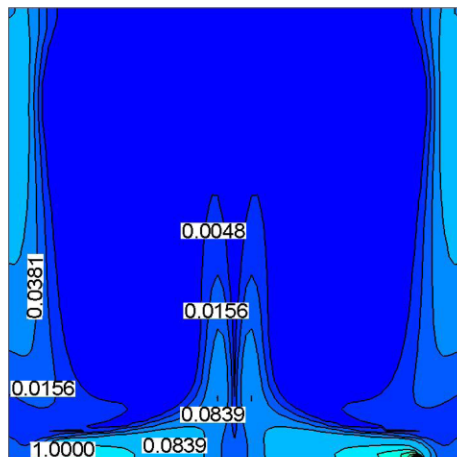


(c)

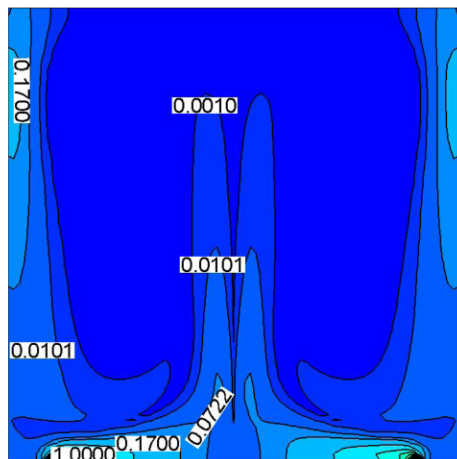
Fig. 10 (a) Contour of the total entropy generation S_{gen} , (b) the entropy generation due to heat transfer S_{th} , and (c) the entropy generation due to fluid friction S_{ff} for air at $Ri = 135$

between 10^{-2} and 10^4 while the average entropy generation due to fluid friction is between 10^{-6} and 10^1 . This result confirms the commonly adopted hypothesis, which states

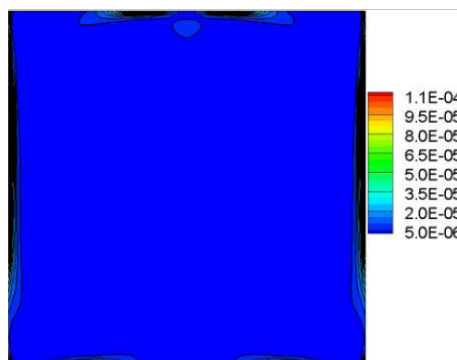
that the viscous dissipation function is neglected in the energy transport equation.



(a)

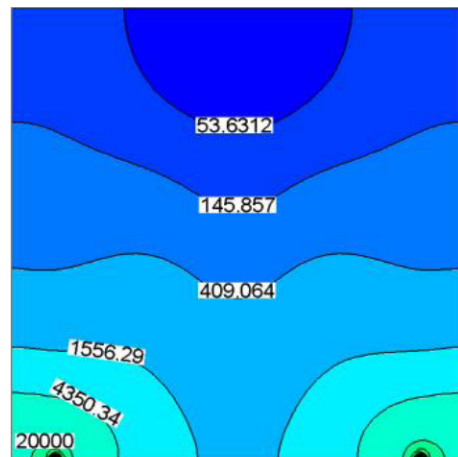


(b)

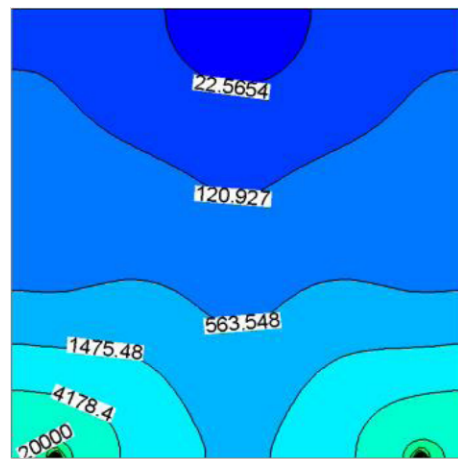


(c)

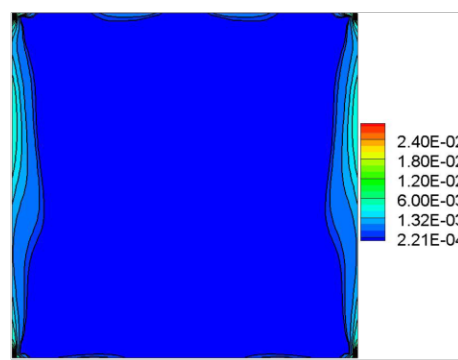
Fig. 11 (a) Contour of the total entropy generation S_{gen} , (b) the entropy generation due to heat transfer S_{th} , and (c) the entropy generation due to fluid friction S_{ff} for air at $Ri = 0.017$



(a)



(b)



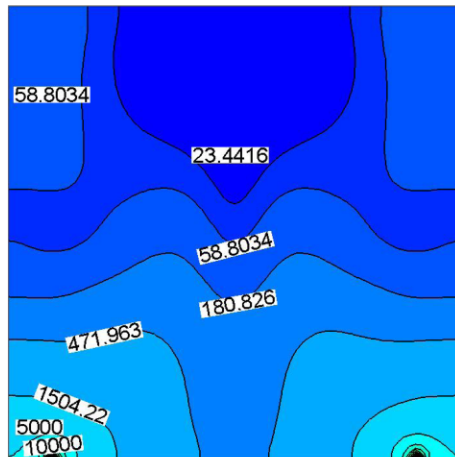
(c)

Fig. 12 (a) Contour of the total entropy generation S_{gen} , (b) the entropy generation due to heat transfer S_{th} , and (c) the entropy generation due to fluid friction S_{ff} for mercury at $Ri = 17.3$

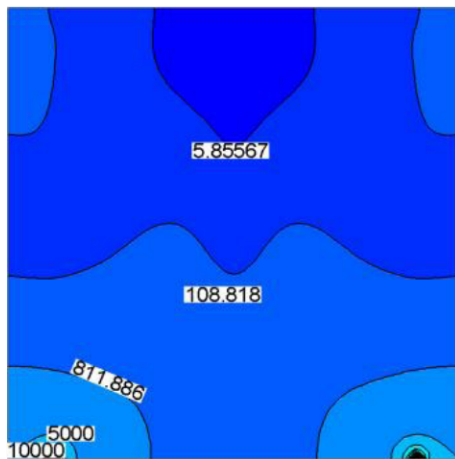
As seen in Figs. 8–13 the total entropy generation is predominately within the lower corners of the sidewalls of the cavity as well as at both ends of the heat source located in the mid-section of the bottom cavity wall. To specify more accurately the active sites of the energy losses, the profiles

of the entropy generation on the bottom wall are plotted in Fig. 16 for (a) water ($Pr = 6.263$), (b) air ($Pr = 0.7296$) and (c) mercury ($Pr = 0.0251$).

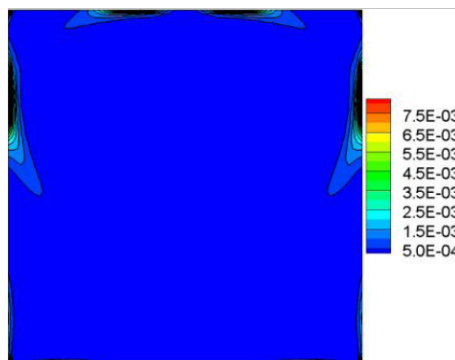
It would seem, in general terms, that the entropy generation contours have almost the same shape. However,



(a)



(b)



(c)

Fig. 13 (a) Contour of the total entropy generation S_{gen} , (b) the entropy generation due to heat transfer S_{th} , and (c) the entropy generation due to fluid friction S_{ff} for mercury at $Ri = 85$

there are slight differences depending on the type of fluid and whether the flow structure is two or four cells (before or after the bifurcation). In the case where the flow is characterized by two cells, the entropy generation is maximum and more important at the lower-left (or right) wall than at

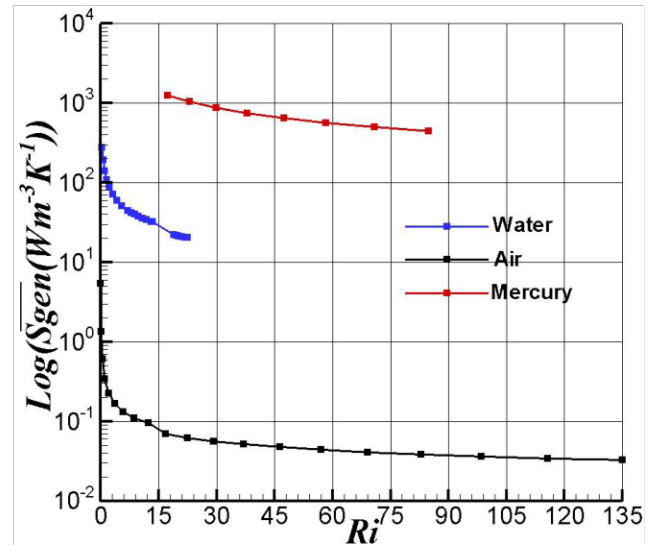


Fig. 14 Comparison of the average total entropy generation for the working fluids versus the Richardson number

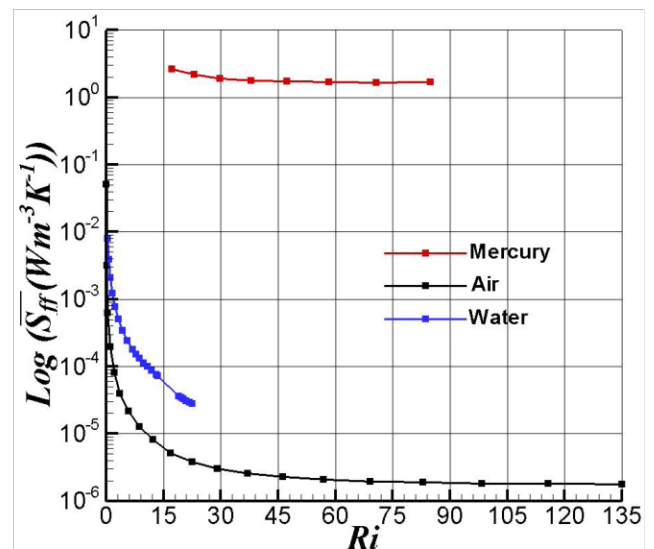
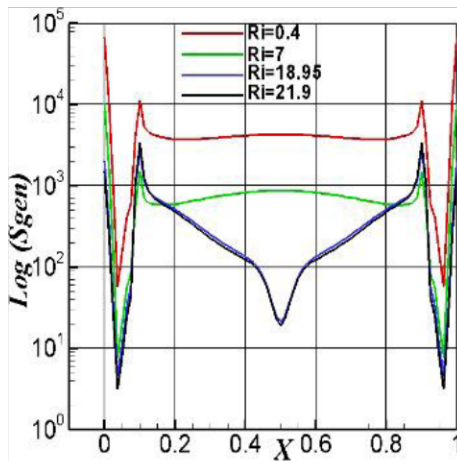
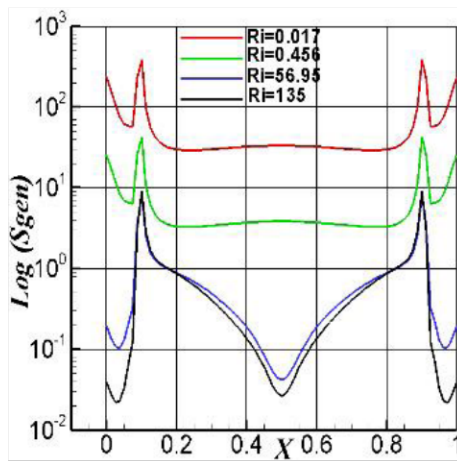


Fig. 15 Comparison of the average entropy generation due to fluid friction for the working fluids versus the Richardson number

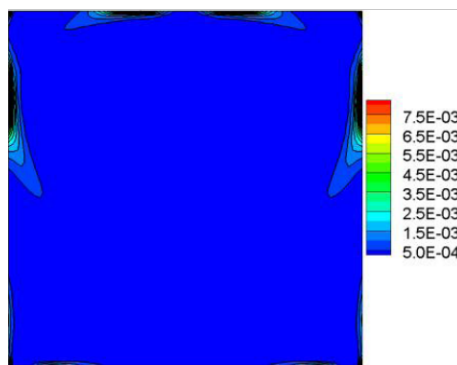
the two ends of the heat source in the case of water compared to the air case. This can be explained by the fact that more heat is removed from the heat source in the case of water than in the case of air as shown in the left column of Figs. 2 and 3. Starting at the left (or right) end of the heat source a sudden drop of the entropy generation is observed and remains at an almost constant value throughout the heated section. In the situation where the flow is characterized by four cells, the entropy generation is maximal and more important at the two ends of the heat source on the left wall (or right) than at the lower-left (or right) wall. This is because in this case, all the heat is removed from the heat source through the center of the cavity, as shown



(a)



(b)



(c)

Fig. 16 Profiles of the entropy generation on the bottom wall at different values of Richardson numbers for (a) water, (b) air and (c) mercury

in the right column of Figs. 2 and 4. Entropy generation decreases sharply from the two ends of the heat source on the left wall (or right) and then continues to decrease gradually to reach its minimum value in the center of the cavity. This is because the vertical temperature gradient

exhibits a minimum value in the middle of the heating element, as can be seen in Fig. 17. In addition, based on the boundary conditions Eq. (8) and the fact that the entropy generation due to viscous effects is negligible the total entropy generation Eq. (12) is reduced to:

$$\overline{S_{gen}}|_{Y=0} \approx s_1 \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2_{Y=0},$$

which involve a minimum value of this one.

Nevertheless and contrary to the cases of water and air, mercury for which the flow is characterized only by four cells, the generation entropy decreases in a parabolic way from the two ends of the heat source on the left wall (or right) to the center of the cavity. In addition, it should be noted that when the natural convection dominates (larger values of the Richardson number), entropy generation becomes independent of the Richardson number meaning that the temperature gradients decrease significantly in the central region and that entropy generation tends towards a relatively constant limit.

7 Conclusion

A numerical study is carried out to investigate the mixed convection within a square cavity partially heated from below with moving cooled vertical sidewalls. This investigation focused on the effect of the Prandtl number on the entropy generation.

Based on the obtained results, we can conclude that:

1. The Prandtl number strongly affects the velocity and temperature fields and, therefore, also the entropy generation.

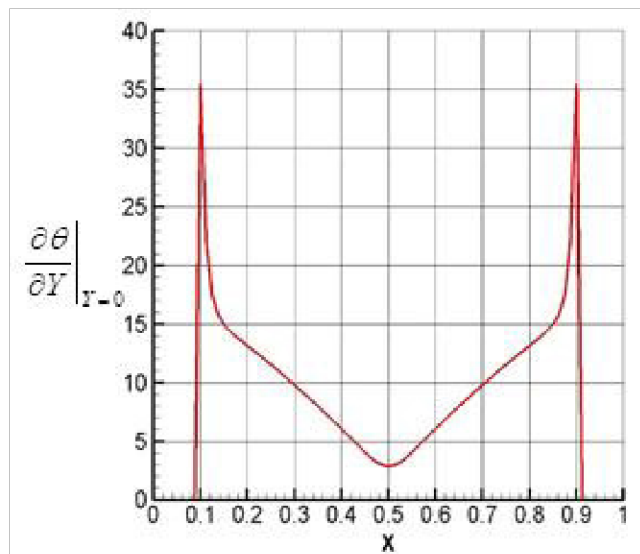


Fig. 17 Vertical temperature gradient on the bottom wall at Ri = 56.96 for air

2. The irreversibilities are dominant due to heat transfer whereas fluid friction irreversibilities represent only a minor part of the total entropy generation. This is valid irrespective of the Prandtl and Richardson numbers.
3. The entropy is mainly generated at the bottom cavity wall. The peak values are observed at the lower-left (or right) corner ($x=0$; $x=1$) and at both ends of the heat source ($x=0.1$; $x=0.9$).
4. The average total entropy generation decreases by increasing the Richardson number and it is found to be high for mercury ($Pr=0.0251$) and water ($Pr=6.263$) compared to that of air ($Pr=0.7296$). Therefore, it is highly recommended, the use of this fluid in heat transfer processes.

Acknowledgement

The authors like to express their thankfulness to the Computational Fluid Dynamics Laboratory of the Mechanical Engineering Department, of Istanbul Medeniyet University for having provided computer facilities during this work.

Nomenclature

Be	Bejan number
g	Gravitational acceleration, ms^{-2}
Gr	Grashof number ($= g\beta\Delta TL^3/\nu^2$)
k	Thermal conductivity, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
l	Length of the heat source, m
L	Length of the square cavity, m
Nu	Nusselt number
p	Fluid pressure, Pa
P	Dimensionless pressure
Pr	Prandtl number, ($= \nu/\alpha$)

References

[1] Bejan, A. "Entropy Generation through Heat and Fluid Flow", John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1982.

[2] Bejan, A. "Advanced Engineering Thermodynamics", John Wiley and Sons, New York, NY, USA, 1988.

[3] Dincer, I., Cengel, Y. A. "Energy, Entropy and Exergy Concepts and Their Roles in Thermal Engineering", Entropy, 3(3), pp. 116–149, 2001.
<https://doi.org/10.3390/e3030116>

[4] Naterer, G. F., Camberos, J. A. "Entropy and the Second Law Fluid Flow and Heat Transfer Simulation", Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 17(3), pp. 360–371, 2003.
<https://doi.org/10.2514/2.6777>

Ra	Rayleigh number, ($=Gr Pr$)
Re	Reynolds number, ($= v_w L/\nu$)
Ri	Richardson number ($= Ra/PrRe^2$)
S_{gen}	Entropy generation, $\text{Wm}^{-3}\text{K}^{-1}$
t	Time, s
T	Absolute temperature, K
T_c	Sidewall temperature, K
T_h	Heat source temperature, K
T_{ref}	Bulk temperature $(T_h + T_c)/2$, K
u, v	Velocity components in x, y directions, m s^{-1}
U, V	Dimensionless velocities in X and Y direction
v_w	Sidewall velocity, m s^{-1}
x, y	Dimensional Cartesian coordinates, m
X, Y	Dimensionless Cartesian coordinates

Greek symbols

α	Thermal diffusivity, m^2s^{-1}
β	Thermal expansion coefficient, K^{-1}
ε	Dimensionless length of the heat source (l/L)
ΔT	Temperature difference ($T_h - T_c$), K
Θ	Dimensionless temperature
ν	Kinematic viscosity, m^2s^{-1}
μ	Dynamic viscosity, $\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$
ρ	Density, kg m^{-3}
τ	Dimensionless time
ψ	Stream function, m^2s^{-1}
Ψ	Dimensionless stream function
ω	Vorticity, s^{-1}
Ω	Dimensionless vorticity

Subscripts

ff	Fluid friction
th	Heat transfer

[5] Sciacovelli, A., Verda, V., Sciubba, E. "Entropy generation analysis as a design tool - A review", Renewable and Sustainable Energy Reviews, 43, pp. 1167–1181, 2015.
<https://doi.org/10.1016/j.rser.2014.11.104>

[6] Sauerheber, R. "Thermodynamics and Entropy in Natural and Artificial Systems", American Research Journal of Chemistry, 2(1), pp. 1–26, 2018.
<https://doi.org/10.21694/2577-5898.18001>

[7] Bejan, A. "Second law analysis in heat transfer", Energy, 5(8–9), pp. 720–732, 1980.
[https://doi.org/10.1016/0360-5442\(80\)90091-2](https://doi.org/10.1016/0360-5442(80)90091-2)

[8] Bejan, A. "Entropy Generation Minimization", CRC Press, Boca Raton, FL, USA, 1996.

- [9] Oztop, H. F., Al-Salem, K. "A review on entropy generation in natural and mixed convection heat transfer for energy systems", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 16(1), pp. 911–920, 2012.
<https://doi.org/10.1016/j.rser.2011.09.012>
- [10] Awad, M. M. "A review of entropy generation in micro channels", *Advances in Mechanical Engineering*, 7(12), pp. 1–32, 2015.
<https://doi.org/10.1177/1687814015590297>
- [11] Biswal, P., Basak, T. "Entropy generation vs energy efficiency for natural convection based energy flow in enclosures and various applications: A review", *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 80, pp. 1412–1457, 2017.
<https://doi.org/10.1016/j.rser.2017.04.070>
- [12] Torabi, M., Zhang, K., Karimi, N., Peterson, G. P. "Entropy generation in thermal systems with solid structures - A concise review", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 97, pp. 917–931, 2016.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.03.007>
- [13] Cheng, T. S. "Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers", *International Journal of Thermal Sciences*, 50(2), pp. 197–205, 2011.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2010.09.012>
- [14] Błasiak, P., Kolasiński, P. "Modelling of the mixed convection in a lid-driven cavity with a constant heat flux boundary condition", *Heat and Mass Transfer*, 52(3), pp. 595–609, 2016.
<https://doi.org/10.1007/s00231-015-1583-6>
- [15] Rahman, M.s., Nasrin, R., Hoque, M. I. "Prandtl Number Effect on Nanofluid Flow inside a Porous Cavity", In: *The IIER International Conference*, Dhaka, Bangladesh, 2018, pp. 1–6
- [16] Moon, J. Y., Chung, B. J. "Influence of Prandtl number, height and lateral cooling condition on laminar natural convection in a rectangular enclosure", *Heat and Mass Transfer*, 55(6), pp. 1593–1605, 2019.
<https://doi.org/10.1007/s00231-018-02540-7>
- [17] Kaluri, R. S., Basak, T. "Entropy generation due to natural convection in discretely heated porous square cavities", *Energy*, 36(8), pp. 5065–5080, 2011.
<https://doi.org/10.1016/j.energy.2011.06.001>
- [18] Ramakrishna, D., Basak, T., Roy, S., Momoniat, E. "Analysis of thermal efficiency via analysis of heat flow and entropy generation during natural convection within porous trapezoidal cavities", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 77, pp. 98–113, 2014.
<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2014.04.002>
- [19] Rathnam, V. M., Roy, M., Basak, T. "Analysis of entropy generation during natural convection in tilted triangular enclosures with various base angles", *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, 69(12), pp. 1332–1354, 2016.
<https://doi.org/10.1080/10407782.2016.1139976>
- [20] Wei, Y., Wang, Z., Qian, Y. "A Numerical Study on Entropy Generation in Two-Dimensional Rayleigh-Bénard Convection at Different Prandtl Number", *Entropy*, 19(9), Article number: 443, 2017.
<https://doi.org/10.3390/e19090443>
- [21] Pordanjani, A. H., Aghakhani, S., Karimipour, A., Afrand, M., Goodarzi, M. "Investigation of free convection heat transfer and entropy generation of nanofluid flow inside a cavity affected by magnetic field and thermal radiation", *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 137(3), pp. 997–1019, 2019.
<https://doi.org/10.1007/s10973-018-7982-4>
- [22] Mliki, B., Abbassi, M. A. "Entropy generation of MHD natural convection heat transfer in a heated incinerator using hybrid-nanofluid", *Propulsion and Power Research*, 2021.
<https://doi.org/10.1016/j.jprr.2021.01.002>
- [23] Roy, M., Roy, S., Basak, T. "Analysis of entropy generation on mixed convection in square enclosures for various horizontal or vertical moving wall(s)", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 68, pp. 258–266, 2015.
<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2015.08.023>
- [24] Roy, M., Basak, T., Roy, S. "Analysis of Entropy Generation During Mixed Convection in Porous Square Cavities: Effect of Thermal Boundary Conditions", *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, 68(9), pp. 925–957, 2015.
<https://doi.org/10.1080/10407782.2015.1023134>
- [25] Roy, M., Basak, T., Roy, S., Pop, I. "Analysis of Entropy Generation for Mixed Convection in a Square Cavity for Various Thermal Boundary Conditions", *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, 68(1), pp. 44–74, 2015.
<https://doi.org/10.1080/10407782.2014.955352>
- [26] Roy, M., Biswal, P., Roy, S., Basak, T. "Role of various moving walls on entropy generation during mixed convection within entrapped porous triangular cavities", *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, 71(4), pp. 423–447, 2017.
<https://doi.org/10.1080/10407782.2016.1277927>
- [27] Goodarzi, M., Safaei, M. R., Oztop, H. F., Karimipour, A., Sadeghinezhad, E., Dahari, M., Kazi, S. N., Jomhari, N. "Numerical Study of Entropy Generation Due to Coupled Laminar and Turbulent Mixed Convection and Thermal Radiation in an Enclosure Filled with a Semitransparent Medium", *The Scientific World Journal*, 2014, Article ID: 761745, 2014.
<https://doi.org/10.1155/2014/761745>
- [28] Aghaei, A., Sheikhzadeh, G. A., Goodarzi, M., Hasani, H., Damirchi, H., Afrand, M. "Effect of horizontal and vertical elliptic baffles inside an enclosure on the mixed convection of a MWCNTs-water nanofluid and its entropy generation", *European Physical Journal Plus*, 133(11), Article number: 486, 2018.
<https://doi.org/10.1140/epjp/i2018-12278-4>
- [29] Yousefzadeh, S., Rajabi, H., Ghajari, N., Sarafraz, M. M., Akbari, O. A., Goodarzi, M. "Numerical investigation of mixed convection heat transfer behavior of nanofluid in a cavity with different heat transfer areas", *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 140(6), pp. 2779–2803, 2020.
<https://doi.org/10.1007/s10973-019-09018-6>
- [30] Ebrahimi, D., Yousefzadeh, S., Akbari, O. A., Montazerifar, F., Rozati, S. A., Nakhjavani, S., Safaei, M. R. "Mixed convection heat transfer of a nanofluid in a closed elbow-shaped cavity (CESC)", *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 144(6), pp. 2295–2316, 2021.
<https://doi.org/10.1007/s10973-021-10548-1>

- [31] Kashyap, D., Dass, A. K., Oztop, H. F., Abu-Hamdeh, N. "Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann analysis of entropy generation in a hot-block-inserted square cavity for different Prandtl numbers", *International Journal of Thermal Sciences*, 165, Article number: 106948, 2021.
<https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2021.106948>
- [32] Khan, U., Zaib, A., Khan, I., Nisar, K. S. "Entropy Generation Incorporating γ -Nanofluids under the Influence of Nonlinear Radiation with Mixed Convection", *Crystals*, 11(4), Article number: 400, 2021.
- [33] Gray, D. D., Giorgini, A. "The validity of the boussinesq approximation for liquids and gasses", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 19(5), pp. 545–551, 1976.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(76\)90168-X](https://doi.org/10.1016/0017-9310(76)90168-X)
- [34] Jayanthi, S., Kavitha, T. "A modified compact numerical algorithm to solve 2D Navier-Stokes equation", *Results in Applied Mathematics*, 3, Article number: 100065, 2019.
<https://doi.org/10.1016/j.rinam.2019.100065>
- [35] Abbasian Arani, A. A., Monfaredi, F., Aghaei, A., Afrand, M., Chamkha, A. J., Emami, H. "Thermal radiation effect on the flow field and heat transfer of Co_3O_4 -diamond/EG hybrid nanofluid using experimental data: A numerical study", *European Physical Journal Plus*, 134(1), Article number: 13, 2019.
<https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-12431-7>
- [36] Kawamura, T., Takami, H., Kuwahara, K. "New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations", In: *Soubbaramayer, Boujot, J. P. (eds.) Ninth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer, Berlin, Heidelberg, Germany, 1985, pp. 291–295.
https://doi.org/10.1007/3-540-13917-6_152
- [37] De Vahl Davis, G., Jones, I. P. "Natural convection in a square cavity: A comparison exercise", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3(3), pp. 227–248, 1983.
<https://doi.org/10.1002/fld.1650030304>
- [38] De Vahl Davis, G. "Natural convection of air in a square cavity: A bench mark numerical solution", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 3(3), pp. 249–264, 1983.
<https://doi.org/10.1002/fld.1650030305>
- [39] Balam, N. B., Gupta, A. "Numerical solution of natural-convection flow in enclosures: An implicit vorticity boundary condition type method", *Heat Transfer Research*, 50(14), pp. 1383–1416, 2019.
<https://doi.org/10.1615/heattransres.2019028547>
- [40] Ilis, G. G., Mobedi, M., Sunden, B. "Effect of aspect ratio on entropy generation in a rectangular cavity with differentially heated vertical walls", *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 35(6), pp. 696–703, 2008.
<https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.02.002>
- [41] Oliveski, R. D. C., Macagnan, M. H., Copetti, J. B. "Entropy generation and natural convection in rectangular cavities", *Applied Thermal Engineering*, 29(8–9), pp. 1417–1425, 2009.
<https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2008.07.012>
- [42] Shavik, S. M., Nasim Hassan, M., Monjur Morshed, A. K. M., Quamrul Islam, M. "Natural Convection and Entropy Generation in a Square Inclined Cavity with Differentially Heated Vertical Walls", *Procedia Engineering*, 90, pp. 557–562, 2014.
<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.772>
- [43] Jassim, H. M., Ali, F. H., Al-Amir, Q. R., Hamzah, H. K., Khafaji, S. O. W. "Entropy generation analysis of a natural convection inside a sinusoidal enclosure with different shapes of cylinders", *Frontiers in Heat and Mass Transfer*, 12, Article number: 22, 2019.
<https://doi.org/10.5098/hmt.12.22>
- [44] Çengel, Y. A., Ghajar, A. J. "Heat and Mass Transfer: Fundamentals & Applications", McGraw Hill Education, London, UK, 2015.
- [45] Biswas, N., Manna, N. K. "Transport phenomena in a side-wall-moving bottom-heated cavity using heat lines", *Sādhanā*, 42(2), pp. 193–211, 2017.
<https://doi.org/10.1007/s12046-016-0586-4>
- [46] Moallemi, M. K., Jang, K. S. "Prandtl number effects on laminar mixed convection heat transfer in a lid-driven cavity", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(8), pp. 1881–1892, 1992.
[https://doi.org/10.1016/0017-9310\(92\)90191-T](https://doi.org/10.1016/0017-9310(92)90191-T)
- [47] Monaledi, R. L., Makinde, O. D. "Entropy generation analysis in a microchannel Poiseuille flows of nanofluid with nanoparticles injection and variable properties", *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 143(3), pp. 1855–1865, 2021.
<https://doi.org/10.1007/s10973-020-09919-x>

NEW APPROACH TO COMPUTE ACCURATELY THE ENTROPY GENERATION DUE TO NATURAL CONVECTION IN A SQUARE CAVITY

Saadoun Boudebous^{1*}, Nawal Ferroudj²

¹ Faculty of Sciences and Applied Sciences, University of Larbi Ben M'hidi, Oum el Bouaghi, Algeria

² Laboratory of Biotechnology, National Higher School of Biotechnology (ENSB), Constantine 3, Algeria

Abstract. The idea to carry out an exercise to compare the calculation of entropy generation for unsteady natural convection in a square cavity with vertical sides that are maintained at different temperatures was motivated by the observation, in the literature, of inaccurate or often erroneous results concerning the values of this significant physical entity. It then appeared necessary to reconsider this problem in order to ensure its consistent assessment. The new approach that we propose allows a direct access to the value of the entropy generation by considering the exact values of the thermophysical properties of the working fluid, which depends on the Prandtl and the Rayleigh numbers.

* Corresponding author: s.boudebous@gmail.com

1 Introduction

It is well established that convective heat transfer processes are always accompanied by a loss of energy commonly referred to as "Entropy Generation" in the scientific literature [1]. Accurately determining the entropy generation in applied thermal engineering is the indispensable prerequisite for the design of different types of thermal exchanging devices [2]. Entropy generation has been and continues to be the subject of many research activities over the past decades, as shown by the significant review articles by Oztop and Al-Salem [3], Sciacovelli et al. [4], and more recently by Kumar et al. [5], and Cai et al. [6]. Solving the entropy generation equation during fluid flows in a natural convection regime, which will be developed later, requires the calculation of a coefficient called "the irreversibility distribution ratio", oftentimes symbolized by the Greek letter ϕ .

One real problem lies in an accurate determination of the irreversibility distribution ratio value. Until now, the computing of the relevant value of this ratio has not yet been well established and the gap between the values proposed by different authors can be quite significant. Hussein et al. [7], and Oztop et al. [8], present and discuss the results for entropy generation without specifying any value of the irreversibility ratio. Shavik et al. [9], Yejjer et al. [10], Jassim et al. [11] and Seyyedi et al. [12], impose values of the same ratio ranging from 10^{-3} to 10^{-5} with no explanation. In the same way, Erbay et al. [13, 14], specify values which increase linearly with the Rayleigh number (Ra), starting at 10^{-13} for $Ra=10^2$ to reach 10^{-9} for $Ra=10^6$, with constant steps of 10. Rathnam et al. [15], use an order of magnitude analysis of parameters to evaluate the same ratio at 10^{-3} . Magherbi et al. [16], Ilis et al. [17], De C. Oliveski et al. [18], and Bouabid et al. [19], consider this coefficient as an investigative parameter in the same way as the Rayleigh, or Prandtl numbers for example in [16], ϕ varies from 10^{-4} to 10^{-1} and in [17-18-19], ϕ varies from 10^{-4} to 10^{-2} . However, we would also point out that, until very recently (05 February 2021) Karki et al. [20] investigates the exergy analysis of Rayleigh–Benard natural convection by varying the irreversibility ratio ϕ between 10^{-2} and 10^{-5} . Finally, it must be stressed that we identified a numerical study of natural convection and entropy generation reported by Khorasanizadeh and Nikfar [21], in which they have doubts about the fact that the irreversibility distribution ratio ϕ remains constant while at the same time Rayleigh number varies considerably. The values suggested by these authors vary according to the Rayleigh number and are certainly more important than such as the ones already proposed but they are still far from reality, and above all, there is no propose that set forth how these values were concretely obtained.

Based on the aforementioned brief review of the literature, which revealed many shortcomings in the determination of the exact value of the irreversibility distribution ratio ϕ , that we propose a new pragmatic approach in order to estimate the fair value of the entropy generation in confined spaces.

2 Problem description

The benchmark problem considered here is the differentially heated square cavity problem depicted in Figure 1. It is similar to those referenced by Magherbi et al. [16], Ilis et al. [17], De C. Oliveski et al. [18], and Bouabid et al. [19]

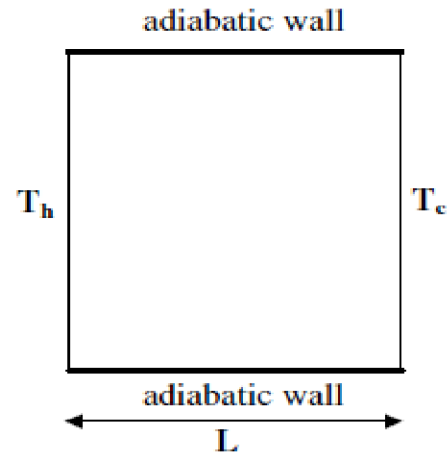


Fig. 1. A schematic view of the benchmark problem [16].

3 Mathematical formulation

The stream function-vorticity (ψ, ω) formulation is used to express the dimensional governing equations for the laminar and unsteady state natural convection in Cartesian coordinates x and y .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \omega \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

here $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

The numerical resolution of the previous system of equations requires the following initial and boundary conditions:

At $\tau=0$ and for whole space.

$$\psi = \omega = 0, T = T_0 + \Delta T \left(0.5 - \frac{x}{L} \right) \quad 0 \leq x \leq L$$

At $\tau > 0$

$$\psi = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ and } T = T_h \text{ at left wall}$$

$$\psi = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \text{ and } T = T_c \text{ at right wall}$$

$$\psi = 0, \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \text{ and } \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \text{ at bottom and top walls.}$$

The average Nusselt number \overline{Nu} can be expressed, on the basis of the dimensional variables, as follows:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\Delta T} \int_0^L \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} dy \quad (1)$$

The local entropy generation is given by [21]:

$$s_{gen} = \frac{k}{T_0^2} \left\{ \underbrace{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2}_{s_{th}} \right. \\ \left. + \underbrace{\frac{\mu}{T_0} \left\{ 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\}}_{s_{ff}} \right\} \quad (2)$$

The total entropy generation is the integral over the system volume of the local entropy generation:

$$\overline{s_{gen}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} s_{gen} d\mathcal{V} \quad (3)$$

Another parameters that characterizes the irreversibilities distribution are the local and the average Bejan number defined respectively as [16]

$$be = \frac{s_{th}}{s_{gen}} \quad \overline{be} = \frac{1}{\mathcal{V}} \int_{\mathcal{V}} be d\mathcal{V} \quad (4)$$

The dimensionless form of the governing equations may be written with following dimensionless variables:

$$X, Y = \frac{1}{L} [x, y], \quad \Theta = \frac{T - T_0}{T_h - T_c}, \quad U, V = \frac{L}{\alpha} [u, v], \quad \tau = \frac{\alpha}{L^2} t$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} &= \Omega \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} &= Pr \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right) + RaPr \frac{\partial \Theta}{\partial X} \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} &= \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Where $U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$$

The average Nusselt number \overline{Nu} can be expressed, on the basis of the dimensionless variables, as follows:

$$\overline{Nu} = \frac{1}{\Delta T} \int_0^1 \left. \frac{\partial \Theta}{\partial X} \right|_{X=0} dY \quad (5)$$

And the local entropy generation, with the same dimensionless variables is given by:

$$S_{gen} = c_1 \underbrace{\left(\frac{\partial \Theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Theta}{\partial Y} \right)^2}_{s_{th}} \\ + c_2 \underbrace{\left\{ 2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right\}}_{s_{ff}} \quad (6)$$

The total entropy generation is given by:

$$\overline{S_{gen}} = \int_0^1 \int_0^1 S_{gen} dXdY \quad (7)$$

The two irreversibilities coefficient are:

$$c_1 = k \left(\frac{\Delta T}{T_0 L} \right)^2 \quad c_2 = \frac{\mu}{T_0} \left(\frac{\alpha}{L^2} \right)^2 \quad (8)$$

The first term in equations (2) and (6) is the local entropy generation due to heat transfer and the second term is the local entropy generation due to fluid friction.

The dimensionless form of Eq. (4) takes the form

$$Be = \frac{S_{th}}{S_{gen}} \quad \overline{Be} = \int_0^1 \int_0^1 Be dXdY \quad (9)$$

At this point it must be underlined that the lowercase letters correspond to the dimensional variables and the uppercase letters correspond to the dimensionless variables.

It should be noted that to appraise the total volumetric entropy generation all the authors previously cited use the local entropy generation number defined by:

$$N_S = \frac{S_{gen}}{c_1} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \\ + \varphi \left[2 \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right] \quad (10)$$

Where φ is the irreversibility distribution ratio defined

$$\text{as: } \varphi = \frac{c_2}{c_1} = \frac{\mu T_0}{k} \left(\frac{\alpha}{\Delta T} \right)^2 \frac{1}{L^2} \quad (11)$$

The total dimensionless entropy generation number is written:

$$\overline{N_S} = \int_0^1 \int_0^1 N_S dXdY \quad (12)$$

The primary objective of this work is to suggest a method that is mathematically and physically correct for the determination of the irreversibility distribution ratios thus providing the true value of the entropy generation.

4 Numerical procedure

4.1 Discretisation method

The above-mentioned systems of equations (I) and (II) subject to their respective initial and boundary conditions have been discretized by the finite difference method. Temporal discretization has been achieved using the Runge-Kutta fourth-order method (R.K.4). The convective terms have been discretized with a third-order upwind scheme as proposed by Kawamura et al. [23]. The diffusive terms, as well as the terms including the first derivatives, have been discretized by a fourth-order accurate scheme. An iterative procedure based on the successive Non Linear Over Relaxation method (NLOR) was used to solve the discretized stream function equation. Once the velocities and temperatures have been determined, the average Nusselt number (Eqs.1,5) and the characteristics of the total entropy generation in dimensional and dimensionless variables are computed

using equations (3), (4), (7), (9), and (12). An in-house FORTRAN code, with a double precision accuracy, has been developed for solving the systems of the discretized equations.

4.2 Grid independency test

Numerical tests have been made to ensure the accuracy of results for the grid used in this study. Five grid sizes (41x41; 81x81; 101x101; 161x161 and 201x201) have been considered. Table 1 shows the convergence of the average Nusselt number and the total entropy generation for Pr=0.7 and Ra=103. It should be noted that the maximum relative error does not exceed 2% between the grid sizes of 81x81 and 101x101 compared to the grid size of 201x201. Therefore, it was decided to use a non-uniform grid with 101x101 grid points for all calculations allowing a balance between accuracy and CPU time.

Table 1. Grid independence test: average Nusselt number and total entropy generation for Ra=10³, Pr = 0.

Grid	\overline{Nu}	$\overline{S_{gen}}$
41x41	1.1196	0.16057
81x81	1.1182	0.16034
101x101	1.1181	0.16034
161x161	1.1179	0.16031
201x201	1.1178	0.16030

4.3 Code Validation

In order to ensure the effectiveness of the developed code, validation was carried out to compare the values of the average Nusselt number obtained in the classic case of natural convection occurring in a square cavity with differentially heated vertical sides and insulated horizontal walls. Table 2 shows this comparison for different Rayleigh numbers when the Prandtl number is set at 0.7.

Table 2. Comparison of the present average Nusselt number with available literature

Ra	Ref.[24]	Ref.[25]	Ref.[26]	Present
10 ³	1.116	1.127	1.117	1.118
10 ⁴	2.238	2.245	2.246	2.249
10 ⁵	4.509	4.521	4.530	4.537
10 ⁶	8.817	8.800	8.822	8.825

In view of this validation, it can be concluded that the computation code developed for this study gives results in accordance with those cited in the literature.

5 Results and discussion

5.1 Details data associated with the benchmark

Numerical simulations have been performed for different Rayleigh numbers (Ra). The thermo-physical properties of the working fluid, for Prandtl number equal to 0.7, have been taken from the book by the authors Incropera et al.[27] at the bulk temperature T₀=350 K and are listed in Table 3. Furthermore, the temperature difference ΔT are kept constant at 10 K.

Table 3. Thermo-physical properties of air (Pr=0.7) at T₀=350 K expressed in the International System (SI) of units. [27]

ρ	k	μ	α	β
0.995	3.10-2	2.082 10-5	2.9910-5	2.85710-5

5.2 The irreversibility ratios calculation method

It can be seen that the irreversibility ratios c₁ and c₂ in equation (8) are directly proportional to the thermo-physical properties of the fluid, to the temperature difference ΔT, and (perhaps more importantly) to the cavity length L. All these parameters with the exception of the cavity length L are known for each Prandtl number. This effective length could be evaluated numerically from the Rayleigh number as follow:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TPr}{\nu^2} L^3 \Rightarrow L = \sqrt[3]{C^m Ra} \quad (13)$$

Where $C^m = \frac{\nu^2}{g\beta\Delta TPr}$ is a constant, and $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ is the kinematic viscosity.

This new approach does take into account all these parameters and thus provides a better reflection of the real value of the irreversibility ratios (which are given in table 4), thus providing the true value of the entropy generation.

Table 4. Real values of the irreversibility ratios for different Rayleigh numbers (Ra) and Pr=0.7

Ra	c ₁	c ₂	φ = c ₂ /c ₁
10 ³	1.4340 10 ⁻¹	1.8235 10 ⁻⁹	1.2716 10 ⁻⁸
10 ⁴	3.0896 10 ⁻²	8.4640 10 ⁻¹¹	2.7396 10 ⁻⁹
10 ⁵	6.6563 10 ⁻³	3.9287 10 ⁻¹²	5.9022 10 ⁻¹⁰
10 ⁶	1.4340 10 ⁻³	1.8235 10 ⁻¹³	1.2716 10 ⁻¹⁰

5.3 Comparison with Benchmark results

5.3.1 Method validation

The validity of the proposed method has been verified by solving the systems of equations (I) and (II) expressed with the dimensional, and the dimensionless variables respectively.

The comparisons of average Nusselt number, total entropy generation, total entropy generation due to fluid friction and average Bejan number for a Rayleigh number equal to 104 are shown in table 5. As seen, the obtained results are quite similar, because we have taken into account the thermo-physical properties of the fluid (see Table 3) and the cavity length L calculated from equation (13).

Table 5. Different parameters obtained from the equations solved with the dimensional and dimensionless variables (Ra=10⁴)

Dimensional variables	Dimensionless variables
\overline{nu} 2.249050	\overline{Nu} 2.249070
$\overline{S_{sen}}$ 6.949419 10 ⁻²	$\overline{S_{sen}}$ 6.949482 10 ⁻²
$\overline{S_{ff}}$ 8.819882 10 ⁻⁷	$\overline{S_{ff}}$ 8.820095 10 ⁻⁷
\overline{be} 0.999987308	\overline{Be} 0.999987308

5.3.2 Total entropy generation calculation

The total entropy generation equations (6) and (7) subject to the exact values of the two irreversibilities coefficient c1 and c2 given by equation (8) have been numerically solved for different Rayleigh numbers. The obtained results, given in figure 2, provide a direct measurement of the total entropy generation in the physical domain expressed in W/m³K. It should be noted that they are most helpful to the engineers and designers in order to design and optimize different types of equipment involving heat transfer in fluid flows.

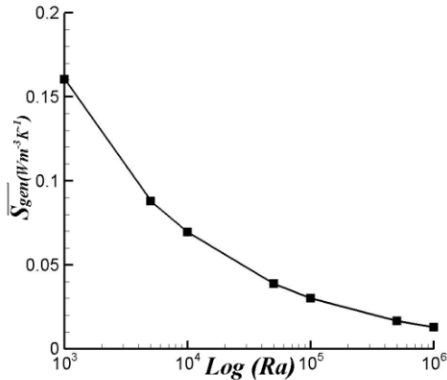


Fig. 2. Total entropy generation $\overline{S_{gen}} [Wm^{-3}K^{-1}]$ versus the Rayleigh numbers (Ra).

5.3.3 Total dimensionless entropy generation number

Total dimensionless entropy generation number versus Rayleigh numbers is shown graphically in Figures 3 and 4. In figure 3 the total dimensionless entropy generation number is computed with an the irreversibility distribution ratio ϕ , by taking account of the thermo-physical properties of the fluid (see Table 3) and the cavity length L calculated from equation (13), while, in figure 4 the same parameter is computed with an the irreversibility distribution ratio ϕ , which is set arbitrarily at 10⁻⁴, according to the approach adopted by Magherbi et al. [16], Ilis et al. [17], De C. Oliveski et al. [18], and Bouabid et al. [19].

We clearly observe some of the numerical differences in solutions between the two approaches for the total dimensionless entropy generation number (\overline{Ns}). In figure 3 \overline{Ns} varies on a scale of 1 to 9 with a slightly increasing slope, while in figure 4 \overline{Ns} varies from 1 to

400. This variation is moderately progressive for Ra less than 10⁵ and becomes exponential afterwards.

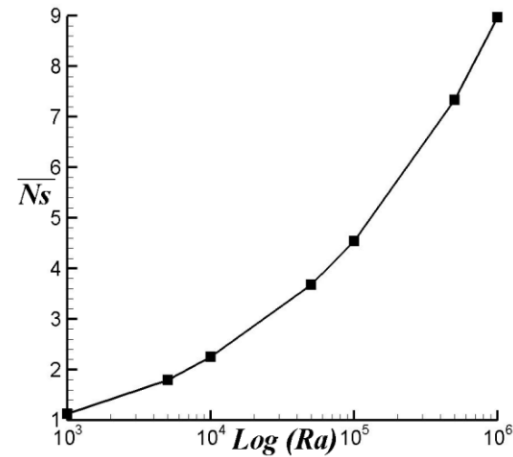


Fig. 3. Total dimensionless entropy generation number versus the Rayleigh numbers (Ra) according to our approach.

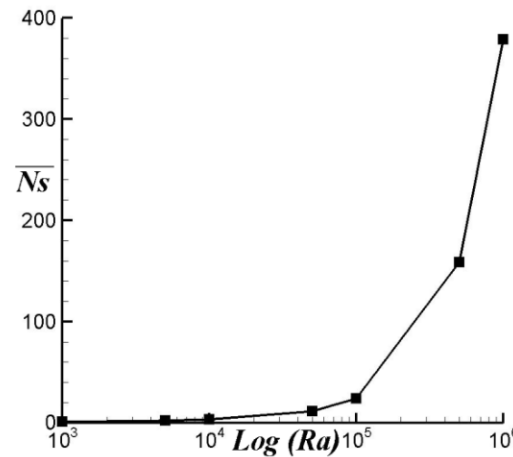


Fig. 4. Total dimensionless entropy generation number versus the Rayleigh numbers (Ra) according to the approach referenced in [16-19].

5.3.4 Formatting the title

The evolution of the average Bejan number is shown in Figure 5 and, 6 respectively, for different Rayleigh numbers. The same qualitative trend in the evolution of the average Bejan number appear in the bench mark solution (figures 5-6).The obvious difference between the two solutions lies in the fact that the average Bejan number is close to one, according to our approach, while the same parameter varies significantly from 0.02 to 1, according to the approach referenced in [16-19], when the irreversibility distribution ratio value is set at $\phi=10^{-4}$. This could be explained by the fact that irrespective of the Rayleigh number the irreversibility distribution ratio ϕ is very small (see table 4) compared to that chosen for the benchmark test ($\phi=10^{-4}$). As a result, the total entropy generation due to fluid friction is negligible, which implies an average Bejan number close to one. This result confirms the commonly adopted hypothesis, which states that the viscous dissipation function is neglected in the energy transport equation.

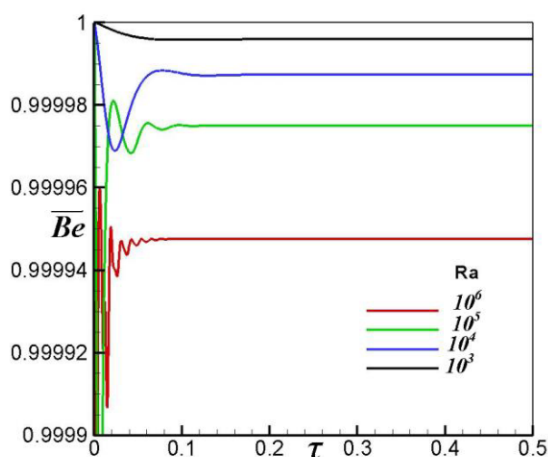


Fig. 5. Evolution of average Bejan number versus the Rayleigh numbers (Ra) according to our approach.

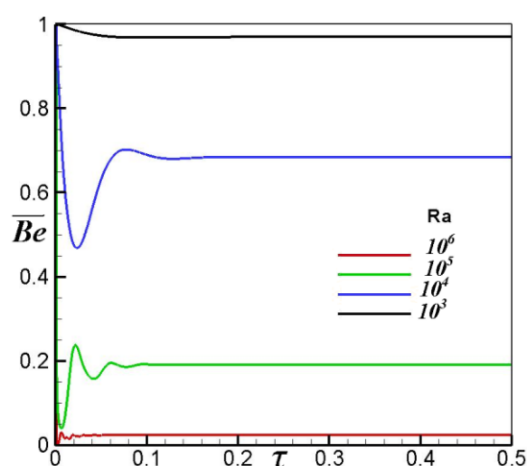


Fig. 6. Evolution of average Bejan number versus the Rayleigh numbers (Ra) according to the approach referenced in [16-19], ($\phi=10^{-4}$)

6 Conclusion

In the present work, details are given of a new approach used to obtain an accurate determination of the entropy generation for unsteady natural convection in a square cavity with differentially heated sidewalls. The conclusions are summarized as follows:

- 1 From the mathematical point of view, it is clear that the characteristic length L is proportional to the Rayleigh number and then cannot be assumed as constant, especially if this number varies quite considerably.
- 2 The irreversibility distribution ratio number varies significantly according to the Rayleigh number and hence it can, in no case, be considered as a constant.

- 3 One and only one value of the irreversibility distribution ratio ϕ corresponds to each fluid characterized by its Prandtl and Rayleigh numbers.
- 4 The irreversibility distribution ratio ϕ is proportional to the inverse of the characteristic length L squared, and thus its value decreases when the characteristic length L (or Rayleigh number) increases.
- 5 The values of the irreversibility distribution ratio ϕ proposed by different authors are being overestimated resulting often lead to an over-sizing of the heat transfer processes equipment.
- 6 Though the present results are restricted to natural convection in confined spaces of limited Prandtl number and Rayleigh numbers, the procedure is general and can be equally applied to various problems including mixed convection, nanofluids flows, turbulent flows, and so on.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors like to express their thankfulness to the Computational Fluid Dynamics Laboratory of the Mechanical Engineering Department, of Istanbul Medeniyet University, Turkey for having provided computer facilities during this work.

NOMENCLATURE

Be	Bejan number
g	Gravitational acceleration, ms^{-2}
Gr	Grashof number ($= g\beta\Delta T L^3 / \nu^2$)
k	Thermal conductivity, $\text{Wm}^{-1} \text{K}^{-1}$
L	Length of the square cavity, m
Pr	Prandtl number, ($= \nu/\alpha$)
Ra	Rayleigh number, ($= \text{Gr Pr}$)
S_{gen}	Entropy generation, $\text{Wm}^{-3} \text{K}^{-1}$
t	Time, s
T	Absolute temperature, K
T_0	Bulk temperature $(T_h + T_c)/2$, K
u, v	Velocity components in x, y directions, m s^{-1}
U, V	Dimensionless velocities in X and Y direction
\mathcal{V}	System volume
x, y	Dimensional Cartesian coordinates, m
X, Y	Dimensionless Cartesian coordinates

Greek symbols

α	Thermal diffusivity, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
β	Thermal expansion coefficient, K^{-1}
ΔT	Temperature difference $((T_h - T_c)$, K
Θ	Dimensionless temperature
ν	Kinematic viscosity, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
μ	Dynamic viscosity, $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$
ϕ	Irreversibility distribution ratio

ρ	Density, kg m ⁻³
τ	Dimensionless time
ψ	Stream function, m ² .s ⁻¹
Ψ	Dimensionless stream function
ω	Vorticity, s ⁻¹
Ω	Dimensionless vorticity

Subscripts

ff	Fluid friction
th	Heat transfer

References

1. Bejan, A., Entropy Generation through Heat and Fluid Flow, Wiley, New York (1982).
2. A. Bejan, Entropy generation minimization, The new thermodynamics of finite size devices and finite time processes, Journal of Applied Physics 79, 1191, (1996).
3. H.F. Oztop, K. Al-Salem, A review on entropy generation in natural and mixed convection heat transfer for energy systems, Renewable and Sustainable Energy Reviews, Vol 16(1) :pp911-920, (2012).
4. A. Sciacovelli, V. Verda, E. Sciubba, Entropy generation analysis as a design tool-A review, Renew. Sust. Energ. Rev. 43, 1167-1181, (2015).
5. K. Kumar, R. Kumar, R. Singh Bharj, Entropy generation analysis due to heat transfer and nanofluid flow through microchannels: a review, Int. J. Exergy, Vol. 31(1) :pp49-86, (2020).
6. M. Cai, P. Cui, Y. Qin, D. Geng, Q. Wei, X. Wang, D. Yang, G. Zhang, Entropy Generation Methodology for Defect Analysis of Electronic and Mechanical Components-A Review, Entropy, Vol. 22(254) :pp1-19, (2020).
7. A. Hussein, K. Lioua, R. Chand, S. Sivasankaran, R. Nikbakhti, D. Li, B. Naceur and B. Habib, Three-dimensional unsteady natural convection and entropy generation in an inclined cubical trapezoidal cavity with an isothermal bottom wall, Alexandria Engineering Journal (55) :pp741-755, (2016).
8. H.F. Oztop, M. A. Almehaal , L. Kolsi , M. M. Rashidi and M. E. Ali, Natural Convection and Irreversibility Evaluation in a Cubic Cavity with Partial Opening in Both Top and Bottom Sides, Entropy 21(116), (2019).
9. Shavik, S. M. Nasim Hassan, M. Monjur Morshed, A. K. M. Quamrul Islam, Natural convection and entropy generation in a square inclined cavity with differentially heated vertical walls. Procedia Engineering (90) :pp557-562, (2014).
10. O. Yejjer, L. Kolsi, Abdullah A.A.A. Al-Rashed, A. Aydi, M. N.Borjini1, H. Ben Aissial, Numerical analysis of natural convection and entropy generation in a 3D partitioned cavity, International Journal of Heat and Technology 35 (4) :pp933-943, (2017).
11. H. M. Jassim, F. H. Ali, Q. R. Al-Amir, H. K. Hamzah, S. O. W. Khafaji, Entropy Generation Analysis of a Natural Convection inside a Sinusoidal Enclosure with Different Shapes of Cylinders, Frontiers in Heat and Mass Transfer 12(22), (2019).
12. S. M. Seyyedi, A.S. Dogonchi, M. Hashemi-Tilehnoee, M. Waqas, D. D. Ganji, Investigation of entropy generation in a square inclined cavity using control volume finite element method with aided quadratic Lagrange interpolation functions, International Communications in Heat and Mass Transfer (110) :pp104-398, (2020).
13. L. B. Erbay , Z. Altaç, B. Sülüş, An Analysis Of The Entropy Generation In A Square Enclosure, Entropy (5) :pp496-505, (2003).
14. L. B. Erbay , Z. Altaç, B. Sülüş, Entropy generation in a square enclosure with partial heating from a vertical lateral wall, Heat and Mass Transfer (40) :pp909-918, (2004).
15. V. Mani Rathnam, M. Roy & T. Basak, Analysis of entropy generation during natural convection in tilted triangular enclosures with various base angles, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications 69(12) :pp1332-1354, (2016).
16. M. Magherbi, H. Abbassi, and A. B. Brahim, Entropy Generation at the Onset of Natural Convection, Int. J. Heat Mass Transfer (46) :pp3441-3450, (2003).
17. G.M. Ilis, M. Mobedi, B. Sunden, Effect of aspect ratio on entropy generation in a rectangular cavity with differentially heated vertical walls. International Communication in Heat Mass Transfer 35(6) :pp96-703, (2008).
18. Rejane De C. Oliveski, Mario H. Macagnan, Jacqueline B. Copetti, Entropy generation and natural convection in rectangular cavities, Applied Thermal Engineering Vol (29):pp1417-1425, (2009).
19. M. Bouabid, M. Magherbi, N. Hidouri, A. Ben Brahim, Entropy Generation at Natural Convection in an Inclined Rectangular Cavity, Entropy (13) : pp1020-1033, (2011).
20. P. Karki, D. A. Perumal, A.K. Yadav, Comparative studies on air, water and nanofluids based Rayleigh–Benard natural convection using lattice Boltzmann method:CFD and exergy analysis, J Therm Anal Calorim, (2021).
21. H. Khorasanizadeh, J. Amani, M. Nikfar, Numerical investigation of Cu-water Nano fluid natural convection and entropy generation within a cavity with an embedded conductive baffle, Scientia Iranica Transactions F, Nanotechnology 19(6) :pp1996-2003, (2012).
22. Bejan, A., Convection Heat Transfer, 4th Edition, John Wiley & Sons, Chap (1) :p17, Inc. Hoboken, New Jersey (2013).
23. T. Kawamura, H.Takami, K. Kuwahara, New higher order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations. Ninth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. Lecture Notes in Physics, Vol (218) : pp291-295, (1985).
24. G. de Vahl Davis, Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Benchmark Numerical Solution,

- Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol(3) :pp249-264, (1983).
25. P. Nithiarasu, K. N. Seetharamu, T. Sundararajan, Natural Convective Heat Transfer in a Fluid Saturated Variable Porosity Medium, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol(40) :pp3955-3967, (1997).
 26. D. Santhosh Kumar, A. K. Dass, A. Dewan, Analysis of Non-Darcy Models for Mixed Convection in a Porous Cavity Using a Multigrid Approach, *Numerical Heat Transfer, Part (A), Applications* 56(8) :pp685-708, (2009).
 27. Incropera, F. P., Dewitt, D. P., Bergman, T. L., and Lavine, A. S., *Fundamentals of heat and mass transfer*, 6th edition, John Wiley & Sons, (2007).



Shahid Chamran
University of Ahvaz

Journal of Applied and Computational Mechanics



Research Paper

Mixed Convection Heat Transfer and Entropy Generation in a Water-filled Square Cavity Partially Heated from Below: The Effects of Richardson and Prandtl Numbers

Nawal Ferroudj^{1,2}, Hasan Koten³, Saadoun Boudebous⁴

¹ Faculty of Process Engineering, University of Salah Bounider Constantine 3, 25016, Algeria, Email: n.ferroudj@ensbiotech.edu.dz

² Laboratory of Biotechnology, National Higher School of Biotechnology (ENSB), Constantine 3, Algeria, 25016, Email: n.ferroudj@ensbiotech.edu.dz

³ Mechanical Engineering Department, Computational Fluid Dynamics Laboratory, Istanbul Medeniyet University, Turkey, Email: hasan.koten@medeniyet.edu.tr

⁴ Faculty of Sciences and Applied Sciences, University of Larbi BenM'hidi, Oum el Bouaghi, 04000, Algeria, Email: s.boudebous@gmail.com

Received September 20 2021; Revised October 17 2021; Accepted for publication October 17 2021.

Corresponding author: S. Boudebous (s.boudebous@gmail.com)

© 2022 Published by Shahid Chamran University of Ahvaz

Abstract. In the present study, fluid flow, heat transfer, and entropy generation for mixed convection inside a water-filled square cavity were investigated numerically. The sidewalls of the cavity, which move upwards, are kept at low-temperature T_c while only a part in the center of the bottom wall is kept at high-temperature T_h and the remaining parts are kept adiabatic. The governing equations, in stream function–vorticity form, are discretized and solved using the finite difference method. Particular attention was paid to the influence of the Prandtl numbers of 5.534, 3.045 and 2, corresponding respectively to the water temperatures of 303.15 K, 333.15 K and 363.15 K. The numerical results are presented in the form of streamlines, isotherms, and entropy generation contours for different values of the Richardson numbers at an arbitrary Reynolds number $Re=10^2$. Besides this, the evolution of the average Nusselt number and the average entropy generation is also reported. The obtained results show interesting behaviors of the flow and thermal fields, which mainly involve stable symmetric and non-symmetric steady-state solutions, as well as unsteady regimes, depending on specific values of the Richardson and Prandtl numbers. It is additionally observed that the average Nusselt number increases and the average entropy generation decreases when both the Richardson and Prandtl numbers increase.

Keywords: Mixed convection, Entropy generation, Finite difference method, Prandtl number, Richardson number, Nusselt Number.

1. Introduction

Flows involving both forced and natural convection, commonly referred to as mixed convection, are very often encountered in many industrial applications as evidenced, for example, by several recently published papers concerning electronic cooling [1, 2], air conditioning [3, 4], thermal design of building [5], solar collectors [6], chemical processing equipment [7], heat exchangers [8]. In recent years, convective fluid flows, in different enclosures, using the suspension of the Nano-Encapsulated Phase Change Materials (NEPCMs) have created a new research area and opened up radically new opportunities for many industrial applications. The following articles [9-12] have made a substantial contribution to the understanding of this phenomenon and, the obtained results show that the presence of NEPCM particles improves effectively the heat transfer.

All real fluids in motion in a process that involve heat and/or mass transfer result in significant energy losses generally referred to as the "entropy generation". This phenomenon arises due to the velocity, thermal and/or solutal gradients. The theory and the computation of the entropy generation was introduced for the first time by Bejan and reported in several of his works, e.g. [13, 14]. Numerous studies have been carried out to understand the fluid flow and heat transfer process in closed cavities in mixed convection regime. Most of the important published works that examine the heat transfer process by mixed convection in enclosures with different shapes that integrated non-Newtonian fluids and nanofluids were reported more recently in the review articles by Izadi et al. [15], Mustafa Abdul Salam et al. [16] and, Yang and Kai Du [17].

Entropy generation in mixed and natural convection has been the focus of research by numerous investigators as reviewed by Oztop and Al-Salem [18] Sciacovelli et al. [19] and, Biswal and Basak [20]. Since then, many other numerical studies in the same area have been carried out and, by focusing solely over the last two years some of them can be described here. Sheikholeslami et al. [21] investigated, by applying a novel numerical simulation approach based on the Finite Element Method FEM, entropy generation of a nanomaterial flow in the presence of Lorentz forces within a porous enclosure. They showed that increasing permeability makes the Bejan number decline, boundary layer thickness enhances with a rise of Lorentz force. In addition, two precise formulas were suggested for the estimation of the Bejan number and average Nusselt number. Sheikholeslami et al. [22]



scrutinized entropy generation of nanomaterial through a quad-lobed tube equipped with single or dual helical tape. One of their findings is that a greater value of the revolution of tape (N) leads to a reduction in thermal entropy generation ($S_{gen,th}$) about 0.48% when the number of tapes (Tn) = 2 and $Re=20,000$, while viscous entropy generation ($S_{gen,f}$) experiences 35.58% augmentation with rising of the number of tapes (Tn) when $N=4$, $Re=400$. The effects of a partial elastic wall, an inclined magnetic field, and a rotating circular cylinder on the entropy generation of convective heat transfer of carbon nanotube (CNT)-water nanofluid filled U-shaped cavity was carried out by Selimefendigil et al. [23]. They demonstrate that the entropy generation rates with varying Hartmann (Ha) number, rotational velocity, and location of the cylinder are different for the left and right parts of the domains while impacts of elastic wall properties on the entropy generation rate are slight. Rabbi et al. [24] examined magneto-hydrodynamic convection and entropy generation within a square tank occupied with Cu-H₂O nanomaterial. The numerical method based on the Galerkin residual finite element analysis has been implemented and, the Artificial Neural Network (ANN) model was used as an advanced predictive tool. The investigation has been done for Hartmann number (Ha 0 – 100), Rayleigh number (Ra 10^3 - 10^7), and nanomaterial concentration (ϕ 0 – 0.05). Streamlines, isotherm contours, and entropy generation contours are discussed thoroughly. It has been shown that the existence of external Lorentz forces affects both the Nusselt (Nu) and the Bejan (Be) numbers. In addition, the impact of Ha and ϕ on Nu and Be found from the numerical heat transfer analysis has been predicted and compared with ANN prediction model. Monda et al. [25] numerically analyzed MHD mixed convection flow, and entropy generation of Al₂O₃-water nanofluid flowing in a lid-driven trapezoidal enclosure. The stream-function vorticity formulation is used to solve the discretized coupled non-linear partial differential equations by a finite differences method. The obtained results show significant changes in streamlines, temperature, concentration and, global entropy generation contours for high Richardson number. Ebrahimi et al. [26] conducted the computational modeling of laminar mixed convection heat transfer of nanofluids inside a closed elbow-shaped cavity (CESC), using a finite volume method. Nusselt number, friction coefficient, dimensionless velocity in different sections of the cavity, temperature and entropy generation contours are presented. They argue that increasing the Grashof number implies an improvement in the fluid circulation mechanism, which results in a substantial reduction in the generation of entropy in the studied geometry. In addition, in the lower areas of the hot surface, entropy generation is always the least. Khosravi et al. [27] utilized Fluent software and an Artificial Neural Network model (ANN) in order to estimate the entropy generation of graphene-platinum/water hybrid nanofluid flow to assess how a new cylindrical microchannel heat sink with wavy-shaped fins performs. A variety of Reynolds numbers, nanoparticle concentrations as well as wave amplitudes is used to simulate the problem, while the heat flux is constant. They concluded therefore that increasing each factor, including wave amplitude, particle fraction, and Reynolds number, causes a decline in the thermal entropy generation rate, while frictional entropy rises significantly. The Bejan number was obtained greater than 0.98 in all cases, which means that irreversibility mainly results from the thermal entropy generation. Cimpean and Pop [28] investigated entropy generation in an inclined square cavity filled with a porous media saturated by a nanofluid with sinusoidal temperature distribution on the side walls, adiabatic conditions on the upper wall and a heat source at the lower wall. The governing equations and the entropy generation, in terms of the dimensionless variables, are discretized and solved by a finite difference method of second-order accuracy. The authors conclude that the conditions of the model and the values of the studied parameters have a significant effect on the existence of the irreversibility phenomena.

Relatively low number of numerical investigations are performed in mixed convection for various configurations which include the effect Prandtl number. In this context, Maougal and Bessaih [29] performed a numerical investigation on the entropy generation in mixed convection in a square cavity, filled with a saturated porous medium and heated by a discrete set of heat sources. Simulations were carried out for Reynolds number $Re=20, 40, 80, 100, 200$, Darcy number, $Da=10^{-5}$ - 10^{-1} , Prandtl number, $Pr=0.015, 0.7, 10, 10^3$, and aspect ratio, $D/H = 0.05, 0.10, 0.15, 0.2, 0.25$. Their results showed that the Reynolds and Prandtl numbers have the same effect on the entropy production and, their increase improves the heat transfer. Roy et al. [30, 31, 32] investigated the effect of the Prandtl on entropy generation during the mixed convection in a square cavity where the bottom wall is isothermally hot, sidewalls are cold, and the top wall is adiabatic. Simulations have been carried out for Prandtl number $Pr= 0.026$ and 7.2, the Reynolds number Re varies between 10 and 100, and Grashof number Gr varies between 10^3 and 10^5 . In [30] the effect of moving horizontal or vertical wall(s) is considered, in [31] the effect of various thermal boundary conditions is studied. In [32], the cavity is filled with a porous medium and the effect of thermal boundary condition is reported. More recently, Roy et al. [33] dealt with the same problem as those described above but in porous triangular cavities. In each considered investigation, these authors report the values of the parameters that contribute to minimize the entropy generation. However, the topic in question continues to receive interest as evidenced in the papers recently published by Bhatti et al. [34, 35], Khan et al. [36], Ögüt [37], Mehta and Pati [38], and Kashyap et al. [39]. Bhatti et al. [34] investigated entropy generation during heat and mass transfer in peristaltic Ellis fluid flow through a nonuniform channel. Mathematical and graphical analyses of the velocity profile, temperature profile, concentration profile, and entropy profile are presented for the Schmidt, Eckert, Soret, Prandtl, and Brinkmann numbers, compliant wall parameters, and Ellis fluid parameters. Bhatti et al. [35] examined the entropy generation on the interaction of nanoparticles over a stretching porous sheet with nonlinear thermal radiation. Simultaneous effects of the porous medium, Radiation parameter, nanoparticle volume fraction, Prandtl number, Brinkman number, and Reynolds number are demonstrated through graphs. Khan et al. [36] analyzed numerically the entropy generation in an incompressible thermal flow of Newtonian fluids over a thin needle that is moving in a parallel stream. Water and air are considered working fluids. The effects of Prandtl number, Eckert number, and dimensionless temperature parameter are discussed graphically in detail. It is shown that entropy generated due to heat transfer and fluid friction in water is more than in air. Ögüt [37] studied the entropy generation in laminar mixed convection in an inclined square lid-driven enclosure in the presence of magnetic field. The principal parameters considered in this study are : Richardson number (from 0.01 to 100), Prandtl number (from 0.1 to 1.0), inclination angle of enclosure (from 0° to 180°), Hartmann number (from 0 to 100) and magnetic field direction (0°). It was found that the inclination angle of enclosure is an effective parameter on entropy generation especially for higher Richardson number ($Ri > 1$) due to domination of natural convection. However, Hartmann number is effective on both heat transfer and entropy generation for all values of Richardson and Prandtl numbers and it decreases the convective fluid flow and entropy generation. Mehta and Pati [38] discussed the thermo-fluidic and entropy generation characteristics for laminar forced convective flow through wavy channel at different Prandtl numbers. Results are presented for the following range of parameters: Reynolds number (Re), Prandtl number (Pr), dimensionless amplitude (α) and, dimensionless wavelength (λ) which vary from 5 to 200, 0.72 to 100, 0.3 to 0.7, and 0.5 to 1.5 respectively. They observed that the thermal entropy generation contribution is higher than the viscous one for all the cases considered, the local thermal entropy generation distribution varies with the Re , Pr , and geometrical configuration of the channel and, for a smaller amplitude ($\alpha = 0.3$) the total entropy generation is minimum in the considered range of Re and Pr . More recently, Kashyap et al. [39] investigated the effects of three different Prandtl number fluids ($Pr = 0.025, 5.83$ and 151) on convective heat transfer inside a closed square cavity with an adiabatic left wall and three other cold walls. A centrally positioned square hot block with respective blockage ratios of 0.25 and 0.5 heats the cavity. One of their conclusions is that the total entropy generation in mixed convection, the heat transfer irreversibility mostly dominates the entropy generation at all Pr irrespective of Ri values as indicated by large average Bejan number.



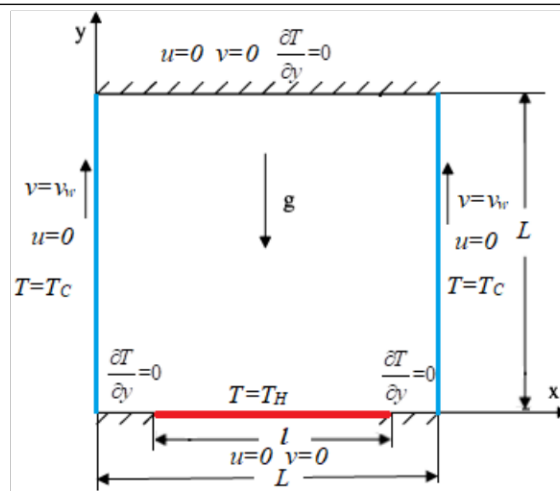


Fig. 1. Physical model and boundary conditions

From this literature review, it appears that the numerical studies of mixed convection in confined spaces taking into account the impact of Richardson and Prandtl numbers on the entropy generation are relatively scarce. On the other hand, all authors use different fluids to examine the impact of this number when studying convective flows. For our part we have opted for a new approach which consists in considering the same fluid at different temperatures, i.e. at different Prandtl numbers. For this purpose, we chose water as the working fluid, because of its many practical applications in engineering [40] and on the other hand, in contrast to other fluids, it offers a significant disparity in the value of the Prandtl number depending on the temperature. Indeed, its value ranges from 11.44 and 0.9996 for temperatures from 5°C to 100°C respectively.

2. Physical Model and Mathematical Formulation

2.1 Physical model

The schematic diagram of the two-dimensional square cavity of side length L considered in the present study is highlighted in Fig. 1. The lateral walls are maintained at a constant cold temperature T_c and move upwards with a constant velocity v_w . A heat source of size $l = 0.8 L$ is located at the center of the bottom wall of the cavity and maintained at a constant high temperature T_H . All remaining parts of the cavity are considered adiabatic. The mechanism for moving the side walls is illustrated in the article by Roy et al. [30].

2.2 Mathematical formulation

The governing equations for the present problem for steady two-dimensional mixed convection flow in a square cavity are the conservation continuity of mass, momentum and energy equation that can be expressed as follows [41] :

- Continuity equation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

- x momentum equation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

- y momentum equation :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_c) \tag{3}$$

- Energy equation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \tag{4}$$

The flow is unsteady, laminar and incompressible. All other properties of the fluid are assumed constant, except for the density of the fluid that generates the buoyancy forces, in accordance with Boussinesq's approximation. Taking into account these assumptions, the momentum governing equations can be given as follows in the vorticity-stream function formulation [41]:

- Vorticity equation :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) + g\beta \frac{\partial T}{\partial x} \tag{5}$$



- Stream function equation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\omega \quad (6)$$

The vorticity is defined as: $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ and the velocity components in the x and y directions, respectively are:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (7)$$

2.3 Initial and boundary conditions

Numerical solution of the previous equations is based on the following initial and boundary conditions:

- Initial conditions: ($t = 0$) :

$$0 \leq y \leq L \quad \& \quad 0 \leq x \leq L \quad T = T_c \quad \& \quad \psi = \omega = 0 \quad (8a)$$

- Boundary conditions ($t > 0$) :

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \\ x=L \end{array} \right\} \quad \& \quad 0 \leq y \leq L; \quad u = v = \psi = 0; \quad v = v_w = \frac{\mu}{\rho L} Re; \quad T = T_c \quad (8b)$$

$$y=0 \quad \& \quad 0 \leq x \leq (L-1)/2 \quad \& \quad (L+1)/2 \leq x \leq L \quad u = v = \psi = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (8c)$$

$$y=0 \quad \& \quad (L-1)/2 \leq x \leq (L+1)/2 \quad u = v = \psi = 0 \quad \& \quad T = T_H \quad (8d)$$

$$y=L \quad \& \quad 0 \leq x \leq L \quad u = v = \psi = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (8e)$$

2.4 Nusselt number

Local and average Nusselt numbers has been computed for the heated part of the bottom wall of the cavity and are determined from the following expression:

$$Nu_{loc} = -\frac{1}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad \overline{Nu} = \frac{1}{L} \int_{(L-1)/2}^{(L+1)/2} Nu_{loc} dx \quad (9)$$

2.5 Entropy generation

The local entropy generation is given by [42] :

$$s_{gen} = \underbrace{\frac{k}{T_0^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right]}_{S_{th}} + \underbrace{\frac{\mu}{T_0} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]}_{S_{ff}} \quad (10)$$

where S_{th} is the entropy that is generated due to the thermal irreversibility (heat transfer) and S_{ff} is the entropy that is generated due to the flow irreversibility (fluid friction).

The total entropy generation is the integral over the system volume of the local entropy generation:

$$\overline{s_{gen}} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \left\{ \int_0^L s_{gen} dx \right\} dy \quad (11)$$

2.6 Bejan number

The local Bejan number is a dimensionless number that provides a measure of the importance of the thermal entropy generation compared to the total entropy generation. It is expressed by:

$$Be = \frac{S_{th}}{S_{th} + S_{ff}} \quad (12)$$

Also, the average Bejan number is given by:

$$\overline{Be} = \frac{1}{L^2} \int_0^L \left\{ \int_0^L Be dx \right\} dy \quad (13)$$

During the numerical modeling of mixed convection, some parameters should be chosen to serve as a comparison with the overwhelming majority of studies reported These include, among others, the Richardson number (Ri) which characterizes the flow regime and provides a measure of the influence of free convection in comparison with forced convection, the Prandtl number (Pr), which is being designated as the ratio of the momentum diffusivity to the thermal diffusivity, and the Reynolds number (Re) used to represent the ratio of inertial forces to viscous forces. These different numbers are defined respectively by the following relationships:



$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad Re = \frac{v_w L}{\nu}$$

where Gr is the Grashof number, $Gr = g\beta\Delta TL^3 / \nu^2$, $\Delta T = T_H - T_C$ is the temperature difference and v_w is the side wall velocity.

3. Numerical Procedure and Validation

3.1 Numerical procedure

The finite difference method is used to solve the governing equations (4)-(7) with the corresponding boundary conditions, Eqs. (8a-8e). Temporal discretization has been achieved using the Alternating Direction Implicit (ADI) method. More details on this procedure can be found in Micula and Pop [43]. High-resolution spatial scheme was used for all equations. Convective terms in Eqs. (4, 5) have been discretized into a third-order upwind scheme as proposed by Kawamura et al. [44]. Diffusive terms, as well as the terms including the first derivatives, have been discretized by a fourth-order accurate scheme. An iterative procedure based on the successive Non Linear Over Relaxation method (NLOR) was used to solve the discretized stream function equation Eq. (6). In addition, once the velocity and temperature fields obtained we can then determine the characteristics of the entropy generation (Eqs.10, 11, 12), the average Nusselt number along the hot part of the bottom wall (Eq. 9), and the average Bejan number (Eq. 13). An in-house FORTRAN code, with a double precision accuracy, has been developed for solving the mathematical model under consideration.

It was also clearly established, (see for example Bejan [45]) that the equation describing the entropy generation depends strongly, not only on the thermo-physical properties of the working fluid but also on a reference temperature (T_0). For this purpose, the reference values of the thermo-physical properties of water at 30°C (303.15 K), 60°C (333.15 K) and, 90°C (363.15 K) listed in Table 1, are from Dinçer and Zamfirescu [46] and, Fig.2 shows the variation of the Prandtl number (Pr) as a function of temperature. Furthermore, the Reynolds number (Re) and the temperature difference ΔT are kept constant at 10^2 , and 2 K respectively. On this point, and as indicated by Ferziger and Peric [47] the use of the Boussinesq approximation in the Navier-Stokes equations introduces errors of the order of 1% if the temperature differences are less than 2°C for water. In addition, Pallares et al. [48] state that, at $Ra=1.2 \cdot 10^5$ ($\Delta T=4.6$ °C), physical properties of water have a variation of about 9% and non-Boussinesq effects begin to be important. On the other hand, the length L of the cavity was considered as the typical reference length of the system geometry of the study and will be used to compute the values of the non-dimensional parameters mentioned above. In view of this, it was deemed appropriate to immediately fix the ideas on the variation of the Richardson number (Ri) as a function of the length (L) of the cavity that we have presented in Fig. 3, so as to see precisely the specific value of Ri that would correspond more truly to L for each of the considered Prandtl numbers (Pr). The proposal has been suggested previously by Goodarzi et al. [49], and very recently by Patil et al. [50], that have dealt with the investigation of entropy generation due to fluid flows in the mixed convection regime.

To achieve clarity in order to facilitate understanding of the adopted numerical procedure, the main steps are described below:

1. Specification of the thermophysical properties of the working fluid.

Once the fluid and its temperature (T_0) have been selected, we can access all of its other thermophysical properties (ρ , μ , α , k , β and, Pr) from table 1. Note that these thermophysical properties of the working fluid may be changed depending on the temperature T_0 .

2. Specification of the boundary conditions.

For this, we need to set a temperature difference ($\Delta T=2K$), the length of the cavity (L), and the Reynolds number ($Re=100$). We then get the low-temperature T_C , the high-temperature T_H and, the sidewall velocity v_w as follows:

$$T_C = T_0 - \frac{\Delta T}{2}; \quad T_H = T_0 + \frac{\Delta T}{2}; \quad v_w = \frac{\mu}{\rho L} Re$$

Here too, these boundary conditions can be changed depending on the temperature T_0 (i.e. Prandtl number) and the length of the cavity (L).

1. Numerical resolution.

The equations (4, 5, 6 and 7) are used to determine the dynamic and thermal fields, while equation (10) the entropy generation.

2. Computation of the non-dimensional parameters.

The Richardson number (Ri) is identified as the primary control parameter in this study. It is given by the following equation:

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

where Gr is the Grashof number $Gr = g\beta\Delta TL^3 / \nu^2$.

As a final point, it must be noted that all parameters are known to calculate these dimensionless numbers. These different steps are carried out for each length of the cavity L (i.e. each Richardson number) and then after, for each Prandtl number.

Table 1. Thermo-physical properties of pure water at atmospheric pressure [46].

To (°C)	ρ (kg m ⁻³)	μ (kg m ⁻¹ s ⁻¹)	α (m ² s ⁻¹)	k (W m ⁻¹ K ⁻¹)	β (K ⁻¹)	Pr
30	995.7	7.977 10 ⁻⁴	1.4477 10 ⁻⁷	6.03 10 ⁻¹	3.051 10 ⁻⁴	5.534
60	983.2	4.666 10 ⁻⁴	1.5585 10 ⁻⁷	6.41 10 ⁻¹	5.221 10 ⁻⁴	3.045
90	965.3	3.145 10 ⁻⁴	1.62903 10 ⁻⁷	6.613 10 ⁻¹	6.958 10 ⁻⁴	2.000



Table 2. Grid independence test: average Nusselt number and total entropy generation for $Ri=0.48$ and $Pr = 5.534$

Grid	\overline{Nu}	Relative error %	$\overline{S_{gen}}$	Relative error %
41x41	11.1964	6.20	4.1762	5.03
81x81	11.8402	0.84	4.0265	1.26
101x101	11.8814	0.49	3.9898	0.35
161x161	11.9259	0.12	3.9758	0.02
201x201	11.9399	-----	3.9763	-----

3.2 Grid independency test

Numerical tests have been made to ensure the accuracy of results for the grid used in this study. Five grid sizes (41x41; 81x81; 101x101, 161x161 and 201x201) have been considered. These numerical tests are carried out for the case of Reynolds number $Re=100$, Prandtl number $Pr=5.534$ (Water at 303K) and Richardson number $Ri = 0.48$. Table 2 shows the convergence of the average Nusselt number and the total entropy generation. It should be noted that the maximum relative error does not exceed 1% between the grid sizes of 101x101, and 161x161 compared to the grid size of 201x201. Therefore, it was decided to use a non-uniform grid with 101x101 grid points for all calculations allowing a balance between accuracy and CPU time.

3.3 Code validation

First validation tests of the natural convection in a square cavity heated from below and cooled from others at $Ra=10^5$ and $Pr=0.71$ have been verified. The streamlines and isothermal lines are compared with those of Asad et al. [51], and Jani et al. [52] (Fig. 4). It is observed qualitatively, that the results agree with the earlier works.

The code is also tested while considering the same problem in the same geometrical configuration, but this time the comparison is related to the vertical velocity component along the horizontal centerline of cavity obtained by Jani et al. [52] and that achieved by the present code (Fig. 5). We therefore note that quantitatively the results are in good agreement.

Once again, the code was tested considering the work of Aydin and Yang [53] which deals with a numerical study of mixed convection in a cavity having a locally heated bottom wall and cold descending sidewalls. The dimensionless velocity components $V=v/v_w$ along the horizontal centerline ($Y=0.5$), predicted by Aydin and Yang [53] for different Richardson numbers at $\epsilon=L/L=1/5$ and the present work, are shown in Fig. 6. A comparison of the results demonstrates good agreement.

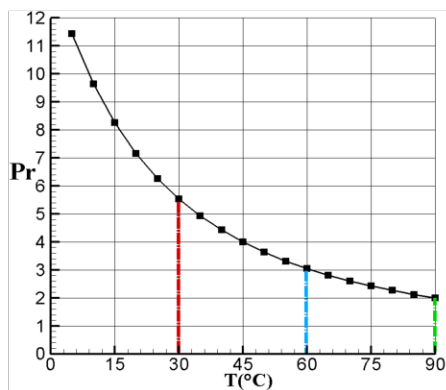


Fig. 2. Water Prandtl number versus Temperature [46]

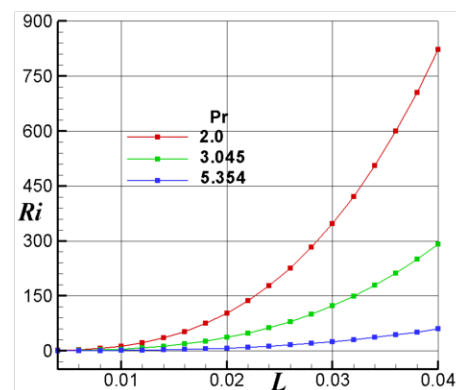
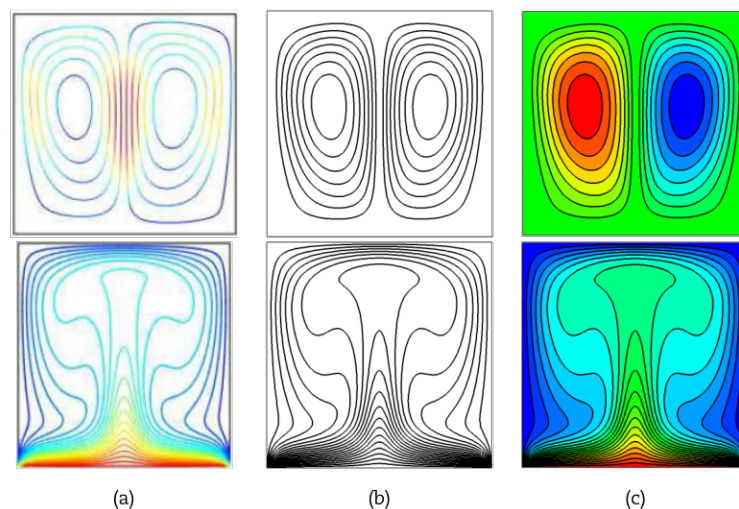


Fig. 3. Variation of Ri as a function of L

Fig. 4. Comparison of the streamlines (upper row) and isotherms (bottom row) between numerical results by (a) Asad et al. [51], (b) Jani et al. [52] and (c) present work, at $Ra=10^5$ and $Pr=0.71$ 

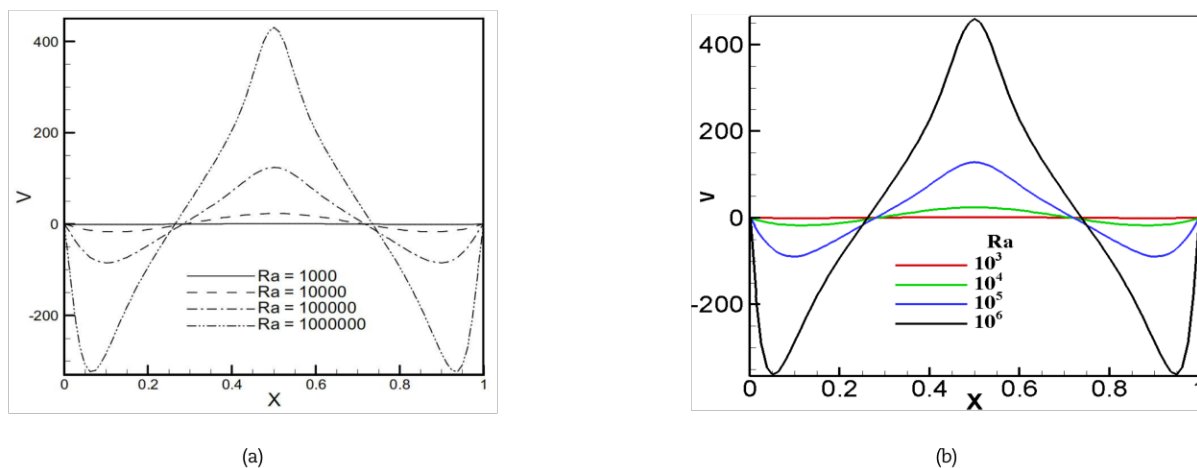


Fig. 5. Comparison of the vertical velocity component along the horizontal centerline of cavity, (a) Jani et al. [52] and (b) present work, at different Ra and Pr=0.71

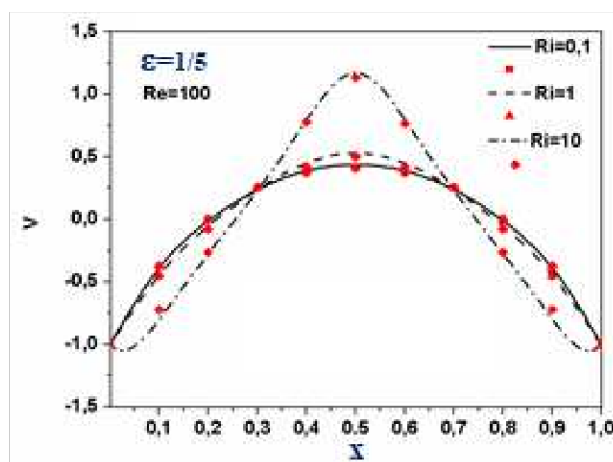


Fig. 6. Comparison of the vertical velocity component along the horizontal centerline of the cavity for Ri=0.1, 1, and 10 at Pr=0.71. Lines present work and, symbols: Aydin And Yang [53]

4. Results and Discussion

In this section, we investigate and discuss the scope of the effects of the Prandtl number on water flow, heat transfer, and entropy generation for different values of the governing parameters. The Richardson number, which is computed based on the thermophysical properties of water and the length L of the cavity is identified as the primary control parameter for heat and fluid flow inside the cavity. Furthermore, despite the fact that the numerical solution implies a time-dependent solution, it should be noted that only results about stable fluid flows are shown here.

4.1 Dynamic and thermal fields

The determination of the entropy generation depends on the velocity and temperature gradients, that is why the dynamic and thermal fields need to be examined in the first instance. The structure of streamlines and isotherms presented in Fig. 7 (a), (b) and (c) for the values of the Prandtl number of 2., 3.045, and 5.534 respectively, show that the fluid circulation inside the cavity depends strongly on the Richardson number (i.e. the length of the cavity). One must nevertheless note that each figure presents the cavity with its own dimension measured on the x, y, axis. The results of the various numerical simulations show the existence of three very distinct types of flows according to the value of this parameter. The first type occurs at low values of Ri. The streamlines are characterized by the presence, inside the cavity, of two strictly symmetric cells with respect to the vertical axis passing through the middle of the cavity (first column of Fig. 7 a,b,c). The one on the left turns clockwise and the one on the right turns counterclockwise. Forces due to the movement of the side walls are large enough to draw heat from the heated portion, located on the bottom wall of the cavity, to evenly distribute it along these walls. The second type occurs as the Richardson number exceeds a critical value (first bifurcation). In this particular case, unsymmetrical flow structures and temperature distributions are observed inside the enclosure (second column of Fig. 7 a,b,c). The third and last type takes place when the Richardson number continues to increase in order to exceed a second critical value (second bifurcation). Noticeable and meaningful changes in streamlines and isotherms are observed (third column of Fig. 7 a, b, c). In this case, the flow is predominantly composed of four symmetric cells, two counter-rotating cells located in the center of the cavity due to buoyancy forces, and the other two, also counter-rotating due to viscous forces, are weak and adjacent to the lateral sidewalls. Inside each of them, two minor vortices appear at the bottom and top corners. In this instance, all the heat from the hot source is propagated through the center of the cavity. It should be noted, however, that if the flow changes from a steady state to chaos the increase of Richardson number shall be stopped. It's a similar procedure that has already been used by Cheng [54]. We note that Biswas and Manna [55] have previously reported the existence of these same flow patterns that originate in a bottom-heated square cavity filled with air, where both the cooled (or adiabatic) sidewalls are translating at a constant velocity in their own planes either vertically upward or vertically downward, while the top wall is considered either adiabatic or maintained at a cold constant temperature.



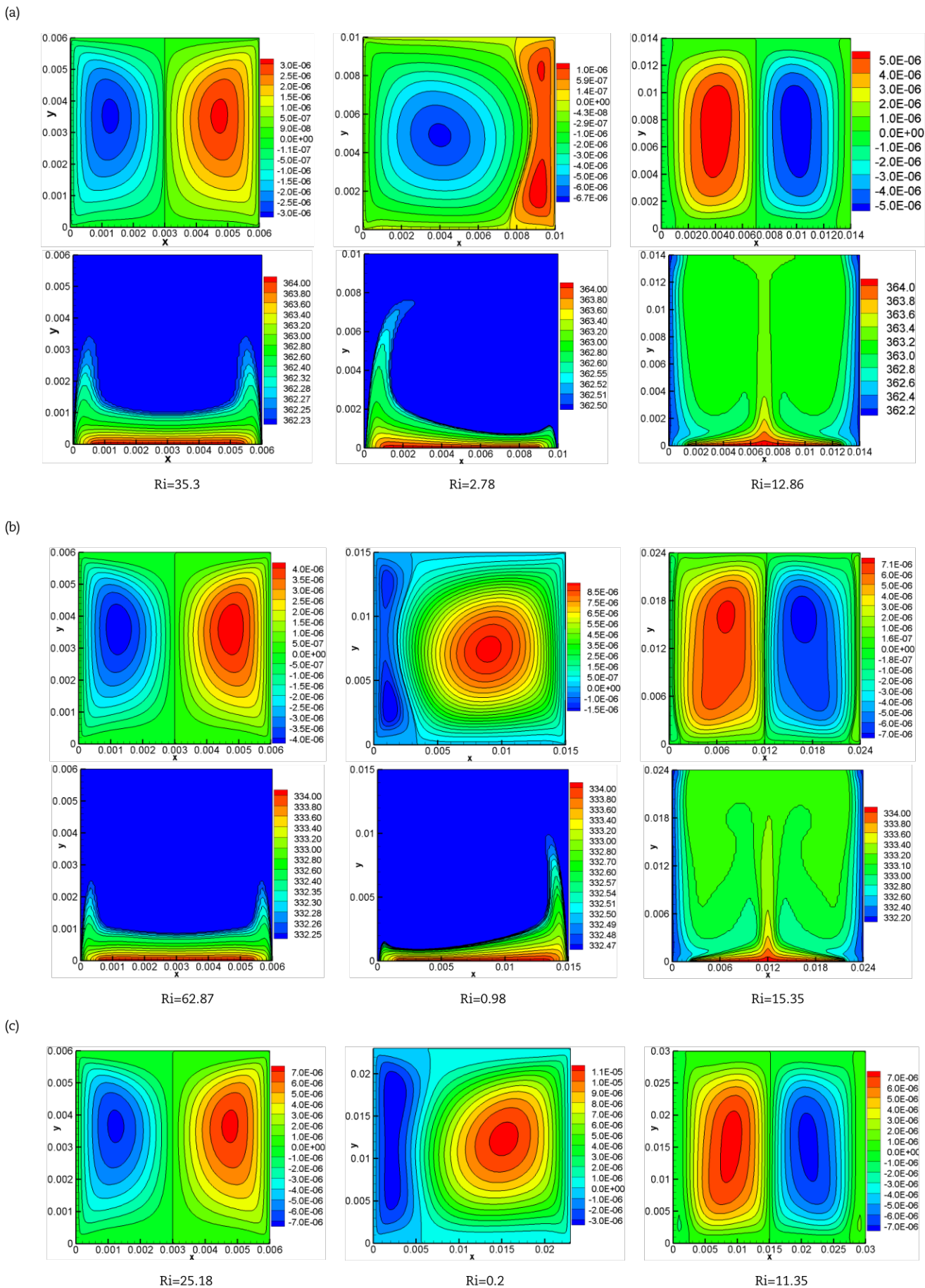


Fig. 7. Contours of streamlines (first row), isotherms (second row) for different Richardson numbers (Ri) at (a) Pr=2.0, (b) Pr=3.0454 and, (c) Pr=5.534



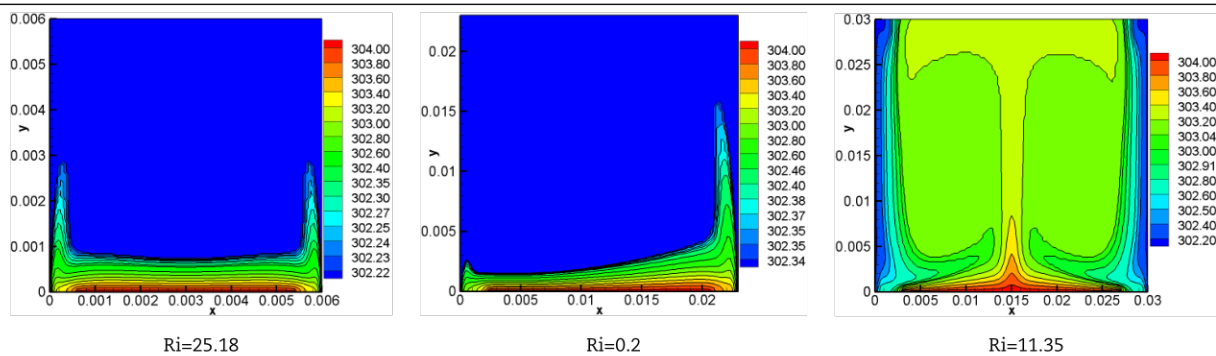


Fig. 7. Contours of streamlines (first row), isotherms (second row) for different Richardson numbers (Ri) at (a) Pr=2.0, (b) Pr=3.0454 and, (c) Pr=5.534

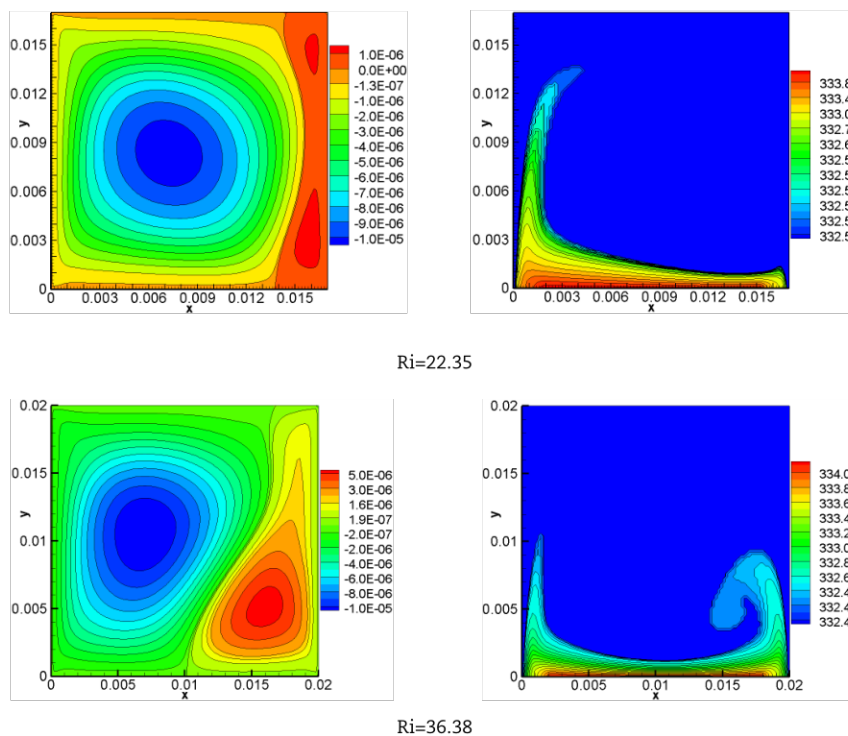


Fig. 8. Comparison of streamlines (left column) and isotherms (right column) for Ri=22.35 and, 35.36 at Pr= 3.045

If this figure reveal that the dynamic and thermal fields show the same trend with the variation of the Richardson number (Ri) i.e. by highlighting the three types of fluid flow previously described, however, it was observed that for Pr = 3.045 and Ri between 22.35 (L = 0.017 m) and 36.38 (L = 0.02m) the distributions of streamlines and temperature contours are considerably altered and another interesting type of fluid flow appears. To better identify and define this unexpected and disconcerting new type of flow regime, the main characteristics of streamlines and isotherms in the cavity for the Richardson number limit values cited above are compared in Fig. 8. The figure indicates that for Ri = 22.35 the streamlines displayed consist of two strictly antisymmetric cells with respect to the vertical median axis (x =L / 2) but are practically symmetrical with respect to the horizontal median axis (y = L / 2). We also note that the heat from the hot source spreads on one of the side walls only. However, for Ri = 36.38, the new type of flow regime is characterized by two non-symmetrical cells, not only with respect to the vertical median axis (x=L/2) but also with respect to the horizontal median axis (y= L/2). On the other hand, unlike the case earlier the isotherms propagate along the two sidewalls of the cavity. It is also important to point out that when the new type of flow is considered, the behavior of the flow is often unpredictable. To illustrate this point, a comparison of the average Nusselt number for Ri=22.35 and 36.38 is showed in Fig. 9. We can see that, for Ri = 22.35, the evolution of the mean value of the Nusselt number converges to a fixed value, while for Ri = 36.38 the evolution of the same number remains so fluctuating that no exact value cannot be practically determined. It should be noted also that this instability and complexity of the fluid flow and the heat transfer have been verified and validated experimentally by Sukhanovsky, and Evgrafova [56, 57] by examining closely, laminar and transient convective regimes from localized heat source inside a silicon oil-filled cylindrical vessel of different diameters at different values of Prandtl number (Pr = 209, 104, 67, and 38) at T = 25°C.

Furthermore, a similar trend is observed when the flow progresses from the new type of flow regime (two non-symmetrical cells) to the third type of flow regime (four symmetric cells). Here, too, we noted, from Fig. 10 (a), that the evolution of the average Nusselt number at Pr=3.045 for Ri=62.87, characterizing the third type of flow regime (four symmetric cells) develops also unpredictable fluctuations which begin to amplify when the time exceeds 900 s. By contrast, for the other Prandtl numbers (Pr=2.0 and Pr=5.534) the fluid flow remains always stable for the same type of flow regime (four symmetric cells). Figure 10(b) has been used to visualize this stability at arbitrary values of the Richardson numbers characterizing the same type of flow regime (four symmetric cells). It should be noted that the evolution of the average Nusselt number for Pr=2.0 at Ri=35.3, as it is for Pr=5.534 at Ri = 25.18, evolves towards a constant value showing a stable development of the fluid flow.



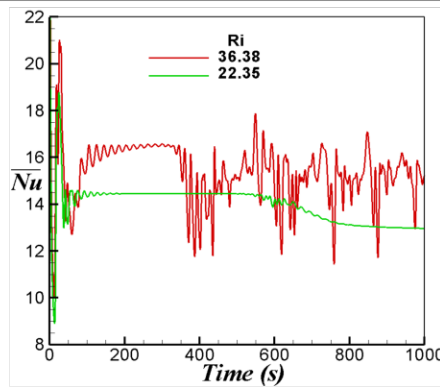


Fig. 9. Comparison of the average Nusselt number \overline{Nu} for $Ri=36.38$ and, 22.35 at $Pr= 3.045$

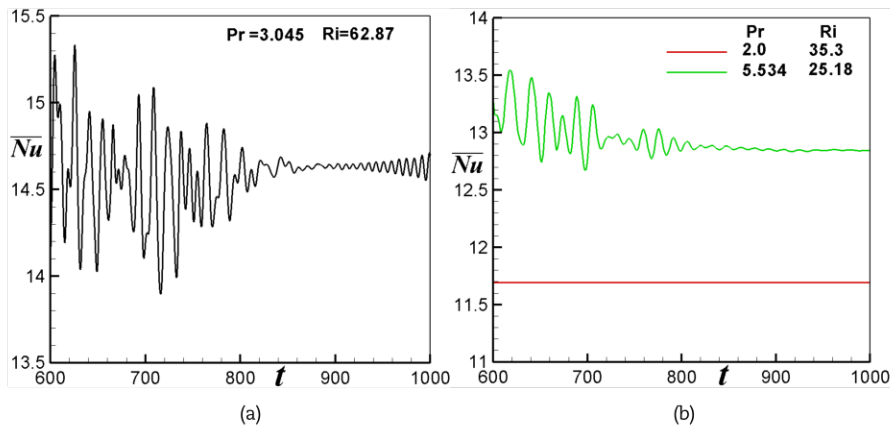


Fig. 10. Comparison of the evolution of the average Nusselt number (a) for $Pr= 3.045$ at $Ri= 62.87$; (b) for $Pr=2.0$, and, 5.534 at $Ri=35.3$ and, 25.18 , respectively

Finally, we have briefly summarized in Table 3, the identification of the different types of flow regimes, defined by their Richardson numbers (Ri) and the corresponding length of the cavity (L), for the Prandtl numbers (Pr) considered in this study.

Having set out results of local distributions through temperature fields, and flow fields, in the following section we will present results of the heat transfer rate, which is characterized by the Nusselt number.

4.2 Heat transfer rate

The heat transferred from the hot source can be measured by the average Nusselt number. The effect of the Richardson number on the evolution of the average Nusselt number for the cases of $Pr=2.0$, 3.045 , and 5.534 is shown in Fig. 11. It is to be noted that the same values of Ri that characterize the structure of streamlines and isotherms, previously presented, have been taken into account to represent the evolution of the average Nusselt number for each type of flow regime. In general, we noted that the average Nusselt number, whatever the Prandtl number, exhibits fluctuations at the beginning that are becoming increasingly important as the Richardson number increases before stabilizing at a fixed value. Furthermore, the regime with two non-symmetrical cells is characterized by a sudden drop in the evolution of the mean Nusselt number. It can be seen also that the more Ri increases, whatever the Prandtl number, the more heat is transferred from the heated bottom wall, either along sidewalls (the first and the second type of flow regime) or along the central part of the cavity (the third type of flow regime). It means that the temperature gradient at the heated bottom wall also increases and consequently the Nusselt number is achieving increased significance. On the other hand the computational times for which flows become steady increase as the Richardson and Prandtl numbers increase simultaneously and, their approximate values are 600 s, 1000 s, and 5000 s at $Pr=2.0$, 3.045 , 5.534 respectively. In other words, the steady-state is reached more quickly when the Prandtl number decreases. It is rightly noted that in the case of $Pr = 5.545$ a computational time of between 2 and 3 days, on an "HP Z820 Workstation", is required for each numerical simulation to ensure the stability of the fluid flow when the Richardson number is between 11.35 ($L=0.02m$) and 18.36 ($L=0.03m$).

Table 3. Identification of the different types of flow regimes for the Prandtl numbers considered.

Flow regime	First Type	Second type	Third type
$Pr=2.0$ stable	$0.823 \leq Ri \leq 4.41$ $0.004 \leq L \leq 0.007$	$6.58 \leq Ri \leq 19.56$ $0.008 \leq L \leq 0.0115$	$Ri \geq 22.22$ $L \geq 0.012$
$Pr=3.045$ stable	$0.291 \leq Ri \leq 6.06$ $0.004 \leq L \leq 0.011$	$6.92 \leq Ri \leq 22.34$ $0.0115 \leq L \leq 0.017$	-----
$Pr=3.045$ unstable	-----	$26.52 \leq Ri \leq 36.38$ $0.018 \leq L \leq 0.023$	$Ri \geq 48.43$ $L \geq 0.024$
$Pr=5.534$ stable	$0.0597 \leq Ri \leq 9.93$ $0.004 \leq L \leq 0.022$	$11.35 \leq Ri \leq 18.36$ $0.023 \leq L \leq 0.027$	$Ri \geq 20.47$ $L \geq 0.28$



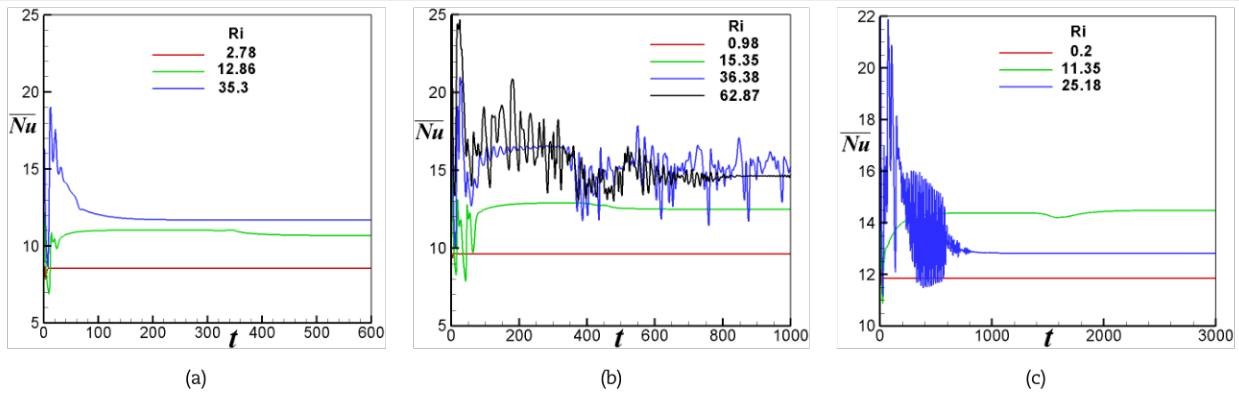


Fig. 11. Time series of the average Nusselt number \overline{Nu} for different Ri, (a) $Pr=2.0$, (b) $Pr=3.045$ and, (c) $Pr=5.534$

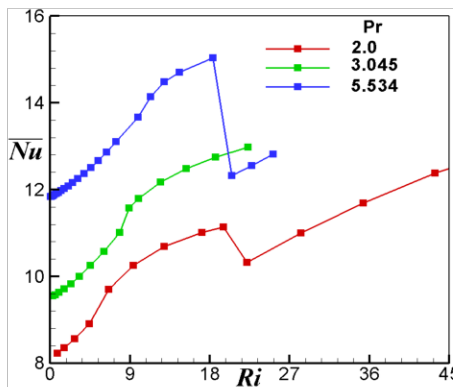
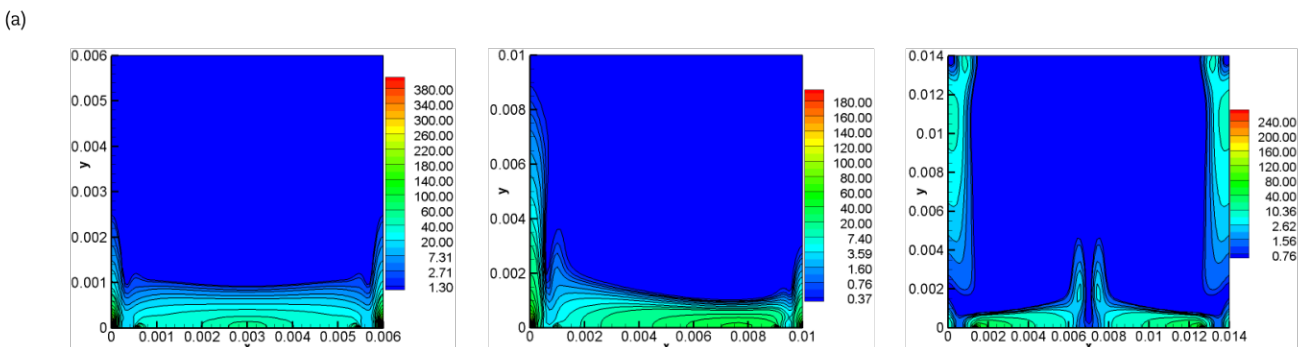


Fig. 12. Comparison of the average Nusselt number (\overline{Nu}) as a function of the Richardson number (Ri) for the considered values of Prandtl number (Pr)

Figure 12 demonstrates the comparison of the average Nusselt number as a function of the Richardson number for the three Prandtl numbers considered (2.0, 3.045 and, 5.534). It is easily visible that an increase in the value of the Prandtl number (i.e. a decrease in the temperature of the heat source) leads to a significant enhancement in the average Nusselt. A fluid with a higher Prandtl number has a relatively lower thermal diffusivity (see table 1), which reduces heat conduction and thereby increases the temperature gradient at the heated surface and consequently may also significantly increase the average Nusselt number [58]. However, a comparison of the average Nusselt number at $Pr=2.0$ and 5.534, clearly indicates that the transition from the second type of flow (two unsymmetrical cells) to the third one (four symmetric cells), is evidenced by a sudden drop in the average Nusselt number (second bifurcation). This does not apply to the particular case where $Pr=3.045$ because we have already seen that the solution becomes so unstable that it becomes impossible, starting from $Ri=26.52$, to obtain reliable fair values for the different fundamental unknowns of the problem.

4.3 Characteristics of entropy generation

The contours of the total entropy generation (first row), and entropy generation due to fluid friction (second row), for the same Richardson numbers previously considered, at the Prandtl numbers of 2.0, 3.045, and 5.534 are presented in Fig. 13 a, b and, c respectively. In most of the cases entropy production is more pronounced at the walls and less at the core region of the cavity. Moreover, the contours of the total entropy generation occur strongly near the active part (i.e. the heated portion located on the bottom of the cavity) and progress rapidly along the sidewalls as the Richardson number increases. This is due to high-temperature gradients along the vertical direction. Also, this figure depicts that the contours of the local entropy generation due to fluid friction are found to be significant only near the cold sidewalls and in the corners but becomes negligible at the core of the cavity. In this particular case, the cause of the problem can mainly be attributed to the gradients of the vertical velocity component. By comparing the temperature contours in Fig. 7, a, b, c (second row) with those of the total entropy generation in Fig. 13, a, b, c (first row), and whatever the values of Richardson and Prandtl numbers, it can be seen that they appear to be sufficiently similar in both cases. This means that temperature gradients play an important role in the creation of entropy generation. A similar conclusion has been reported very recently (July 2021) by Khetib et al. [59].



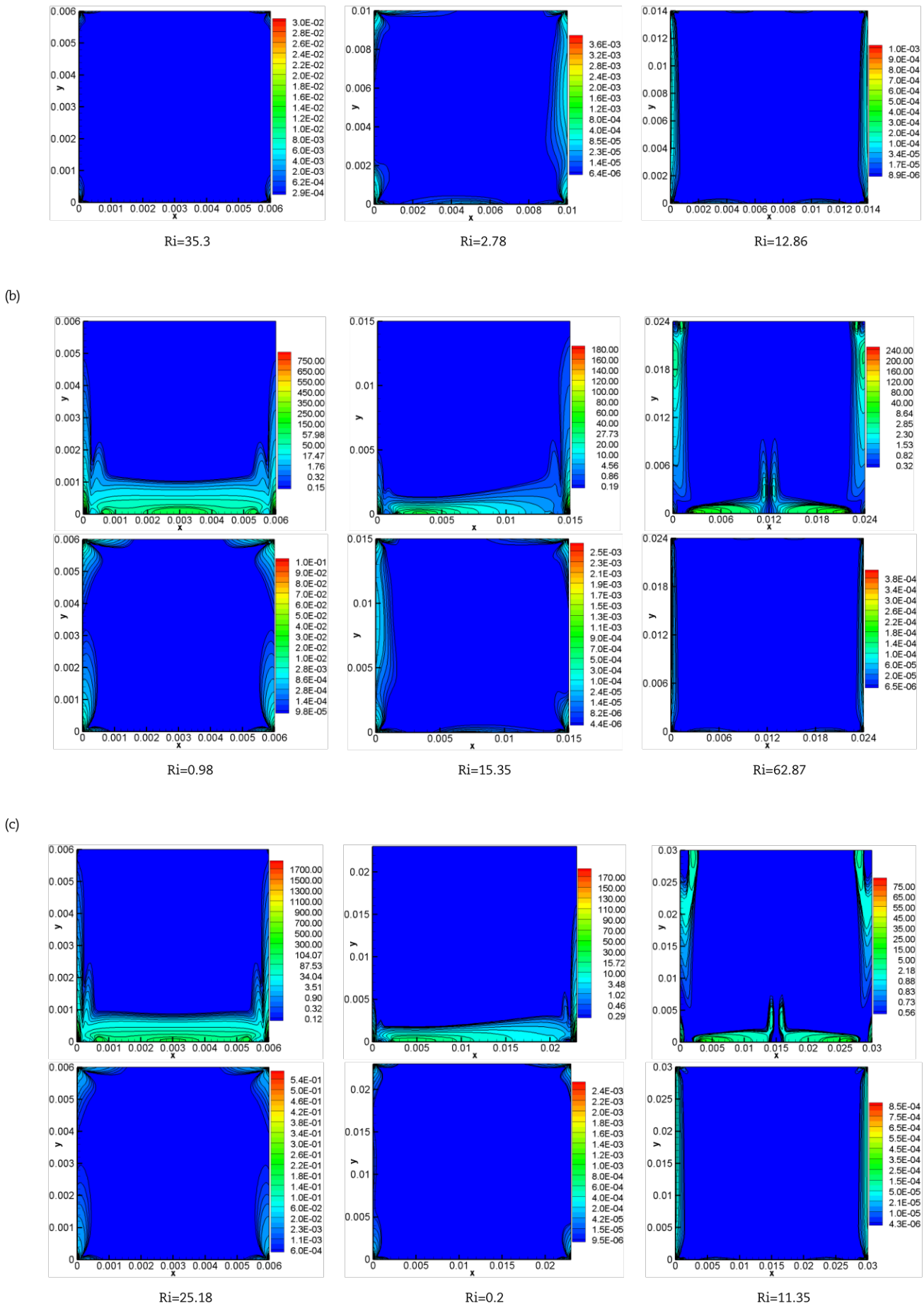


Fig. 13. Contours of total entropy generation (first row), and entropy generation due to fluid friction (second row), for different Richardson numbers (Ri) at (a) Pr=2.0, (b) Pr=3.0454 and, (c) Pr=5.534



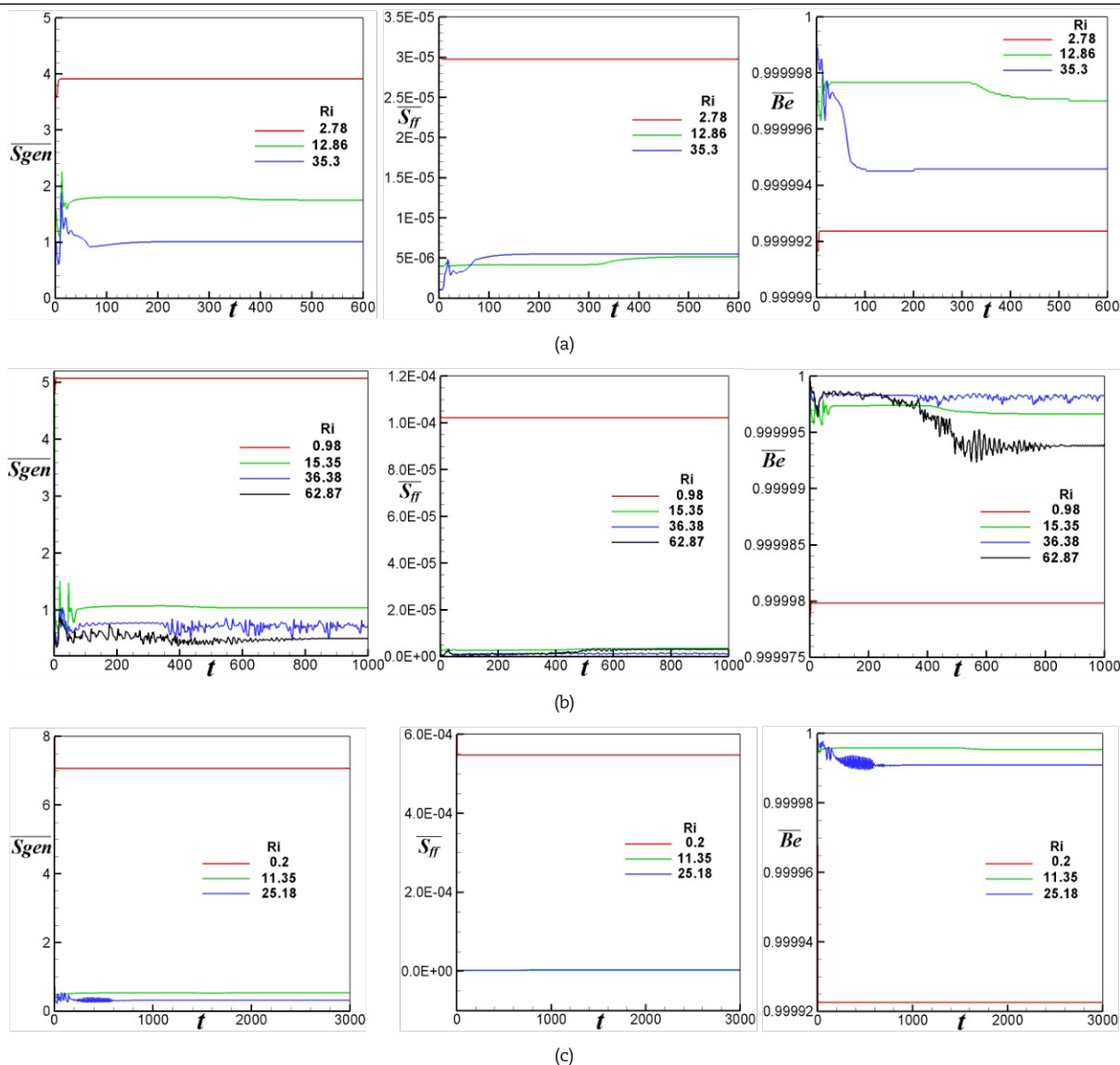


Fig. 14. Time traces of the average total entropy generation (first row), the average entropy generation due to fluid friction (second row) and the average Bejan number (third row), for different Richardson numbers (Ri)) at (a) Pr=2.0, (b) Pr=3.0454 and, (c) Pr=5.534

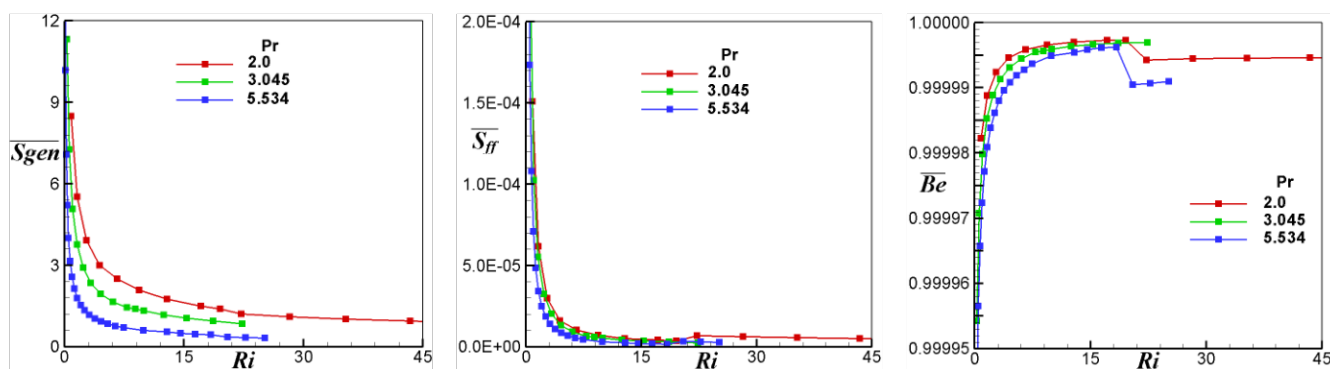


Fig. 15. Comparison of the average entropy generation, the average entropy generation due to fluid friction and, the average Bejan number vs. the Richardson number (Ri) for the considered values of Prandtl number (Pr)

On the other hand, a comparison of the scales of the values of the total entropy generation and that due to the fluid friction reveals that, irrespective of the Prandtl and Richardson numbers, entropy generation due to fluid friction is so insignificant that we can conclude, in accordance with equation (13) that the average Bejan number is very close to one. Hence, the trend of changes in the thermal entropy generation rate is similar to the total entropy generation rate. It was therefore decided, only in order to lighten the text, that the contours and, the profile of the average thermal entropy generation and, the contours of the Bejan number would not be included in this study.



The time traces of the average total entropy generation (first row), the average entropy generation due to fluid friction (second row) and, the average Bejan number (third row), for the same Richardson and Prandtl numbers, previously considered, are presented in Fig. 14 a, b and c). It should be noted that when the Richardson numbers increase, the total entropy production and the entropy generation due to fluid friction decrease while the Bejan number increases. Also, it is noted that the values of the average entropy generation due to fluid friction are insignificant in comparison to those of the average global entropy generation which implies that the average Bejan number is very close to 1.0.

Figure 15 shows the average entropy production $\overline{s_{gen}}$, the average entropy generation due to fluid friction $\overline{s_{ff}}$ and the average Bejan number \overline{Be} of the system vs. the Richardson numbers, and illustrates the direct influence of the Prandtl numbers considered. It should be noted that when these Prandtl numbers increase, the total entropy production and the average entropy generation due to fluid friction decrease. The curves describe a similar behavior to that followed by the curves of the average Nusselt numbers, the only difference is, in this case, that when the Prandtl numbers increase, the average Nusselt numbers also increase.

5. Conclusion

The present numerical investigation examines the mixed convection in a water-filled square cavity partially heated from below. The impact of the Richardson and, Prandtl numbers on heat transfer, fluid flow, and entropy generation is analyzed and discussed. The obtained results can be synthesized as follow:

- The flow patterns and thermal field change significantly with the increase in the Richardson and Prandtl numbers. Indeed, the obtained results show that, irrespective of the Prandtl number, for low Ri the heat transfer and entropy generation patterns are symmetric, whereas with increasing Ri these patterns become asymmetric and more complex.
- Unstable flows appear for a Richardson number greater than or equal to 26.52 ($L=0.18m$) at $Pr = 3.045$.
- An increase in the Prandtl number, irrespective of the Richardson number, causes an increase in the average Nusselt number.
- For all cases, the entropy production decreases when both the Richardson and Prandtl numbers simultaneously increase.
- The average Bejan number is always close to one which reveals that the contribution of the thermal irreversibility to the total entropy generation is always much more important than the fluid friction irreversibility.

Author Contributions

S. Boudebous initiated and planned the project. H. Koten developed and formulated the mathematical model. N. Ferroudj developed the code, conducted the numerical experiments, and examined the validation of the result. Both authors contributed equally and significantly in writing this paper. All authors analyzed, discussed the results, reviewed and approved the final version of the manuscript.

Acknowledgments

The authors like to express their thankfulness to the Computational Fluid Dynamics Laboratory of the Mechanical Engineering Department, of Istanbul Medeniyet University, Turkey for having provided computer facilities during this work.

Conflict of Interest

The authors declared no potential conflicts of interest with respect to the research, authorship, and publication of this article.

Funding

The authors received no financial support for the research, authorship, and publication of this article.

Data Availability Statements

The datasets generated and/or analyzed during the current study are available from the corresponding author on reasonable request.

Nomenclature

Be	Bejan number		
g	Gravitational acceleration [ms ⁻²]		
Gr	Grashof number ($= g\beta\Delta TL^3/\nu^2$)	α	Thermal diffusivity, [m ² s ⁻¹]
k	Thermal conductivity [Wm ⁻¹ K ⁻¹]	β	Thermal expansion coefficient, [K ⁻¹]
l	heat source Length [m]	ΔT	Temperature difference ($=T_h - T_c$), [K]
L	Length of the square cavity [m]	ν	Kinematic viscosity, [m ² s ⁻¹]
Nu	Nusselt number	μ	Dynamic viscosity, [kg m ⁻¹ s ⁻¹]
Pr	Prandtl number, ($= \nu/\alpha$)	ρ	Density, [kg m ⁻³]
Re	Reynolds number, ($=v_w L/\nu$)	ψ	Stream function, [m ² .s ⁻¹]
Ri	Richardson number, (Gr/Re^2)	ω	Vorticity, [s ⁻¹]
S _{gen}	Local entropy generation [Wm ⁻³ K ⁻¹]		
t	Time [s]		
T	Absolute temperature [K]		
T ₀	Bulk temperature ($=T_h + T_c/2$) [K]		
u, v	Velocity components in x, y directions [m s ⁻¹]	C	Cold
u _w	Side wall velocity ($= v_w L$) [m s ⁻¹]	H	Hot
x, y	Dimensional Cartesian coordinates [m]	ff	Fluid friction
		Th	Thermal



References

- [1] Ait Hssain, M., Mir, R., and El Hammami, Y., Numerical Simulation of the Cooling of Heated Electronic Blocks in Horizontal Channel by Mixed Convection of Nanofluids, *Journal of Nanomaterials*, 2020, Article ID 4187074, 11 p.
- [2] Vasiliev, A. Yu., Sukhanovskii, A. N., Stepanov, R. A., Convective turbulence in a cubic cavity under nonuniform heating of a lower boundary, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 61, 2020, 1049-1058.
- [3] Dhahad, H.A., Al-Sumaily, G.F., Habeeb, L.J., Thompson, M.C., The Cooling Performance of Mixed Convection in a Ventilated Enclosure With Different Ports Configurations, *Journal of Heat Transfer*, 142(12), 2020, 122601.
- [4] Vasiliev, A., Sukhanovskii, A., Turbulent convection in a cube with mixed thermal boundary conditions: low Rayleigh number regime, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 174, 2021, 121290.
- [5] Hu, Z.X., Cui, G.X., Zhang, Z.S., Numerical study of mixed convective heat transfer coefficients for building cluster, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 172, 2018, 170-180.
- [6] Sheikholeslami, M., Farshad, S.A., Shafee, A., Babazadeh, H., Performance of solar collector with turbulator involving nanomaterial turbulent regime, *Renewable Energy*, 163, 2021, 1222-1237.
- [7] Kumar, A., Ray, R.K., Sheremet, M.A., Entropy generation on double-diffusive MHD slip flow of nanofluid over a rotating disk with nonlinear mixed convection and Arrhenius activation energy, *Indian Journal of Physics*, 2021, doi: 10.1007/s12648-021-02015-2.
- [8] Youcef, A., Saim, R., Numerical Analysis of the Baffles Inclination on Fluid Behavior in a Shell and Tube Heat Exchanger, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 7, 2021, 312-320.
- [9] Ghalambaz, M., Jun Zhang, J., Conjugate solid-liquid phase change heat transfer in heatsink filled with phase change material-metal foam, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 146, 2020, 118832.
- [10] Ghalambaz, M., Mehryan, S.A.M., Hajjar, A., Veismoradi, A., Unsteady natural convection flow of a suspension comprising Nano-Encapsulated Phase Change Materials (NEPCMs) in a porous medium, *Advanced Powder Technology*, 31(3), 2020, 954-966.
- [11] Hajjar, A., Mehryan, S.A.M., Ghalambaz, M., Time periodic natural convection heat transfer in a Nano-encapsulated phase-change suspension, *International Journal of Mechanical Sciences*, 166, 2020, 105243.
- [12] Ghalambaz, M., Zadeh, S. M. H., Mehryan, S.A.M., Pop, I., Wen, D.S., Analysis of melting behavior of PCMs in a cavity subject to a non-uniform magnetic field using a moving grid technique, *Applied Mathematical Modelling*, 77(2), 2020, 1936-1953.
- [13] Bejan, A., A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer, *Journal of Heat Transfer*, 101(4), 1979, 718-725.
- [14] Bejan, A., The thermodynamic design of heat and mass transfer processes and devices, *Journal of Heat and Fluid Flow*, 8, 1987, 258-275,
- [15] Izadi, S., Armaghani, T., Ghasemiasl, R., Chamkha, A.J., Molana, M., A comprehensive review on mixed convection of nanofluids in various shapes of enclosures, *Powder Technology*, 343, 2019, 880-907.
- [16] Mustafa Abdul Salam, M., Hasanen Mohammed, H., Auday Awad, A., Laith Jafer, H., Review on Mixed Convective Heat Transfer in Different Geometries of Cavity with Lid Driven, *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 43(7), 2020, 12-25.
- [17] Yang, L., Kai Du, K., A comprehensive review on the natural, forced, and mixed convection of non-Newtonian fluids (nanofluids) inside different cavities, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 140, 2020, 2033-2054.
- [18] Oztop, H.F., Al-Salem, K., A review on entropy generation in natural and mixed convection heat transfer for energy systems, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 16(1), 2012, 911-920.
- [19] Sciacovelli, A., Verda, V., Sciubba, E., Entropy generation analysis as a design tool-a review, *Renewable & Sustainable Energy Reviews*, 43, 2015, 1167-1181.
- [20] Biswal, P., Basak T., Entropy generation vs energy efficiency for natural convection based energy flow in enclosures and various applications: A review, *Renewable & Sustainable Energy Reviews*, 80, 2017, 1412-1457.
- [21] Sheikholeslami, M., Arabkoohsar, A., Ismail, K.A.R., Entropy analysis for a nanofluid within a porous media with magnetic force impact using non-Darcy model, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 112, 2020, 104488.
- [22] Sheikholeslami, M., Farshad, S.A., Shafee, A., Babazadeh H., Numerical modeling for nanomaterial behavior in a solar unit analyzing entropy generation, *Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers*, 112, 2020, 271-285.
- [23] Selimefendigil, F., Öztop, H.F., Sheikholeslami, M., Impact of local elasticity and inner rotating circular cylinder on the magneto-hydrodynamics forced convection and entropy generation of nanofluid in a U-shaped vented cavity, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2020, doi: 10.1002/mma.6930.
- [24] Rabbi, K.Md, Sheikholeslami, M., Karim, A., Shafee, A., Li, Z., Tlili, I., Prediction of MHD flow and entropy generation by Artificial Neural Network in square cavity with heater-sink for nanomaterial, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 541(1), 2020, 123520.
- [25] Mondal, P., Mahapatra, T.R., Parveen, R., Entropy generation in nanofluid flow due to double diffusive MHD mixed convection, *Heliyon*, 7, 2021, e06143.
- [26] Ebrahimi, D., Yousefzadeh, S., Akbari, O.A., Montazerifar, F., Rozati, S.A., Nakhjavani, S., Safaei, M.R., Mixed convection heat transfer of a nanofluid in a closed elbow-shaped cavity (CESC), *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 2021, doi: 10.1007/s10973-021-10548-1.
- [27] Khosravi, R., Rabiei, S., Khaki, M., Safaei, M.R., Goodarzi, M., Entropy generation of graphene-platinum hybrid nanofluid flow through a wavy cylindrical microchannel solar receiver by using neural networks, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 2021, doi: 10.1007/s10973-021-10828-w.
- [28] Cimpean, D.S. and Pop, I. (2021), Entropy generation of a nanofluid in a porous cavity with sinusoidal temperature at the walls and a heat source below, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, 2021, doi: 10.1108/HFF-10-2020-0654.
- [29] Maoagal, A., Bessaih, R., Heat Transfer and Entropy Analysis for Mixed Convection in a Discretely Heated Porous Square Cavity, *Fluid Dynamics & Materials Processing*, 9(1), 2013, 35-59.
- [30] Roy, M., Roy, S., Basak, T., Analysis of entropy generation on mixed convection in square enclosures for various horizontal or vertical moving wall(s), *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 68, 2015, 258-266.
- [31] Roy, M., Basak, T., Roy, S., Pop, I., Analysis of Entropy Generation for Mixed Convection in a Square Cavity for Various Thermal Boundary Conditions, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 68(1), 2015, 44-74
- [32] Roy, M., Basak, T., Roy, S., Analysis of Entropy Generation During Mixed Convection in Porous Square Cavities: Effect of Thermal Boundary Conditions, *Numerical Heat Transfer, Part A*, 68, 2015, 925-957.
- [33] Roy, M., Biswal, P., Roy, S., Basak, T., Role of various moving walls on entropy generation during mixed convection within entrapped porous triangular cavities, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 71(4), 2017, 423-447.
- [34] Bhatti, M.M., Ali Abbas, M., Rashidi, M., Entropy Generation in Blood Flow With Heat and Mass Transfer for the Ellis Fluid Model, *Heat Transfer Research*, 49(8), 2018, 747-760.
- [35] Bhatti, M.M., Sheikholeslami, M., Shahid, A., Hassan, M., Abbas, T., Entropy generation on the interaction of nanoparticles over a stretched surface with thermal radiation, *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 570(5), 2019, 368-376.
- [36] Khan, I., Khan, W.A., Qasim, M., Idrees Afridi, A., Sayer O. Alharbi, S.O., Thermodynamic Analysis of Entropy Generation Minimization in Thermally Dissipating Flow Over a Thin Needle Moving in a Parallel Free Stream of Two Newtonian Fluids, *Entropy*, 21(1), 2019, 74.
- [37] Özüit, E.B., Second Law Analysis of Mixed Convection of Magneto hydrodynamic Flow in an Inclined Square Lid-Driven Enclosure, *Journal of Thermal Engineering*, 5(6), 2019, 240-251.
- [38] Mehta, S.K., Pati, S., Numerical study of thermo-hydraulic characteristics for forced convective flow through wavy channel at different Prandtl numbers, *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 141, 2020, 2429-2451.
- [39] Kashyap, D., Dass, A.K., Oztop, H.F., Abu-Hamdeh, N., Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann analysis of entropy generation in a hot-block-inserted square cavity for different Prandtl numbers, *International Journal of Thermal Sciences*, 165, 2021, 106948.
- [40] Sahaya Jenifer, A., Saikrishnan, P., Lewis, R.W., Unsteady MHD Mixed Convection Flow of Water over a Sphere with Mass Transfer, *J. Appl. Comput. Mech.*, 7(2), 2021, 935-943.
- [41] Abanoub, G. K., Eman H. H., Sarwat N. H., Numerical simulation of three-sided lid-driven square cavity, *Engineering Reports*, 2, 2020, e12151.
- [42] Bejan, A., *Entropy Generation Through Heat and Fluid Flow*, First Edition, Wiley & Sons, 1982.
- [43] Micula, S., Pop, I., Numerical results for the classical free convection flow problem in a square porous cavity using spline functions. *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 31(3), 2021, 753-765.
- [44] Kawamura, T., Takami, H., Kuwahara, K., New higher order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations. Ninth International



Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics. *Lecture Notes in Physics*, 1985, 218, 291-295.

[45] Bejan, A., *Heat Transfer*, Wiley, New York, 1993

[46] Dinçer, I., Zamfirescu, C., *Dring Phenomena: Theory and Applications*, First Edition, John Wiley & Sons, 2016.

[47] Ferziger, J.H., and M. Peric, M., *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 2002.

[48] Pallares, J., Arroyo, M.P., Grau, F.X., and, Giralt F., Experimental laminar Rayleigh-Benard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh and Prandtl numbers, *Experiments in Fluids*, 31(2), 1998, 208–218.

[49] Goodarzi, M., Safaei, M. R, Oztop, H. F., Karimipour, A., Sadeghinezhad, E, Dahari, M., Kazi, S. N. and Jomhari1, N., Numerical Study of Entropy Generation due to Coupled Laminar and Turbulent Mixed Convection and Thermal Radiation in an Enclosure Filled with a Semitransparent Medium, *The Scientific World Journal*, Article ID 761745, 2014, 8 p.

[50] Patil, P.M, Latha, D.N., Chamkha, A.J., Non-similar Solutions of MHD Mixed Convection over an Exponentially Stretching Surface: Influence of Non-uniform Heat Source or Sink, *J. Appl. Comput. Mech.*, 7(3), 2021, 1334-1347.

[51] Asad, M.F.A. , Nur Alam, M., Tunç, C., Sarker., M.M.A., Heat Transport Exploration of Free Convection Flow inside Enclosure Having Vertical Wavy Walls, *J. Appl. Comput. Mech.*, 7(2), 2021, 520-527.

[52] Jani, S., Mahmoodi, M., Amini, M., Magneto-hydrodynamic Free Convection in a Square Cavity Heated from Below and Cooled from Other Walls, *International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering*, 7(4), 2013,750-755.

[53] Aydin, O., Yang, W. J., Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls, *Numerical Heat Transfer Part A*, 37, 2000, 695-710.

[54] Cheng, T.S., Characteristics of mixed convection heat transfer in a lid-driven square cavity with various Richardson and Prandtl numbers, *International Journal of Thermal Sciences*, 50(2), 2011, 197-205.

[55] Biswas, N., Manna, N.K., Transport phenomena in a sidewall-moving bottom-heated cavity using heatlines, *Sādhanā*, 42(2), 2017, 193–211.

[56] Evgrafova, A., Sukhanovskii, A., Specifics of heat flux from localized heater in a cylindrical layer, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 135, 2019, 761-768.


[57]] Evgrafova, A., Sukhanovskii, A., Dependence of boundary layer thickness on layer height for extended localised heaters, *Experimental Thermal and Fluid Science*, 121, 2021, 110275.


[58] Nadeem, S., Khan, A.U., Saleem S., A comparative analysis on different nanofluid models for the oscillatory stagnation point flow, *Eur. Phys. J. Plus*, 131, 2016, 261.

[59] Khetib, Y., Alahmadi, A.A., Alzaed, A., Azimy, H., Sharifpur, M., Cheraghian, G., Effect of Straight, Inclined and Curved Fins on Natural Convection and Entropy Generation of a Nanofluid in a Square Cavity Influenced by a Magnetic Field, *Processes*, 9(8), 2021, 1339.

ORCID iD

Nawal Ferroudj  <https://orcid.org/0000-0001-7743-0971>

Hasan Koten  <https://orcid.org/0000-0002-1907-9420>

Saadoun Boudebous  <https://orcid.org/0000-0003-0136-0748>



© 2022 Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution-NonCommercial 4.0 International (CC BY-NC 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>).

How to cite this article: Ferroudj N., Koten H., Boudebous S. Mixed Convection Heat Transfer and Entropy Generation in a Water-filled Square Cavity Partially Heated from Below: The Effects of Richardson and Prandtl Numbers, *J. Appl. Comput. Mech.*, 8(1), 2022, 282–297. <https://doi.org/10.22055/JACM.2021.38614.3259>

Publisher's Note Shahid Chamran University of Ahvaz remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.



NUMERICAL SIMULATION OF PRANDTL NUMBER EFFECT ON ENTROPY GENERATION IN A SQUARE CAVITY

Nawal Ferroudj^{1,*}, Hasan Köten², Sacia Kachi³, Saadoun Boudebous⁴

ABSTRACT

In this study, entropy generation in laminar mixed convection in a square fluid-filled cavity is numerically studied. The middle of the lower wall of the cavity is heated to a constant temperature T_h while the side-walls are maintained at a constant temperature T_c , and moving upper ward at a constant velocity to understand the effects of irreversibility distribution on the entropy generation for different engineering applications. For the studied control surface, remaining parts of lower and upper walls are adiabatic. The finite difference method is used to solve the governing equation. The entropy analysis is carried out to determine the irreversibility which is generated in the cavity for different Prandtl number ($Pr=0.0212, 0.71$ and 6.35), the effect of the irreversibility distribution ratio on entropy generation was investigated. It seen that effect of irreversibility distribution ratio ($\gamma=10^{-2}$ and 10^{-4}) have play important role on the total entropy for different Prandtl number. Also it is clear that, for all Prandtl number, the total entropy generation increase by increasing the irreversibility distribution ratio and the increase of Prandtl number regardless the values of $Ri=1$ and $Re=100$ because of the increase of the velocity gradients.

Keywords: *Generation Entropy Generation, Prandtl Number, Square Cavity, Finite Difference Method*

INTRODUCTION

Flow and heat transfer in different cavities have a wide range of applications in the engineering devices and industry, such as: the solar energy system, cooling systems producing nuclear energy, chemical and electronic devices and heat exchangers etc [1-3]. Due to its uttermost importance, many applications, many researches, investigations and studies have been created to raise the performance and quality of those engineering systems. Among these studies is the study of the entropy generation. Entropy generation is a measure of dissipated energy and degradation of the performance of operational devices, such as transport and flow process [1]. The study of entropy generation has been initiated by Bejan [3], which considers that the entropy generation of fluid flow under forced and laminar convection is induced by viscous and thermal mechanisms, predicting (involving) velocity and temperature gradients. We present in the following some studies concerning this subject. Yilbas et al. [4] presented a numerical study of the entropy generation in natural convection and laminar flow in a square cavity with bottom-heated, top-down and vertical walls adiabatic. Nine cases were studied by varying the difference of temperature between the hot wall and the cold wall (the Rayleigh number (Ra) varies between $1.36 \cdot 10^5$ and $3.96 \cdot 10^5$). They found that entropy generation increases as the velocity of flow in the horizontal direction increases. The minimum of the entropy generation is raised for a particular number of Rayleigh numbers (Ra). Baytas et al. [5] reported a numerical study of the entropy generation in laminar natural convection in an inclined porous square cavity. Simulations are performed for angles of inclination varying between 0° and 360° and Rayleigh number values (Ra) varying between 10^2 and 10^4 . They found that thermal irreversibilities dominate viscous irreversibilities as the Rayleigh number (Ra) increases. The Bejan number (Be) increases significantly between $\phi = 150^\circ$ and $\phi = 270^\circ$ (angles of inclination). Shuja et al. [6] conducted a numerical study of the entropy generation in laminar mixed convection in a square cavity, containing an obstacle. The influence of the location of the fluid outlet and the aspect ratio ($a = 0.25$ and 4) of the obstacle were examined. Yilbas et al. [7] have taken over the same study as the previous one with the same geometric configuration. In this second study, the influence of the Stanton number and the aspect ratio ($a = 0.25, a =$

This paper was recommended for publication in revised form by Regional Editor Younes Menni

¹Laboratory of Biotechnology, National Higher School of Biotechnology, Taoufik Khaznadar, University town, Constantine, Algeria

²Department of Mechanical Engineering, Istanbul Medeniyet University, Istanbul, Turkey

³Faculty of Process Engineering, University of Salah Bounnider Constantine 3, Algeria

⁴Faculty of Sciences and Applied Sciences, University of Larbi BenM'hidi, Oum el Bouaghi, Algeria

*E-mail address: ferroudj.nawal@gmail.com, n.ferroudj@ensbiotech.edu.dz

Orcid id: 0000-0001-7743-0971, 0000-0002-1907-9420, 0000-0003-4420-4331, 0000-0003-0136-0748

Manuscript Received 28 October 2020, Accepted 12 February 2021

1, and $a = 4$) of the obstacle were examined. Magherbi et al. [8] conducted a numerical study on the entropy generation of unsteady natural convection in a square cavity. The Rayleigh number (Ra) varies between 10^3 and 10^5 , whereas the ratio of the irreversibility distribution (ϕ) varies between 10^{-4} and 10^{-1} . The evolution of the maximum entropy generation in this configuration has been reported. The effect of the ratio of irreversibility distribution was examined. Ovando-Chacon et al. [9] studied numerically the mixed convection in a square cavity heated from corners. They found that the entropy generation by heat transfer becomes more intense at the vertical walls and the central low part of the cavity due to the stronger temperature gradients at this region. Bouchoucha et al. [10] presented an investigation of the natural convection and entropy generation of nanofluids in a square cavity. They observed that the average Nusselt number ratio increases with the solid volume fraction, and the maximum total entropy generation ratio occurs at a low Rayleigh number for different values of ϕ . Selimefendigil et al. [11] examined the mixed convection and entropy generation in a vented cavity with inlet and outlet ports under the effects of an inclined magnetic field. The numerical simulations are performed for various values of Reynolds numbers between $100 < Ra < 500$, Hartmann number between 0 and 50, and solid particle volume fractions of CuO nanoparticles between 0 and 4%. They found that the addition of nanoparticles increases the overall entropy generation rate. The literature review shows that the entropy generation in laminar mixed convection in cavities is a subject that remains to be explored. Different studies were studied and reported in the literature [12-16].

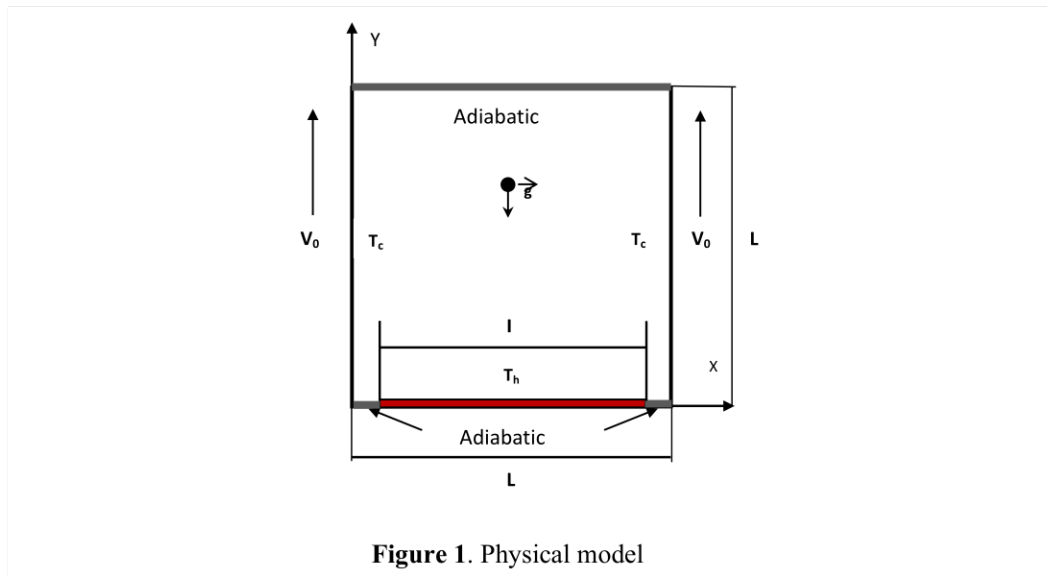
The present work investigates the entropy generation of mixed laminar convection in a square cavity. The main objective is to determinate the effect of Prandtl number on the fields of streamlines, isotherm, heat and viscous entropy generation and Bejan number, evolution of heat and viscous entropy generation-profiles, Bejan end Nusselt number and total entropy generation- profiles.

MATERIAL AND METHODS

Problem Statement

The physical model considered is shown in Fig.1. It is a square cavity the bottom of which a part is subjected to a constant temperature, of length equal to four fifth of the cavity L . the side walls of this cavity move upwardly with a specified velocity, and the all other parts are considered adiabatic. The entropy of the fluid flow is generated within the cavity created 2 by the irreversibility of the viscous and thermal mechanisms due to velocity and temperature gradients.

It is assumed that the fluid in the cavity is Newtonian, incompressible, and has constant properties, for laminar flow, neglecting the viscous dissipation effect, and employing the Boussinesq approximation.



Dimensionless Governing Equations

The governing equations for the present problem for steady two-dimensional mixed convection flow in a square cavity are the conservation continuity of mass, momentum and energy equation than can be expressed as follows [17]:

- *Continuity equation:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

- *Momentum equation:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^*}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g\beta(T - T_f) \quad (3)$$

- *Energy equation:*

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

It is assumed that the fluid in the cavity is Newtonian, incompressible, and has constant properties, for laminar flow, neglecting the viscous dissipation effect, and employing the Boussinesq approximation.

The dimensionless form of the governing equations may be written with following dimensionless variables of numbers:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_H - T_c}, \quad U = \frac{u}{V_0}, \quad V = \frac{v}{V_0}, \quad P = \frac{p - \rho g y}{\rho V_0^2}, \quad \tau = t \frac{V_0}{L}$$

The governing equations in dimensionless form are transformed into stream-vorticity function (ω , ψ) and energy equation, are expressed as follows:

- *Energy equation*

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (5)$$

- *Stream function equation*

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (6)$$

- *Vorticity equation*

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right) + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (7)$$

Reynolds (Re), Prandtl (Pr) and Grashof (Gr) are the principal controls parameters; they are defined as follow:

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad , \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad , \quad Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

- *Components of the velocity:*

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad , \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \tag{8}$$

The dimensionless vorticity and stream are defined by:

$$\omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y} \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \tag{10}$$

The local Nusselt number $Nu(X)$ is used to characterize the heat flux between the heated part of the bottom wall, and the fluid in the cavity. It is expressed as [18]:

$$Nu(X) = -\left. \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right|_{Y=0} \tag{11}$$

The average Nusselt number is obtained by integration the previous local Nusselt number $Nu(X)$:

$$Nu_m = \int_0^L Nu(X) dX \tag{12}$$

- *Entropy generation equation*

Entropy generation rate for a two-dimensional flow is expressed as follow [19, 20]:

$$s_{gen} = \frac{k}{T^2} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{T} \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \tag{13}$$

By dividing s_{gen} by $\frac{k \Delta T^2}{(TL)^2}$ and by using the same dimensionless parameters, the dimensionless local

entropy generation due to heat transfer and fluid friction for a two dimensional heat and fluid flow in Cartesian coordinates can be written as:

$$\dot{S}_{gen} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right]}_{S_{\theta}} + \gamma \underbrace{\left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]}_{S_{\psi}} \tag{14}$$

where γ is the irreversibility distribution ratio is given as

$$\gamma = \frac{\mu TV_o^2}{k\Delta T^2}$$

The first and the second terms (S_θ , S_ψ) are represented the local entropy generation due to the heat transfer and viscous effects, respectively.

The total entropy generation is expressed by:

$$S_{gen} = \int_A \dot{S}_{gen}(X,Y)dXdY \quad (15)$$

The Bejan number Be is defined as the ratio between entropy generations due to heat transfer irreversibility to the total entropy generation, it's written as:

$$Be = \frac{S_\theta}{S_\theta + S_\psi}, \quad \begin{cases} S_\theta = \int_A \dot{S}_\theta dA \\ S_\psi = \int_A \dot{S}_\psi dA \end{cases} \quad (16)$$

It is appropriate to mention average Bejan number in order to determinate which is the dominant, heat transfer or fluid friction irreversibility.

Therefore, $Be > 0.5$ implies dominance of heat transfer irreversibility, and $Be < 0.5$ implies dominance of fluid friction irreversibility.

Dimensionless Boundary Conditions

The boundary conditions which are adopted for the resolution of the problem are:

$$\begin{aligned} \theta = 0 \quad U = 0, V = 1 \quad \text{for } X = 0 \text{ and } 1 \quad \text{and } 0 < Y < 1 \\ \theta = 1 \quad U = V = 0 \quad \text{for } Y = 0 \quad \text{and } \frac{1-\varepsilon}{2} \leq X \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U = V = 0 \quad \text{for } Y = 0 \quad \text{and } 0 < X < \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2} < X < 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad U = V = 0 \quad \text{for } Y = 1 \quad \text{and } 0 < X < 1 \end{aligned} \quad (17)$$

In which $\varepsilon = \frac{l}{L}$ is the dimensionless length of the heated part.

NUMERICAL METHOD

The dimensionless equations are solved by a numerical approach on the finite difference method. The system of equations (5)-(14), together with the initial and boundary conditions, stated above were discretized of the various terms of the governing equations is developed using high order scheme as the third order upwind scheme for the convective terms [21], centred fourth order for the diffusive terms, as well as the partial derivatives of the first order. The Runge-Kutta fourth order used to discretize the temporal term scheme [22]. An iterative procedure based on successive Non Linear Over Relaxation method (NLOR) was used to solve the discretized stream function equation [23]. There are different studies related the applications in the literature [24-29]. A convergence criterion for the stream function was imposed as each time step. The computation is carried out using a developed FORTRAN code. In order to convergence the obtained numerical results, total entropy generation for square cavities with different ϕ and Ra values were obtained and compared with the results of similar studies. Results are agreement with the literature.

GRID INDEPENDENCE STUDY

The effect of grid size is examined on four different grids 81x81; 101x101; 161x161 and 201x201. These comparisons allow us the choice of mesh 101x101 for the present work, as it provides a good compromise between the accuracy of these calculations and the duration of computation time.

Table 1. Maximum values of Num for different grids, at Ri=17

Grid	Time [sec]	Average Nusselt Number: Num
81x81	5425	5.52864
101x101	7248	5.55646
161x161	9653	5.61192
201x201	13264	5.63508

CODE VALIDATION

In order to check on the validity of the computer code developed for the solution of the problem considered in the present study, it was validated with Aydin and Yang [30]. Figure 2 illustrates a comparison between the obtained results and those obtain in the Aydin’s results. The results are presented in terms of dimensionless vertical velocity profiles V, at the horizontal mid-plane. The figures show excellent agreement between the present code and their results.

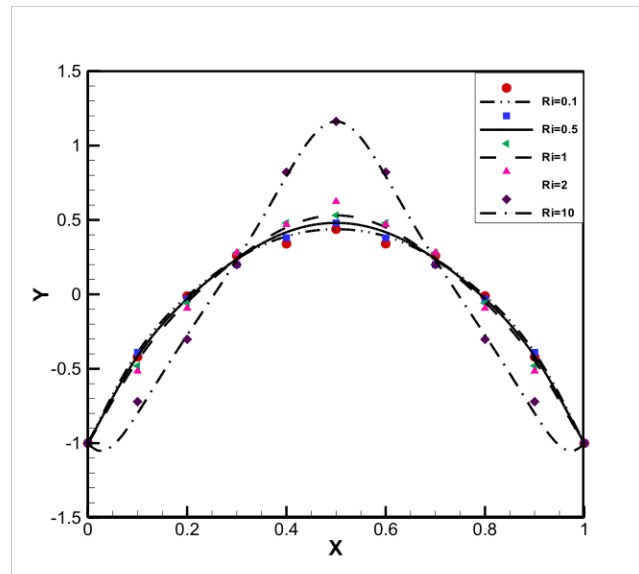


Figure 2. Comparison of the horizontal mid-plane velocity component at $Y = 0.5$ with the results obtained in Aydin and yang (*Lines: Present work, Symbols: Aydin's results*)

RESULTS AND DISCUSSION

This investigation is mainly related to entropy generation distribution in a square cavity by using the second law of thermodynamics. Detailed computations have been carried for a fixed Reynolds number ($Re=100$), the length of heated part ($l=0.8$), and for various fluids used in this study are ($Pr=0.0212, 0.71$ and 6.35), within the values of Richardson number and irreversibility distribution ration are $Ri=1$ and $\gamma=10^{-4}$, respectively. For all the studied grid of size (101×101) with a time steps $\Delta t = 10^{-4}$ are found sufficiently enough to achieve the steady state and to realie the imposed convergence criteria mentioned above.

Streamlines and Isotherms

Figure 3 illustrates isotherms (θ) and streamlines (ψ) for $Pr=0.0212$, 0.71 and 6.35 . The streamlines represent a symmetrical flow, characterized by a pair of counter-rotating and symmetrical cells for all values of Prandtl number. Thus, the streamlines are concentrated near the upper walls. The general structures of these fields are qualitatively similar, regardless of the Prandtl number.

For low Prandtl number ($Pr=0.0212$), the thermal field shows a stratification of temperatures near the heated bottom wall, when Prandtl number increases and reaches the value $Pr=0.71$ a part of the heat is trained to the upward of the cavity through velocity of the side walls. For high Prandtl number ($Pr=6.35$), the isotherm shows that the heat recovered from the hot source is transported by convection to the upwards of the cavity by the pair of center cells.

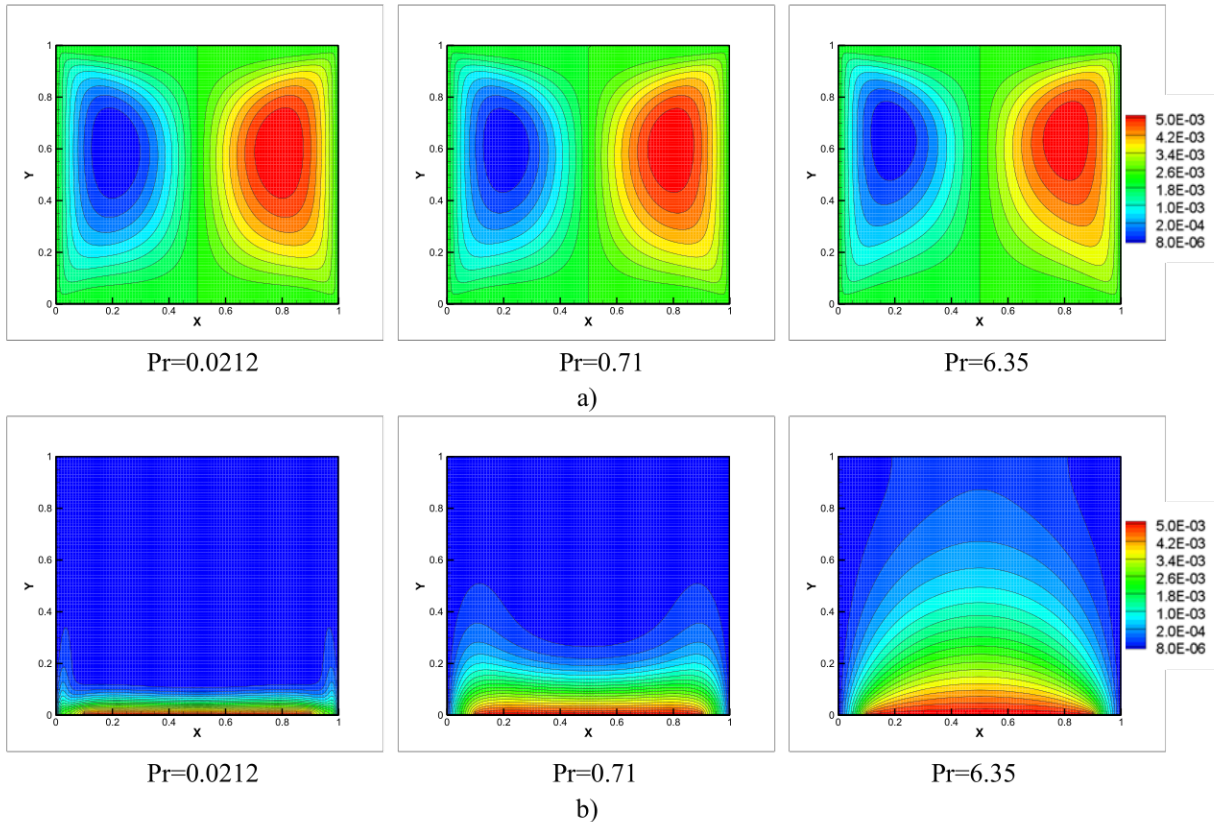


Figure 3. Streamlines a) and isotherms b) for different Prandtl numbers, $Ri=1$, $Re=100$ and $\gamma=10^{-4}$

Fields of Heat and Viscous Entropy Generation

The effect of Prandtl number on the fields of heat and viscous entropy generation present in figure. 4 (a-b), for $Ri=1$ and $\gamma=10^{-4}$.

The thermal entropy generation is consistent with the temperature distribution; it follows the propagation of heat, given by Figure 3 (a), from the bottom heated part, it is created all along this wall (especially to the extremities of the heated part for the low $Pr=0.0212$ and 0.71). When the Prandtl number increases the heat entropy generation increases, until it is concentrated also along the moving sidewalls for the high Prandtl number ($Pr=6.35$).

The viscous entropy generation is created near the two side walls and the four corners of the cavity. Its concentration is decreasing with the increase of the Prandtl number.

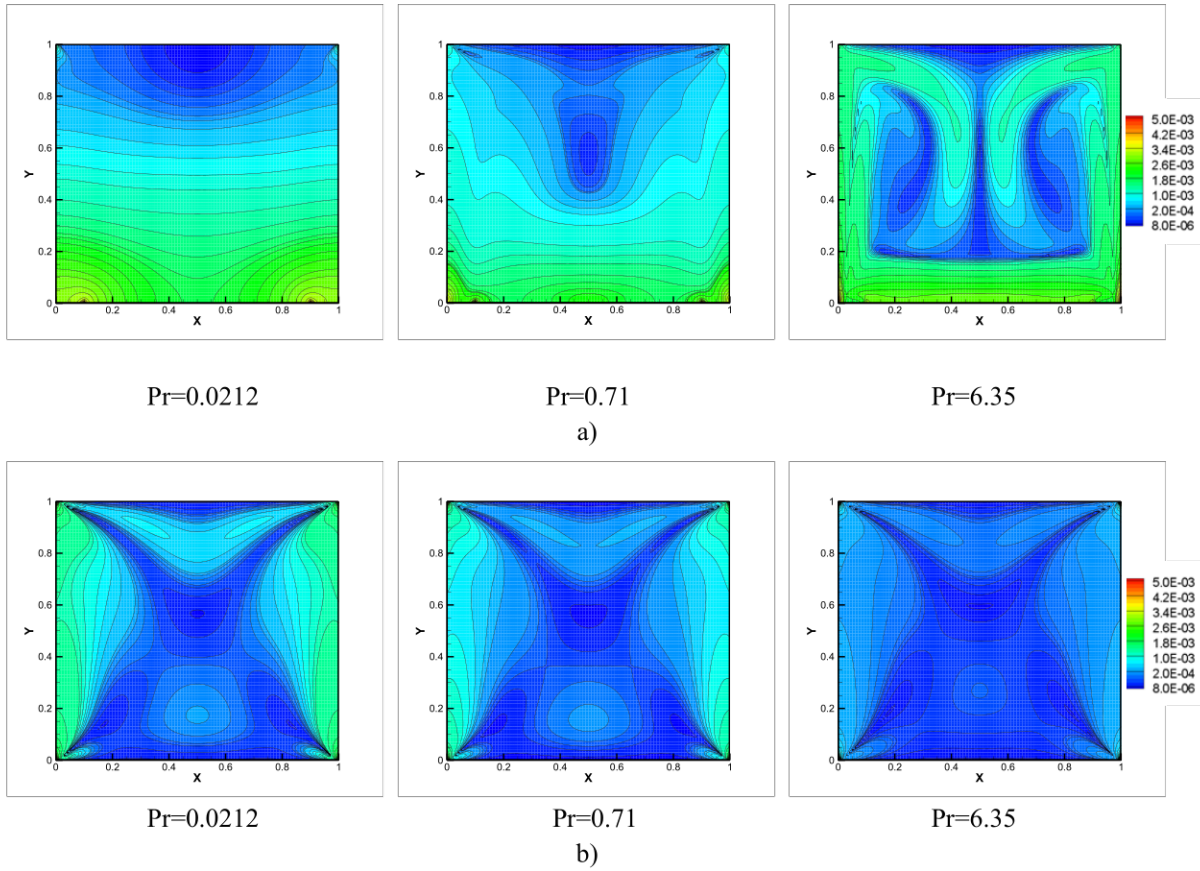


Figure 4. Fields of entropy generation due to heat transfer S_{θ} (a) and fluid friction S_{ϕ} (b) for different Prandtl numbers, $Ri=1$, $Re=100$ and $\gamma=10^{-4}$

Fields of Bejan Number

The fields of Bejan number obtained have been presented at three different values of Prandtl number ($Pr = 0.0212, 0.71$ and 6.35) for comparison purposes as shown in figure 5. It shows that the Bejan number (development) decreases with the increase in the Prandtl number; it increases until it reaches its maximum value in the lower two-thirds and an upper part of the cavity for $Pr=6.35$. Moreover, the low values of this number are observed on the center of the upper wall and the top of the side walls. These results are confirmed by those obtained in the figures (3-4).

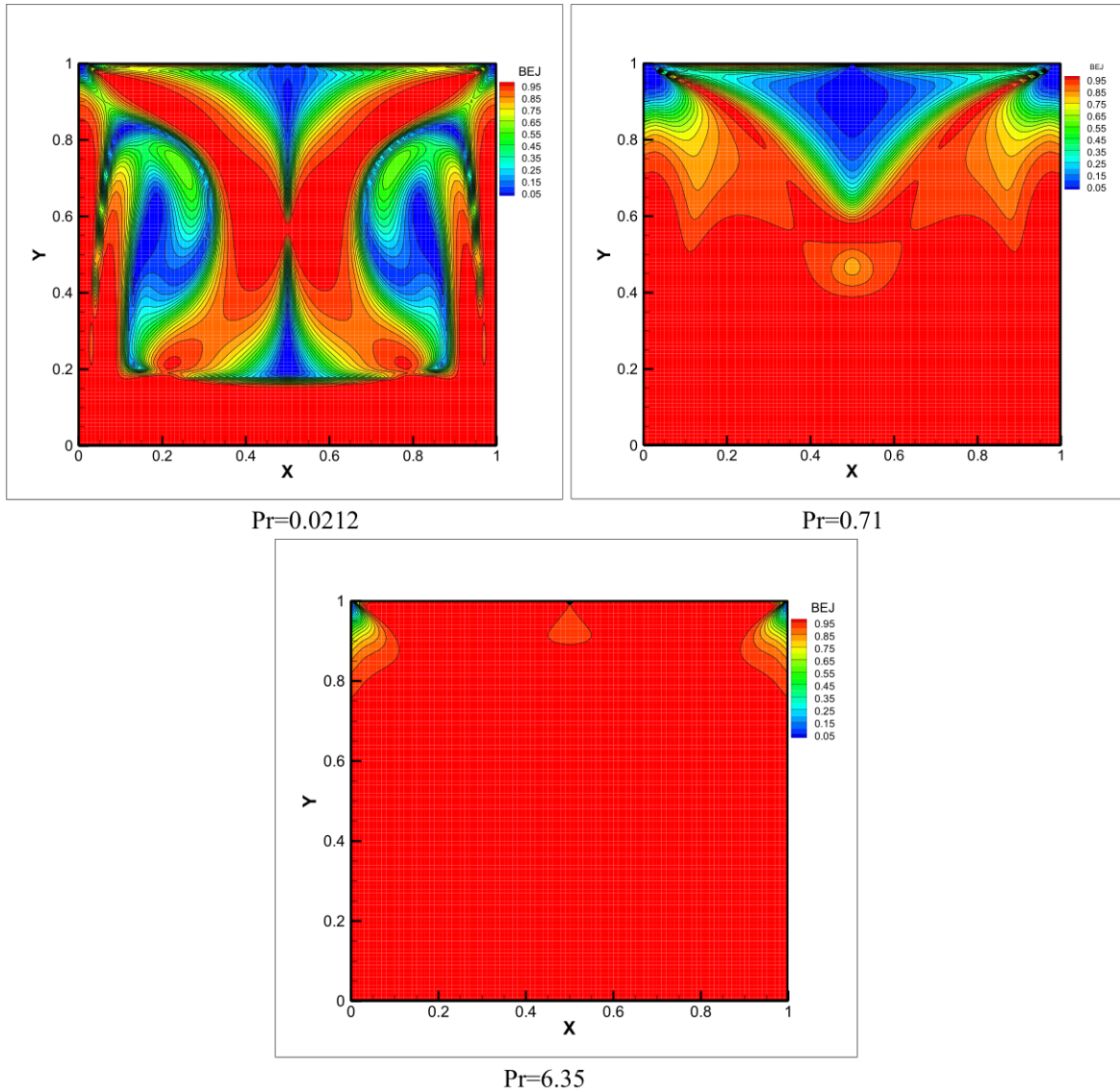


Figure 5. Fields of Bejan number for different Prandtl numbers, $Ri=1$, $Re=100$ and $\gamma=10^{-4}$

Profiles of Thermal (S_θ) and Viscous (S_ψ) Entropy Generation

In order to investigate the influence of Prandtl number on both local thermal (S_θ) and viscous (S_ψ) entropy generation, Figure 6 (a-b) illustrates the variation of and with different values of Prandtl number. As it can be seen, for all values of this number, a very rapid decrease then a sudden increase in all the first time, then stabilization towards a constant asymptotic value, has been observed. The increase in the number of Prandtl implies the increase of local thermal entropy generation.

It is observed also that, for all values of Prandtl number, the viscous entropy generation decreases by increasing the Prandtl number regardless the values of Ri and Re . From the value of $Pr = 0.71$, the S_ψ varies slightly with the increase of the Prandtl number. We have also observed the low values of S_ψ compared to the values of the S_θ , this is confirmed by the results obtained in the figure 4 (a-b).

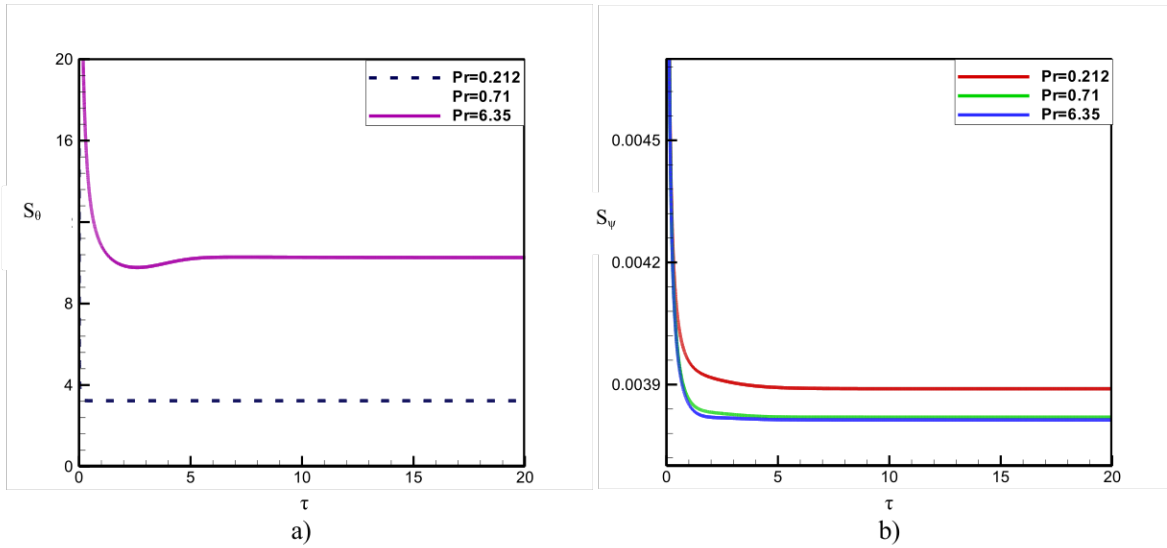


Figure 6. Profiles of entropy generation due to heat transfer S_θ a) and fluid friction S_ψ b) for different Prandtl numbers, $Ri=1$, $Re=100$ and $\gamma=10^{-4}$

Evolution of Bejan Number

This evolution increases very fast in the first moments to stabilize towards a constant value. It is observed that, regardless of the Prandtl number, the Bejan number is greater than **0.5**, which shows that the creation of entropy is essentially due to temperature gradients. It shows the increase of Bejan number into the cavity by augmenting Prandtl number.

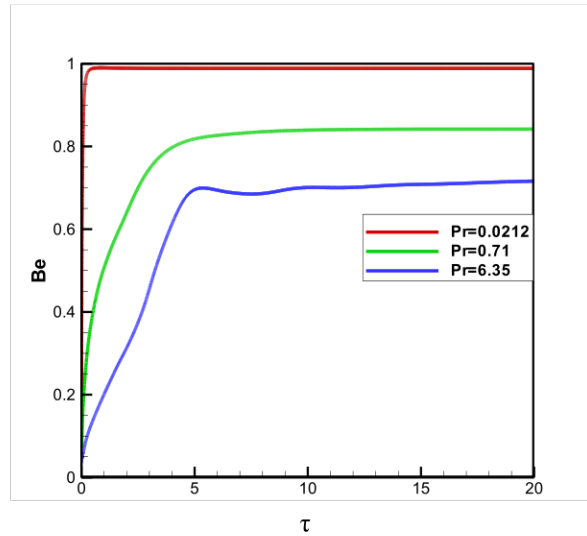


Figure 7. Evolution of Bejan number for different Prandtl numbers, $Ri=1$, $Re=100$ and $\gamma=10^{-4}$

Evolution of Nusselt Number

The heat transfer inside the square enclosure is presented by average Nusselt numbers given by equation (12). It is found, for all values of the Prandtl number, a very fast decrease of Nu_m in the first moments, then a tendency towards a limit value when the time increases. The increase in the number of Prandtl results in an increase in the average Nusselt number.

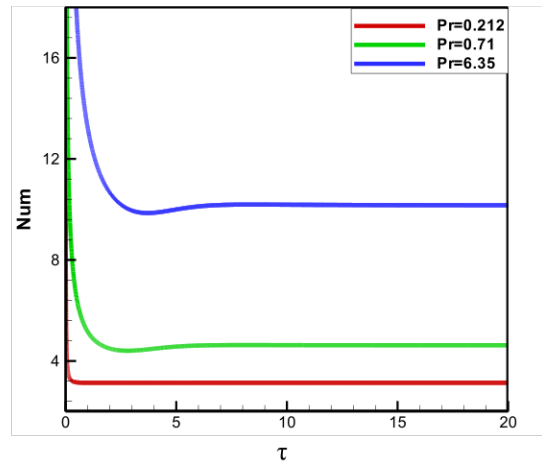


Figure 8. Evolution of average Nusselt number for different Prandtl numbers, $Ri=1$, $Re=100$ and $\gamma=10^{-4}$

Effect of The Irreversibility Distribution Ratio on The Total Entropy Generation

The evolution of the effect of irreversibility distribution ratio ($\gamma=10^{-2}$ and 10^{-4}) on the total entropy for different Prandtl number are plotted in figure 9 (a-b-c). It is observed that, for all Prandtl number, the total entropy generation increase by increasing the irreversibility distribution ratio and the increase of Prandtl number regardless the values of $Ri=1$ and $Re=100$ because of the increase of the velocity gradients.

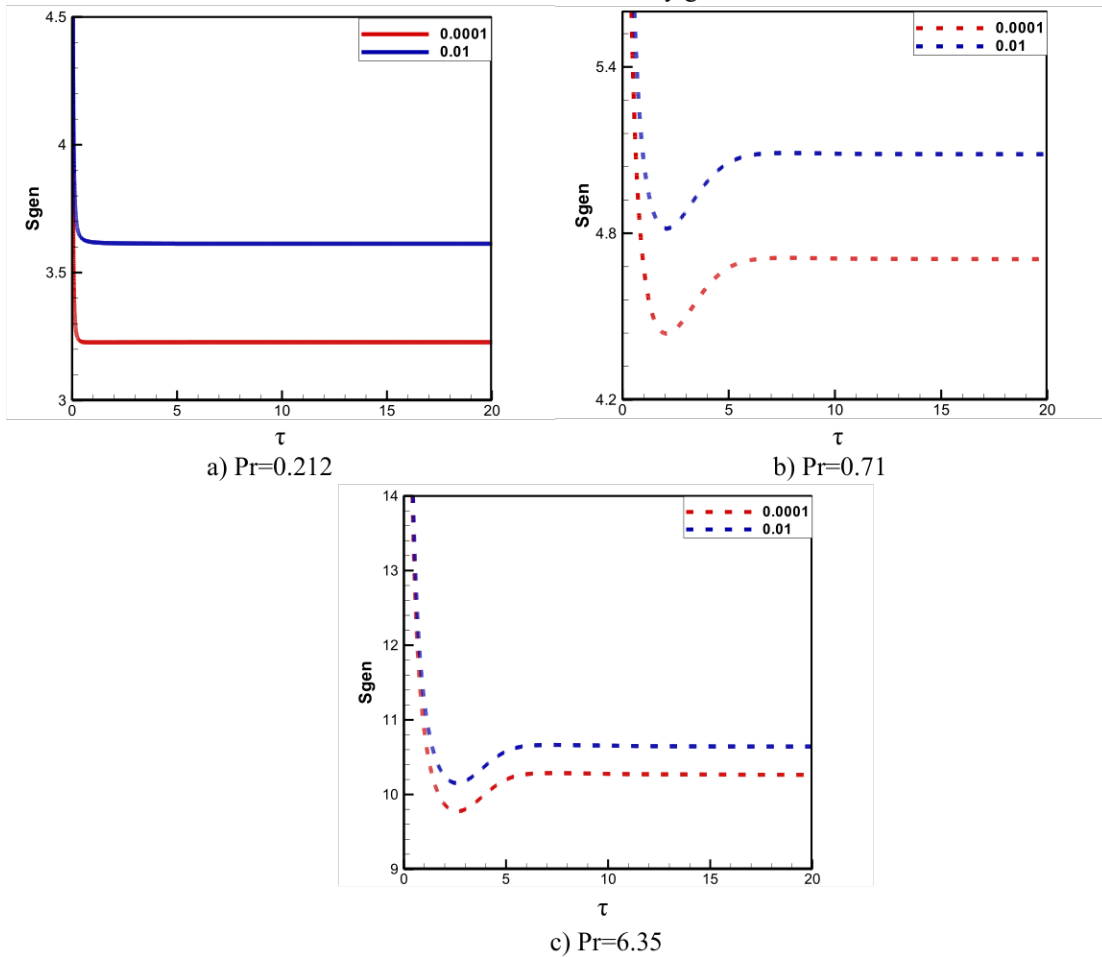


Figure 9. Effect of the irreversibility distribution ratio on the total entropy generation for different Prandtl numbers, $Ri=1$, $Re=100$ and $10^{-2} < \gamma < 10^{-4}$

CONCLUSION

In this numerical simulation of the Prandtl number effect on the entropy generation in laminar mixed convection, within a two dimensional square enclosure with moving cold sidewalls and heated from the bottom wall was investigated. The equations governing this phenomenon were discretized by the finite difference method, and the algebraic systems obtained were solved by appropriate numerical methods. The analysis of the preliminary results shows that the creation of the entropy increases with the increase of Prandtl number (because of the increase of the velocity gradients) and the irreversibility distribution ratio, when this number increases (Pr) the creation of the total entropy is essentially due to temperature gradients which is confirmed by the values of the Bejan number " $Be > 0.5$ ".

As thermodynamic approach entropy generation in different form such as laminar mixed convection in a square fluid-filled cavity is critical process in many applications. It is discussed in this study to understand the response of the system which has heated wall with a constant temperature T_h while the side-walls are maintained at a constant temperature T_c , and a constant velocity. Also it is seen that the irreversibility distribution ratio on the entropy generation in the cavity affected for the Prandtl number = 0.0212, 0.71 and 6.35.

NOMENCLATURE

C_p	Specific heat, kJ / kg °K
g	Gravitational acceleration, m s ⁻²
k	Thermal conductivity, W / m °K
l	Length of the heated part, m
L	Length of the cavity, m
P^*	Pressure, kg m ⁻¹ s ⁻²
P	Dimensionless pressure
Pr	Prandtl number
Ri	Richard number
S_{gen}	Entropy generation rate, J m ⁻³ s ⁻¹ K ⁻¹
S_{gen}	Dimensionless local entropy generation
t	Time, sec
T	Temperature, K
T_c	Cold temperature, K
T_h	Hot temperature, K
u, v	Velocity components along x and y , respectively, m s ⁻¹
U, V	Dimensionless velocity components
x, y	Cartesian coordinates, m
X, Y	Dimensionless coordinates

Greek symbols

β	Thermal expansion coefficient, K ⁻¹
ε	Dimensionless length of the heated part
ρ	Density of a fluid. kg/m ³
θ	Dimensionless temperature
τ	Dimensionless temperature

Subscripts

c	Refers to cold
-----	----------------

REFERENCES

- [1] Philippe A. JAVET, Pierre LERCH, Eric PLATTNER. Introduction à la chimie pour ingénieurs, Deuxième Edition, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1995.
- [2] A. Bejan. A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer, J. Heat Transfer, 101, 718-725, 1979. doi.org/10.1115/1.3451063

- [3] A. Bejan. The thermodynamic design of heat and mass transfer processes and devices, *J. Heat and Fluid Flow*, 8, 258-275, 1987. doi.org/10.1016/0142-727X(87)90062-2
- [4] B. S. Yilbas. Natural Convection and Entropy Generation in a Square Cavity, *International Journal of Entropy Research*, Res, 22, 1275-1290, 1998. doi.org/10.1002/(SICI)1099-114X(199811)22:14<1275::AID-ER453>3.0.CO;2-B
- [5] A. C. Baytaç. Entropy generation for natural convection an inclined porous cavity, *International Journal of Heat and Mass transfer*, Vol 43, pp 2089-2099, 1999. doi.org/10.1016/S0017-9310(99)00291-4
- [6] S. Z. Shuja, B. S. Yilbas, M. O. Iqbal. Mixed convection in a square cavity due to heat generation rectangular body, *International Journal of Numerical Method for Heat & Flow*, Vol 10, pp 824-841, 2000. DOI: 10.1108/09615530010359120
- [7] B. S. Yilbas, S. Z. Shuja, M. O. Iqbal. Energy and entropy analysis in a square cavity with protruding body: effect of protruding body aspect ratio, *International Journal of Energy Reserch*, Vol 26, 851-866, 2002. doi.org/10.1002/er.824
- [8] M. Magheribi, H. Abbassi, A. Ben Brahim. Entropy generation at the onset of natural convection, *International Journal of Heat and Mass*, Vol 46, pp 3444-3450, 2003. https://doi.org/10.1016/S0017-9310(03)00133-9
- [9] G.E. Ovando-Chacon. Entropy generation due to mixed convection in an enclosure with heated corners, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 55, Issue 4, pp 695-700, 2012. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2011.10.041
- [10] Abd el malik Bouchoucha and a. Natural Convection And Entropy Generation Of Nanofluids In A Square Cavity, *International Journal Of Heat And Technology*, vol.33 No.4, pp.1-10, 2015. DOI: 10.18280/ijht.330401
- [11] Fatih Selimefendigil, Hakan F. Oztop. Mixed convection and entropy generation of nanofluid flow in a vented cavity under the influence of inclined magnetic field, *Technical Paper*, pp1-12, 2019. DOI: 10.1007/s00542-019-04350-1
- [12] Almakki, M., Mondal, H., & Sibanda, P. Entropy Generation in MHD Flow of Viscoelastic Nanofluids with Homogeneous-Heterogeneous Reaction, Partial Slip and Nonlinear Thermal Radiation. *Journal of Thermal Engineering*, 6(3), 327-345, 2020. DOI: 10.18186/thermal.712452
- [13] Öğüt, E. B. Second Law Analysis Of Mixed Convection Of Magnetohydrodynamic Flow In An Inclined Square Lid-Driven Enclosure. *Journal of Thermal Engineering*, 5(6), 240-251, 2019. DOI: 10.18186/thermal.655023
- [14] Karakurt, Sinan, and Umit Gunes. "A New Approach For Evaluating The Rankine Cycle Through Entropy Generation." *Journal of Thermal Engineering* 5, no. 6: 141-148. DOI: 10.18186/thermal.651508
- [15] Rout, S. K. Experimental investigation and performance optimization of a cross flow heat exchanger by entropy generation minimization approach. *Journal of Thermal Engineering*, 5(2), 1-12, 2019. DOI: 10.18186/thermal.519128
- [16] Mansoor, S. Entropy Generation Rate In A Microscale Thin Film. *Journal of Thermal Engineering*, 5(5), 405-413, 2019. DOI: 10.18186/thermal.623211
- [17] Ana-Maria Bianchi. *Transferts thermiques*, 1ère edition, Press polytechniques et universitaires romandes, 2004.
- [18] Ana-Maria Bianchi, *Transferts thermiques*, 1ère ed, Press polytechniques et universitaires romandes.
- [19] Clement Kleinstreuer. *Modern Fluid Dynamics*, Springer Verlag, USA, 2009.
- [20] S. A. Gandjalikhan Nassab, A. Bahrami, R. Moosavi. Entropy generation in convection over an inclined backward-facing step with bleeding, *International Journal of Science and Technology Education Research*, Vol 2(5), pp 88-97, 2011. DOI: 10.1016/j.enconman.2007.10.031
- [21] T. Kawamura, H. Takami, K. Kuwahara. New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations, *Numerical Method in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics*, vol, 218, pp. 291-295, 1985. DOI: 10.1007/3-540-13917-6_152
- [22] Dale A. Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Pletcher. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, United states, 1984.
- [23] John Wiley & Sons. *Applied Numerical methods*, Copyright, by John Wiley & Sons, 1962.

- [24] Menni, Y., Ghazvini, M., Ameer, H., Ahmadi, M. H., Sharifpur, M., & Sadeghzadeh, M. Numerical calculations of the thermal-aerodynamic characteristics in a solar duct with multiple V-baffles. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 14(1), 1173-1197, 2000. [Doi.org/10.1080/19942060.2020.18155886](https://doi.org/10.1080/19942060.2020.18155886)
- [25] Ameer, H., Sahel, D., & Menni, Y. Enhancement of the cooling of shear-thinning fluids in channel heat exchangers by using the V-baffling technique. *Thermal Science and Engineering Progress*, 100534, 2020. doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100534
- [26] Ameer, H., & Menni, Y. Laminar cooling of shear thinning fluids in horizontal and baffled tubes: Effect of perforation in baffles. *Thermal Science and Engineering Progress*, 14, 100430, 2019. doi.org/10.1016/j.tsep.2019.100430
- [27] Ameer, H., Sahel, D., & Menni, Y. Numerical investigation of the performance of perforated baffles in a plate-fin heat exchanger. *Thermal Science*, (00), 90-90, 2020. DOI: 10.2298/TSCI190316090A
- [28] Menni, Y., Ameer, H., Chamkha, A. J., Inc, M., & Almohsen, B. Heat and mass transfer of oils in baffled and finned ducts. *Thermal Science*, 24(Suppl. 1), 267-276, 2020. DOI: 10.2298/TSCI20267M
- [29] Laidoudi, H., & Ameer, H. Investigation of the mixed convection of power-law fluids between two horizontal concentric cylinders: Effect of various operating conditions. *Thermal Science and Engineering Progress*, 20, 100731, 2020. doi.org/10.1016/j.tsep.2020.100731
- [30] Aydin, O., & Yang, W. J. Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. Vo10, 5, pp.518-529, 2000. doi.org/10.1108/09615530010338196

Effect of Richardson Number on Unsteady Mixed Convection in a Square Cavity Partially Heated From Below

Sacia Kachi^{1,*}, Fatima-zohra Bensouici¹, Nawel Ferroudj¹ and Saadoun Boudebous²

Abstract: The objective of the present study is to analyze the laminar mixed convection in a square cavity with moving cooled vertical sidewalls. A constant flux heat source with relative length l is placed in the center of the lower wall while all the other horizontal sides of the cavity are considered adiabatic. The numerical method is based on a finite difference technique where the spatial partial derivatives appearing in the governing equations are discretized using a high order scheme, and time advance is dealt with by a fourth order Runge Kutta method. The Richardson number (Ri), which represents the relative importance of the natural and forced convection, is chosen as the bifurcation parameter. The effect of this non-dimensional number on the behavior of the fluid flow and the heat transfer is analyzed. Although the geometry and boundary conditions concerning the velocity and the temperature are symmetrical with respect to the vertical axis passing through the center of the cavity, the results show the existence of symmetric and asymmetric flow structures, varying according to the considered value of the Richardson number.

Keywords: Richardson number, mixed convection, square cavity, finite difference method, bifurcation.

Nomenclature

g	gravitational acceleration, $m.s^{-2}$
Gr	Grashof number ($=g\beta q''L^4/kv^2$)
k	thermal conductivity, $W.m^{-1}.K^{-1}$
l	length of the heat source, m
L	length of the square cavity, m
n	normal direction
$Nu(x)$	dimensionless local Nusselt number
Nu_{av}	dimensionless average Nusselt number
Pr	Prandtl number, ($=\nu/\alpha$)
q''	Thermal flux density, $W.m^{-2}$

¹ Faculty of Process Engineering, University of Salah Bounider Constantine 3, Algeria.

² Faculty of Sciences and Applied Sciences, University of Larbi BenM'hidi, Oum el Bouaghi, Algeria.

* Corresponding Author: Sacia Kachi. Email: kachi.sacia@gmail.com.

Re	Reynolds number, ($=V_0L/\nu$)
Ri	Richardson number ($=Gr/Re^2$)
t	time, s
T	absolute temperature, K
T_c	sidewall temperature, K
U	horizontal dimensionless velocity component
V_0	sidewall velocity, $m.s^{-1}$
V	vertical dimensionless velocity component
x, y	dimensional Cartesian coordinates, m
X, Y	dimensionless Cartesian coordinates ($X=x/L$, $Y=y/L$)

Greek symbols

α	thermal diffusivity, $m^2.s^{-1}$
β	thermal expansion coefficient, K^{-1}
ε	dimensionless length of the heat source
Θ	dimensionless temperature
ν	kinematic viscosity, $m^2.s^{-1}$
τ	dimensionless time
ψ	stream function, $m^2.s^{-1}$
Ψ	dimensionless stream function
ω	vorticity, s^{-1}
Ω	dimensionless vorticity

1 Introduction

Heat transfer by natural and mixed convection in confined spaces has attracted attention in recent years because of its importance, not only in the field of scientific academic research but also in industrial processes, as for example in cooling of electronic devices, heat exchangers, chemical reactors design, solar collectors, thermal storage system and many other applications. Numerous studies of natural and mixed convection within enclosures have been reported extensively in the literature that we can all mention here. Therefore, we focus on the convective flows in cavities partially or fully heated from below, with the particularity that the boundary conditions are strictly symmetric about the vertical axis through the center of the cavity. Most of these studies have revealed that dynamic and thermal behavior of the convective flows in such configurations are strongly dependent on both the enclosure geometry, the boundary conditions and the variation of several parameters including Reynolds, Prandtl and Rayleigh (or Grashof) numbers. It is well known that this high dependence can exhibit, in some cases, a large diversity of

complex dynamical and thermal behavior such as instability, symmetry breaking, bifurcation and chaos. A detailed review of the existing literature, in connection with the topic of this present study, can be subdivided into two categories, natural convection and forced/mixed convection.

In the first category the studies mentioned in the literature have concentrated, for the most part, on cavities heated partially or fully from below and cooled from above. The heated part is maintained either at a constant temperature or at a constant heat flux and all remaining boundaries are specified as adiabatic walls. Among these investigations, Robillard et al. [Robillard, Wang and Vasseur (1988); Hasnaoui, Bilgen and Vasseur (1992)] demonstrated the existence of a large number of steady-state solutions depending on the aspect ratio, Rayleigh number, and dimensionless length of the heated segment. [Corcione (2003)] investigated the effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls and noticed that the number of cells of the flow field increases as the width-to-height aspect ratio of the enclosure increases. D’Orazio et al. [D’Orazio, Cianfrini and Corcione (2004)] studied the effect of the aspect ratio of the cavity and the Rayleigh number on the behavior of the fluid flow. They show that as the Rayleigh number increases, the flow model evolves successively from a stable cell to two stable cells, then to one to three periodic cells and finally to three periodic cells. This evolution leads to abrupt or smooth changes in the Nusselt number. Venturi et al. [Venturi, Wan and Karniadakis (2010)] used different stochastic modeling approaches to study the bifurcation and stability process for specific values of the Rayleigh and Prandtl number. They conclude that this method captures accurately the onset of convective instability as well as multiple convection patterns corresponding to random initial flow states. Ngo et al. [Ngo and Byon (2015)] also consider the same cavity configuration as previously. Their work indicates that loss of symmetry can occur for all values of the heated part when the Rayleigh number is greater than 10^4 . More recently, Bouabdallah et al. [Bouabdallah, Ghernaout, Teggat et al. (2016)] reported the numerical results of the natural Rayleigh-Benard convection in the rectangular cavities. Five bifurcation modes were detected, all dependent on the value of the Rayleigh number and the aspect ratio of the cavity. It should be noted that some authors have examined other geometric forms of cavities, such as isosceles triangular enclosures [Ridouane and Campo (2006); Varol, Oztop and Koca (2008)], prismatic enclosures [Aich, Hajri and Omri (2011); Saha and Gu (2015)], and trapezoidal enclosures [Tracy and Crunkleton (2012); Esfe, Arani, Yan et al. (2016)].

However, it is also possible to obtain, by studying natural convection in the similar geometric configurations, perfectly stable flows, without loss of symmetry and without bifurcations. Aydin et al. [Aydin and Yang (2000a), Saha, Saha, Islam et al. (2007); Sharif and Mohammad (2005)] studied numerically the natural convection in a square enclosure with centrally localized heating from below and symmetrical cooling from the sides. The bottom surface, except for the heated section, and the upper wall are considered adiabatic. The dimensionless length of the heat source investigated are $1/5$, $2/5$, $3/5$ and $4/5$ and the Rayleigh number is varied from 10^1 to 10^6 . Calcagni et al. [Calcagni, Marsili and Paroncini (2005); Corvalo and Paroncini (2008)] investigated the same problem experimentally by using real-time and double-exposure holographic interferometry and numerically by using the commercial finite volumes code Fluent. More recently, Raisi [Raisi (2016)] examined the natural convection in a square cavity

filled with a non-Newtonian power-law fluid and used the numerical finite difference method based on the control volume formulation and SIMPLE algorithm. Certain studies have also been devoted to natural convection in other geometric configurations: Tzeng et al. [Tzeng, Liou and Jou (2005)] considered a triangular enclosure, Basak et al. [Basak, Roy, Singh et al. (2009)] treated a trapezoid enclosure, while Ahmanache et al. [Ahmanache and Zeraibi (2013); Alam, Rahman, Parvin et al. (2016)] examined a prismatic enclosure.

In this first category, relating to natural convection all studies cited above show that if the sidewalls of the cavity are adiabatic, instabilities, loss of symmetry and bifurcation phenomena have been found to depend mainly on Rayleigh numbers, aspect ratio and vertex angles of the enclosure. In contrast, when the sidewalls are isotherm the fluid flow does not exhibit any instability, loss of symmetry or bifurcations.

In the second category (mixed convection) when a difference in temperature is imposed the effect of the flow due to the buoyancy and displacement of the wall makes the analysis even more complex. The interaction of the sheared flow due to the movement of the wall and the flow of the natural convection due to the buoyancy effect is up to now a fundamental field of research and requires a complete analysis to understand the physics of the resulting flow and heat transfer. Aydin et al. [Aydin and Yang (2000b); Guo and Sharif (2004)] considered the numerical studies of the laminar mixed convection in a 2D cavity with an adiabatic upper wall and cold vertical walls moving downward at a constant velocity. A heat source is placed in the center of the lower wall. Guo et al. [Guo and Sharif (2004)] imposed a constant heat flux whereas [Aydin and Yang (2000b)] considered a fixed temperature wall and the remaining part of this wall is supposed to be adiabatic. The effects of the length of the heat source and the Richardson number were studied. In these two cases the effects of the forced and natural convection being co-operating, neither instabilities nor rupture of symmetry or bifurcation were observed.

The present study differs from Aydin et al. [Aydin and Yang (2000b); Guo and Sharif (2004)] in that here the direction of the displacement of the sidewalls are reversed thus creating a competition between the forced convection and the natural Rayleigh-Bénard convection. Therefore, it is interesting to establish the flow pattern and to predict the various critical values of the Richardson number for the occurrence of loss of symmetry and bifurcations, if these are indeed present in the fluid flow.

2 Model description

The physical model considered is depicted in Fig. 1. A square cavity whose sidewalls are maintained at fixed cold temperature T_c and move upwards with a fixed velocity V_0 . A heat source maintained at constant heat flux q'' and has a length l equal to $4/5$ of L is placed in the center of the lower wall. All the other parts of the cavity are adiabatic. The flow in the cavity is induced by the force of shearing resulting from the movement of the side walls combined with the buoyancy force resulting from the heat source.

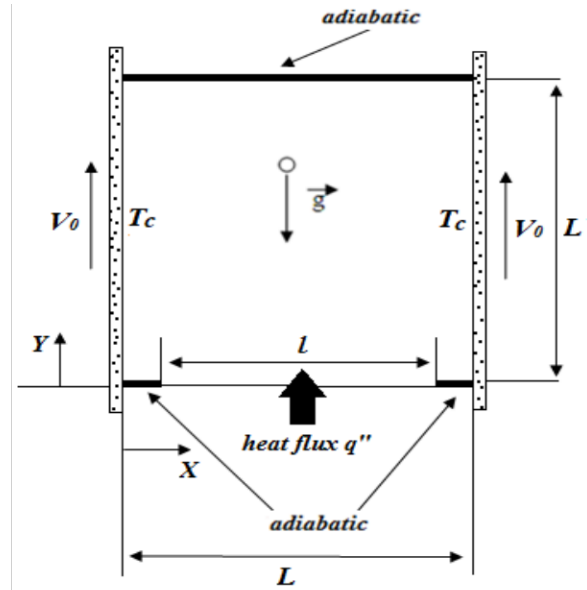


Figure 1: Schematic diagram of the physical model

3 Equations and mathematical expressions

The mixed convection phenomena to be investigated here are described by the complete Navier-Stokes and energy equations for two-dimensional laminar incompressible flow. The viscous dissipation term in the energy equation is neglected and the classical Boussinesq approximation is invoked for the buoyancy induced body force term in the momentum equation. The 2-D governing equations are transformed into stream function-vorticity (Ψ - Ω) formulation and can be written in non-dimensional forms:

3.1 Energy transport equation

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Theta}{\partial X} + V \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = \frac{1}{RePr} \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right] \quad (1)$$

3.2 Vorticity transport equation

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + V \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2} \right] + Ri \frac{\partial \Theta}{\partial X} \quad (2)$$

3.3 Stream function equation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (3)$$

3.4 Components of the velocity

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (4)$$

The dimensionless vorticity is defined by:

$$\Omega = \frac{\partial V}{\partial X} - \frac{\partial U}{\partial Y}$$

where Re , Pr and Ri denote, respectively, Reynolds, Prandtl and Richardson numbers. They are defined as:

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad Ri = \frac{Gr}{Re^2}$$

The Grashof number Gr is expressed by:

$$Gr = \frac{g \beta q'' L^4}{k \nu^2}$$

Here ν is the kinematic viscosity, α is the thermal diffusivity, β is the thermal expansion coefficient of the fluid and g represents the gravity acceleration and k is the thermal conductivity. The ratio Gr/Re^2 (Richardson number Ri) is a measure of the relative strength of the natural convection and forced convection and plays an important part to indicate the modes of convection. Dimensionless variables are given by the following expressions:

$$X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{L} \quad U = \frac{u}{V_0} \quad V = \frac{v}{V_0} \quad \tau = t \frac{V_0}{L} \quad \Theta = \frac{k(T-T_c)}{q'' L} \quad \Omega = \frac{L}{V_0} \omega \quad \Psi = \frac{\psi}{LV_0}$$

The numerical resolution of the previous equations is based on the following initial and boundary conditions:

➤ The initial conditions ($\tau=0$) are:

$$0 < Y < 1 \quad \& \quad 0 < X < 1: \quad \Theta = 0 \quad \Psi = 0 \quad \Omega = 0$$

➤ The boundary conditions ($\tau > 0$) are:

$$\left. \begin{array}{l} X=0 \\ X=1 \end{array} \right\} \& \quad 0 \leq Y \leq 1 \Rightarrow U = \Theta = \Psi = 0 \quad V = 1. \quad (5a)$$

$$Y=0 \quad \& \quad 0 \leq X \leq (1-\varepsilon)/2 \quad \& \quad (1+\varepsilon)/2 \leq X \leq 1 \Rightarrow U = V = \Psi = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \quad (5b)$$

$$Y=0 \quad \& \quad (1-\varepsilon)/2 \leq X \leq (1+\varepsilon)/2 \Rightarrow U = V = \Psi = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = -1. \quad (5c)$$

$$Y=1 \quad \& \quad 0 \leq X \leq 1 \Rightarrow U = V = \Psi = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial Y} = 0 \quad (5d)$$

where $\varepsilon = l/L$ is the dimensionless length of the heat source.

Wall vorticity is evaluated by the development of first order Taylor series, which is a function of the stream function and the walls velocity. The expressions are:

$$\Omega_{i,w}^{bottom} = \frac{2}{\Delta Y_0^2} (\Psi_{i,w} - \Psi_{i,w+1})$$

$$\Omega_{i,w}^{top} = \frac{2}{\Delta Y_0^2} (\Psi_{i,w} - \Psi_{i,w-1})$$

$$\Omega_{w,j}^{left} = \frac{2}{\Delta X_0^2} (\Psi_{w,j} - \Psi_{w+1,j} - \Delta X_0)$$

$$\Omega_{w,j}^{right} = \frac{2}{\Delta X_0^2} (\Psi_{w,j} - \Psi_{w-1,j} + \Delta X_0)$$

where index w denotes the node located just on the wall, i and j are node locations in the X and Y directions, respectively. The first grid spacing in the X and Y directions are denoted by ΔX_0 and ΔY_0 , respectively.

4 Numerical method

4.1 Discretization

The system of Eqs. (1)-(4), together with the boundary conditions Eqs. 5(a)-5(d) have been discretized and solved using the finite difference method. For solving nonlinear systems of differential partial equations, the fourth-order Runge-Kutta method is known to be quite effective compared to other methods. The convective terms in Eqs. (1)-(2) are discretized using the accurate third order upwind scheme of Kawamura et al. [Kawamura, Takami and Kuwahara (1985)] taking into account the sign of the velocity. A fourth-order centered scheme was adopted for the discretization of the diffusive terms, the source term in Eq. (2), and the explicit evaluation of the U and V components of the velocity vector in Eq. (4). The mirror-point technique due to Leonard [Leonard (1979)] was used to maintain the fourth-order centered scheme of the first and second spatial partial derivatives in the grid points adjacent to the walls. An iterative procedure based on successive Non Linear Over Relaxation method (NLOR) was used to solve the discretized stream function Eq. (3) in each time step of Runge-Kutta procedure. The iterative procedure is stopped when the maximum relative change in stream function between two consecutive iterations is less than 10^{-6} .

The dimensionless local and average Nusselt numbers of the hot part of the bottom wall are defined, respectively by Guo et al. [Guo and Sharif (2004)]:

$$Nu(X) = \frac{1}{\Theta_w(X)} ; Nu_{av} = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon Nu(X) dX$$

The average Nusselt number (Nu_{av}) is integrated using Simpson's rule.

4.2 Grid independence test

Grid independence tests were carried out. Computed results of dimensionless average Nusselt number, maximal stream function and temperature with $Ri=10$, $Re=100$ and $Pr=0.71$ obtained using different grid sizes are given in Tab. 1. It is observed that the values of these different variables do not show significant differences between them. The maximum relative error of these different variables for the grid sizes of 81×81 , 101×101

and 161×161 compared to the grid size of 201×201 is about 2%, except that of the stream function which is in the order of 7%. In addition to that, the evolution of the average Nusselt number, for the same grid sizes, is shown in Fig. 2. One can see that the curve corresponding to the 101×101 mesh is close to those corresponding to 161×161 and 201×201 . As a compromise between accuracy and CPU time, it was decided to use a non-uniform grid with 101×101 grid points for subsequent calculations.

Table 1: Effect of the grid arrangements on numerical solution

Grid sizes	81×81	101×101	161×161	201×201
Nu_{av}	5.65734	5.66724	5.68334	5.68913
ψ_{max}	7.8832×10^{-2}	8.1470×10^{-2}	8.5896×10^{-2}	8.7527×10^{-2}
θ_{max}	0.1758	0.1772	0.1790	0.1797

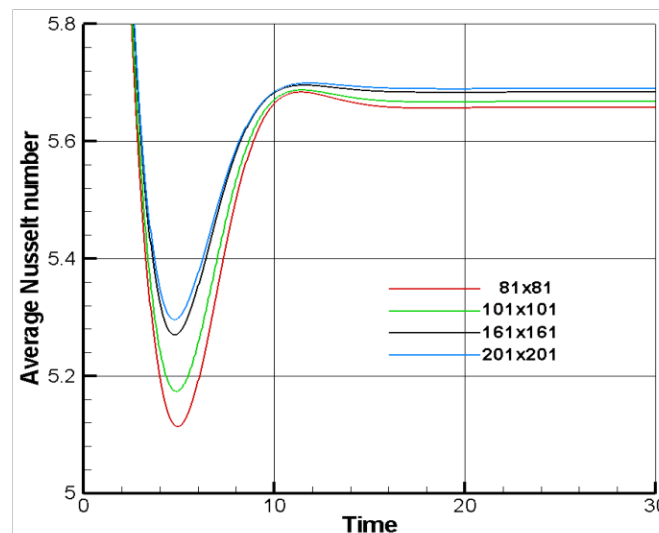


Figure 2: Evolution of the average Nusselt number for the different grid sizes

4.3 Code validation

The computer code developed with Fortran language has been validated by considering the geometric configuration investigated by Aydin et al. [Aydin and Yang (2000)]. We report in Fig. 3 and Fig. 4, a comparison of the average Nusselt number Nu_{av} of the heat source and the dimensionless vertical velocity profiles, at the horizontal mid-plane respectively. As can be noticed from these figures the obtained results show a good agreement between both models.

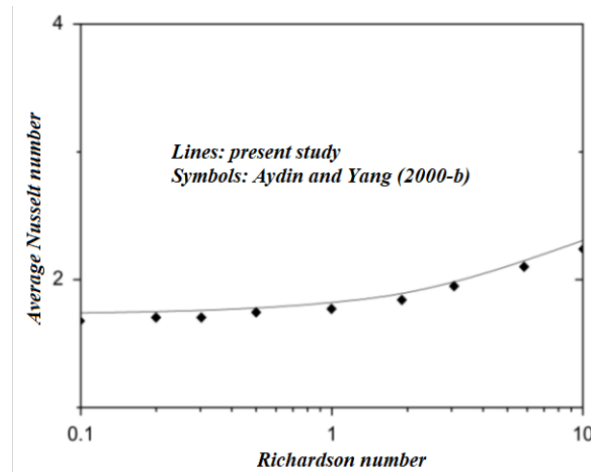


Figure 3: Comparison of the average Nusselt number Nu_{av} with results of Aydin et al. [Aydin and Yang (2000b)]

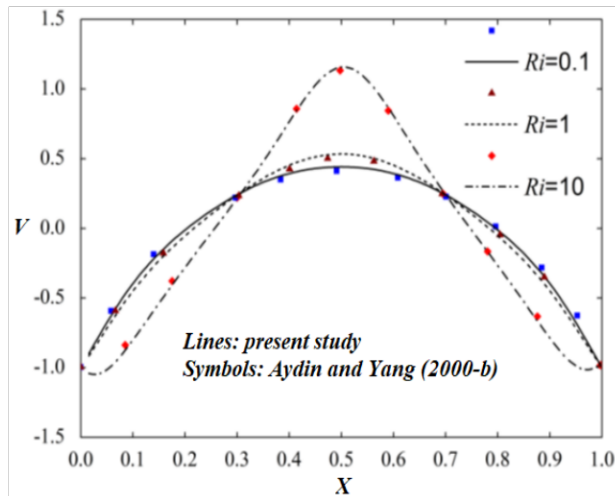


Figure 4: Comparison of the vertical component velocity V at $Y=0.5$ with results of Aydin et al. [Aydin and Yang (2000b)]

5 Results and discussion

In this study, the fluid flow and heat transfer phenomena are investigated for a wide range of Richardson numbers to detect various behaviors of the fluid flow in the cavity. Air was the working fluid with a constant Prandtl number of 0.71. The Reynolds number was fixed at 10^2 and the value of the Grashof number is between 5×10^3 and 10^6 depending on the value of the Richardson number.

5.1 Effect of Richardson number

The results of the effect of increasing the Richardson number on the average Nusselt number for the different simulations are shown in Fig. 4. It can be observed that the average Nusselt number along the bottom heated wall of the cavity increases continuously with increasing Ri . However, three different behaviors of the fluid flow may be observed from this figure. To show these two bifurcations, stream functions (above the curve) and isotherms contours (below the curve) are plotted on the same figure for Richardson numbers equal to 10, 35 and 45. A first bifurcation is located at point B while a second is located at point C. Point B marks the transition from a flow characterized by two perfectly symmetrical cells to a flow characterized by two asymmetrical cells, and point C indicates the passage of the previous flow to a flow characterized by two pairs of perfectly identical cells.

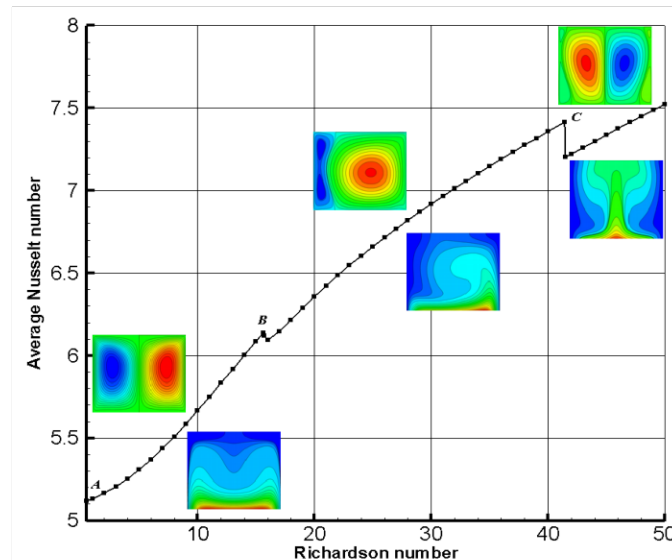


Figure 5: Variation of the average Nusselt number Nu_{av} with Richardson number Ri

5.2 First bifurcation

The first bifurcation occurs at point B (Fig. 5), when the Richardson number Ri increases from 15.6 to 15.7 and the Nu_{av} decreases abruptly from 6.14 to 6.12. Visual examination of the streamlines indicated in Fig. 6 shows a slight difference of the flow behavior before and after the first bifurcation. However, a slightly more pronounced asymmetry was observed in the isotherms shown in Fig. 7. In each case, we note that thermal stratification exists near the heated part. The ascending movement of the sidewalls leads upwardly adjacent fluid layers to the walls by viscous forces; we also note that the cold temperature prevails in the whole upper part of the cavity. In fact, the low heat flow recovered by the fluid from the heat source is directly discharged through the lower portion of the vertical walls.

Therefore, the temperature distribution is not affected by the increase of Ri ; this justifies the dominance of shear forces with respect to buoyancy forces. Moreover, it is also visible in Fig. 6(b) and Fig. 10(a) that the right cell becomes progressively larger than the left, probably because the thermal boundary condition effect begins to generate a loss of symmetry of the fluid flow in the cavity. It is interesting to note that this asymmetry of the flow regime becomes more noticeable with the increase in Ri until it reaches the limit value of 41.4.

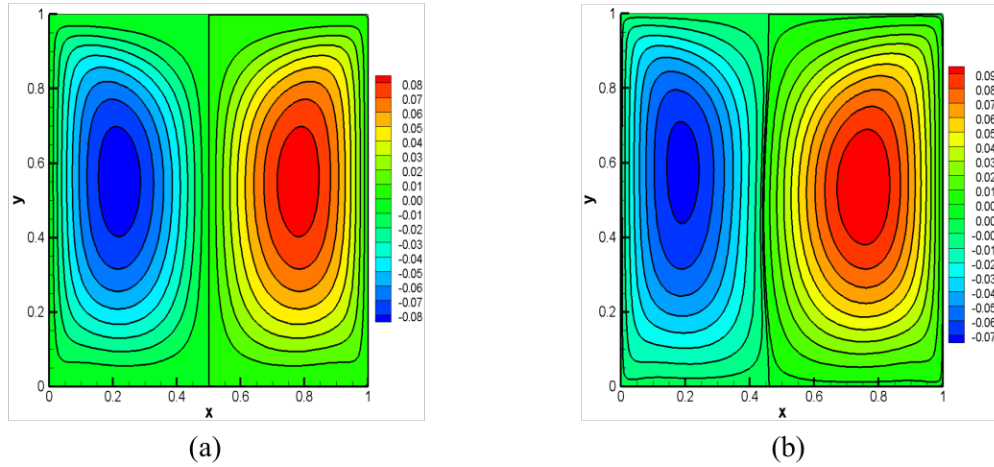


Figure 6: Streamlines for $Ri=15.6$ (a) and $Ri=15.7$ (b)

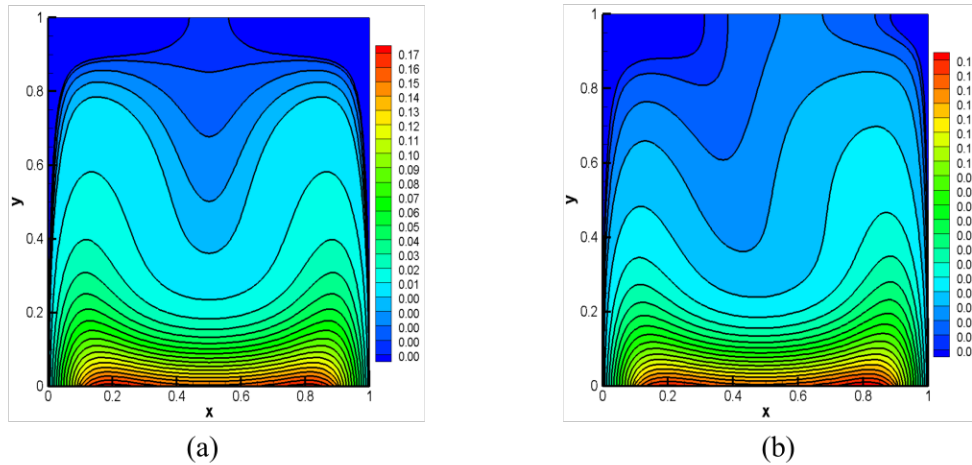


Figure 7: Isotherms for $Ri=15.6$ (a) and $Ri=15.7$ (b)

The change in the flow behavior in this first bifurcation is depicted more clearly in Fig. 8, which shows the evolution of the Nu_{av} along the hot surface (Fig. 8(a)) and the temperature at the center of the cavity (Fig. 8(b)). We can see that the value of the Nu_{av} remains constant and equal to 6.14 at $Ri=15.6$, while for $Ri=15.7$ the value of the same number begins to decrease gradually at $\tau=12.5 \times 10^3$ and becomes stable and equal to 6.12

at $\tau=22.5 \times 10^3$. At the same time, the temperature computed at the center of the cavity increases gradually from 3.2×10^{-3} to 4.2×10^{-3} . It is obvious that if the standard test of convergence is applied to stop the calculations, the solution would have converged at $\tau=15$, but the results obtained in the Fig. 7, for $Ri=15.7$, indicates that the change in fluid flow begins to occur at $\tau=12.5 \times 10^3$ to be stabilized at $\tau=22.5 \times 10^3$. It took a calculation time of between 2 and 3 days for each numerical simulation, while the Richardson number Ri is between 15 and 16, on a “HP Z820 Workstation” to detect this first bifurcation. In this case the corresponding number of iterations can reach about 225 million with a time step $\Delta\tau$ equal to 10^{-4} .

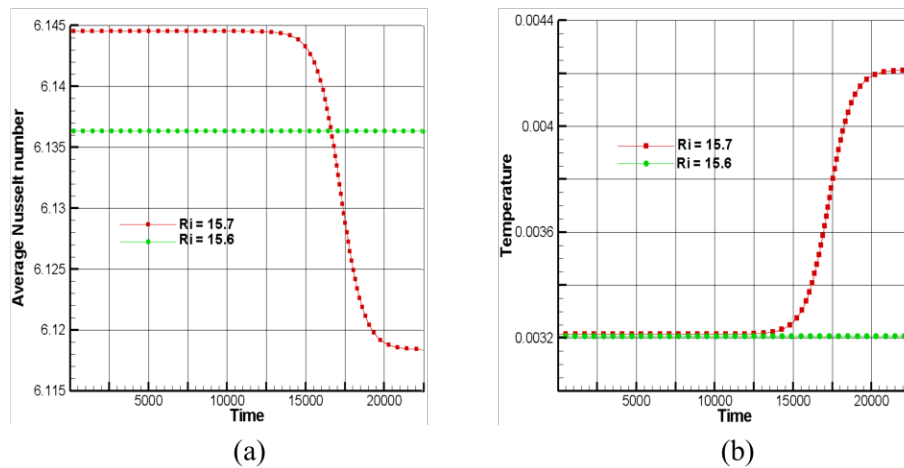


Figure 8: Evolution of the Nu_{av} (a) and the temperature at the center of the cavity (b) for $Ri=15.6$ and 15.7

5.3 Second bifurcation

The second bifurcation occurs at point C (Fig. 5), when the Richardson number Ri increases from 41.4 to 41.5 the number of Nusselt decreases suddenly from 7.42 to 7.20. Fig. 9 and Fig. 10 show the dynamic and thermal fields for Richardson numbers equal to 41.4 and 41.5 respectively. It is interesting to observe that before and after this second bifurcation, the behavior of the flow in the cavity becomes radically different. Indeed, it goes from a state characterized by two unbalanced cells to a state characterized by two pairs of cells perfectly symmetrical. The pair of contra rotating cells in the center of the cavity is mainly managed by the buoyancy forces and viscous forces maintain the pair of clamped cells close to vertical moving walls (Fig. 9(b)). In this flow regime, the heat recovered from the heat source is conveyed by convection, in the form of a thermal plume, to the top of the cavity by the pair of cells in the center. This is what explains the relatively high temperatures in the central portion of the cavity. The heat is dissipated fairly through the two sidewalls (Fig. 10(b)).

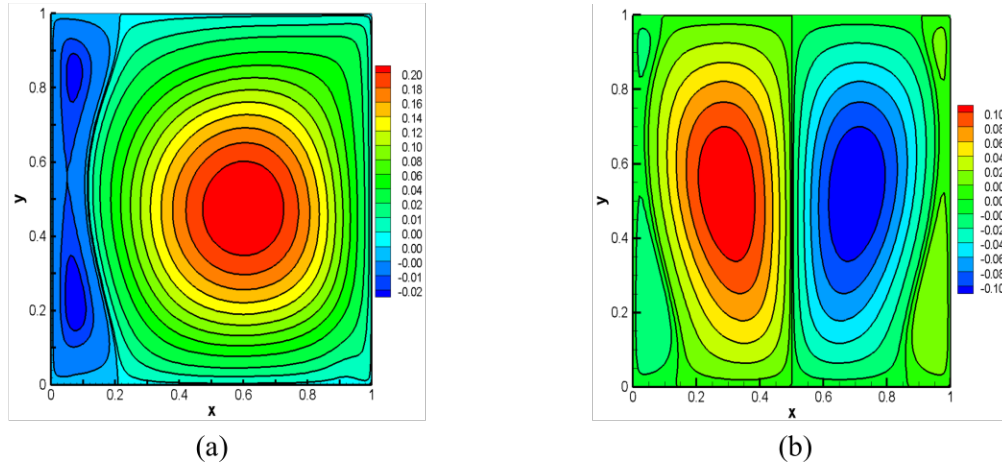


Figure 9: Streamlines for $Ri=41.4$ (a) and $Ri=41.5$ (b)

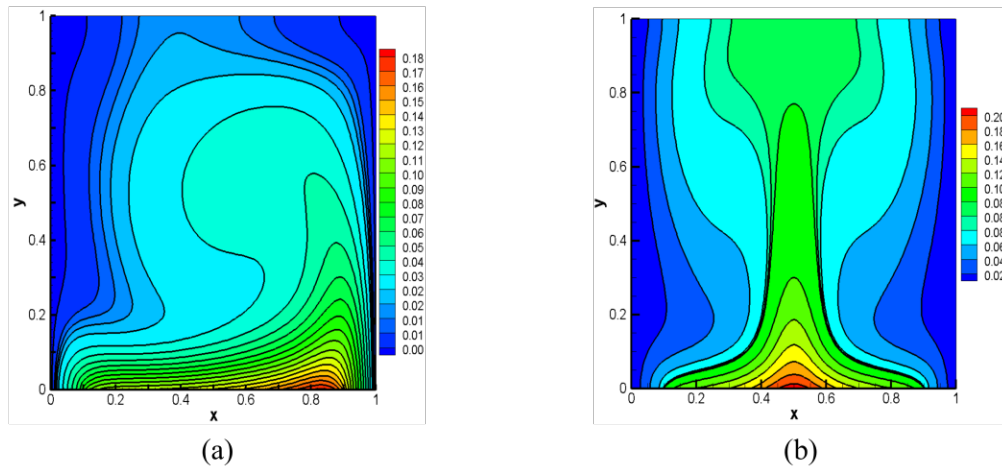


Figure 10: Isotherms for $Ri=41.4$ (a) and $Ri=41.5$ (b)

The evolution of the average Nusselt number and the component U of the velocity at the center of the cavity are shown in Fig. 11 and Fig. 12 respectively. The value of the average Nusselt number (Fig. 11) fluctuates during the first instants ($\tau < 20$) and then decreases progressively to be stabilized at a fixed value equal to 7.20 for $Ri=41.5$, while for $Ri=41.4$, it presents an oscillation between $\tau=30$ and $\tau=70$ before being stabilized at a fixed value equal to 7.41. Unlike the first bifurcation, we found it useful to highlight the asymmetry of the fluid flow, not considering the temperature computed at the center of the cavity, but by plotting in Fig. 12 the quantitative evolution of the horizontal component U of the velocity computed at the same point ($X=0.5, Y=0.5$). A closer examination of this figure reveals that for $Ri=41.5$ the U component remains constant equal to 0 indicating no fluid passing through the vertical center plane, while for $Ri=41.4$ it fluctuates, then increases, afterwards gradually decreases to be stabilized at a negative

value equal to -0.7 . As expected from Fig. 9(a) more fluid is transferred from the right side of the cavity to its left side.

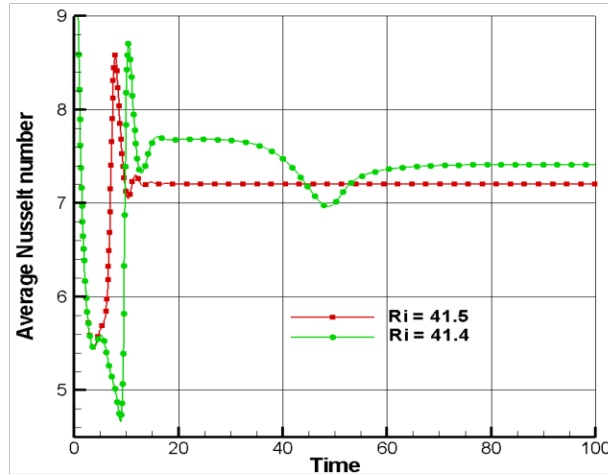


Figure 11: Evolution of the average Nusselt number for $Ri=41.4$ and 41.5

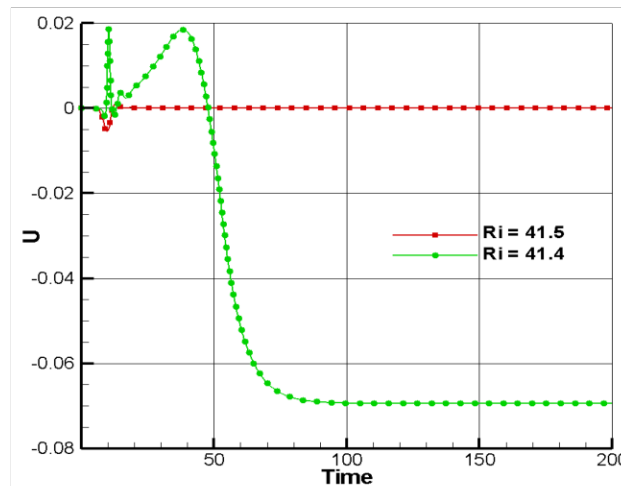


Figure 12: Evolution of the component U of the velocity at the center of the cavity for $Ri=41.4$ and 41.5

6 Conclusion

This study investigates numerical unsteady laminar mixed convection in a square cavity with constant heat flux applied on a part of the bottom wall. The sidewalls of the cavity are subjected to a constant cold temperature and a fixed upward velocity. The other parts of the cavity are considered adiabatic. The finite difference method was used to discretize the equations governing the studied phenomenon. The numerical results are obtained for different values of the Richardson number. Reynolds and Prandtl numbers are kept constant at values equal to 100 and 0.71 respectively.

In the confined flow, a competition between the shearing forces resulting from the movement of the sidewalls combined with the buoyancy forces resulting from the heat source may be at the origin of the bifurcation phenomena. The results of different numerical simulations carried out clearly indicate the existence of two bifurcations occurring in the given geometry. The first bifurcation is located at a Richardson number between 15.6 and 15.7 and the second bifurcation is between the values 41.4 and 41.5 of the same number. In the first bifurcation, the resulting flow consists of the transition from two symmetric counter-rotating vortices to two asymmetric counter-rotating vortices. In the second bifurcation, the resulting flow consists of the transition from two asymmetric counter-rotating vortices to four symmetrical counter-rotating vortices.

A particular feature in this study is related to the total absence of an a priori knowledge of the existence of bifurcations since the boundary conditions adopted here are perfectly symmetrical. These bifurcations would not have been revealed, if we had considered half the domain, with the symmetry condition on the vertical axis passing through the center of the cavity and if we had used the classic test of convergence of the solution to stop the calculations. This would have led to erroneous conclusions about the behavior of the fluid flow and the inability to find the non-symmetric solutions.

Acknowledgement: The authors like to express their thankfulness to the Laboratory of micro-systems and instrumentation, University of Mentouri brothers Constantine, for providing computer facility during this work.

References

Ahmanache, A.; Zeraibi, N. (2013): Numerical study of natural melt convection in cylindrical cavity with hot walls and bottom sink. *Thermal Science*, vol. 17, pp. 853-864.

Aich, W.; Hajri, I.; Omri, A. (2011): Numerical analysis of natural convection in a prismatic enclosure, *Thermal Science*, vol. 15, pp. 437-446.

Alam, M. S.; Rahman M. M.; Parvin, S.; Vajravelu K. (2016): Finite element simulation for heat line visualization of natural convective flow and heat transfer inside a prismatic enclosure. *International Journal of Heat and Technology*, vol. 34, pp. 391-400.

Aydin, O.; Yang, W. J. (2000a): Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, vol. 10, pp. 518-529.

Aydin, O.; Yang, W. J. (2000b): Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, vol. 36, pp. 695-710.

Basak, T.; Roy, S.; Singh, A.; Balakrishnan A. R. (2009): Natural convection flows in porous trapezoidal enclosures with various inclination angles. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 52, pp. 4612-4623.

Bouabdallah, S.; Ghernaout, B.; Teggat, M.; Benchatti, A.; Benarab, F. Z. (2016): Onset of natural convection and transition laminar-oscillatory convection flow in Rayleigh-Bénard configuration. *International Journal of Heat and Technology*, vol. 34, pp. 151-157.

Calcagni, B.; Marsili, F.; Paroncini, M. (2005): Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below. *Applied Thermal Engineering*, vol. 25, pp. 2522-2531.

Corcione, M. (2003): Effects of the thermal boundary conditions at the sidewalls upon natural convection in rectangular enclosures heated from below and cooled from above. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 42, pp. 199-208.

Corvalo, F.; Paroncini, M. (2007): Experimental analysis of natural convection in square cavities heated from below with 2D-PIV and holographic interferometers techniques. *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 31, pp. 721-739.

Corvalo, F.; Paroncini, M. (2008): A numerical and experimental analysis on the natural convective heat transfer of a small heating strip located on the floor of a square cavity. *Applied Thermal Engineering*, vol. 28, pp. 25-35.

D’Orazio, M. C.; Cianfrini, C.; Corcione, M. (2004): Rayleigh-Bénard convection in tall rectangular enclosures. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 43, pp. 135-144.

Esfe, M. H.; Arani, A. A. A.; Yan, W. M.; Ehteram, H.; Aghaie, A. et al. (2016): Natural convection in a trapezoidal enclosure filled with carbon nano tube-EG-water Nano fluid. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 92, pp. 76-82.

Guo, G.; Sharif, M. A. R. (2004): Mixed convection in rectangular cavities at various aspect ratios with moving isothermal sidewalls and constant flux heat source on the bottom wall. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 43, pp. 465-475.

Hasnaoui, M.; Bilgen, E.; Vasseur, P. (1992): Natural convection heat transfer in rectangular cavities partially heated from below. *Journal of Thermo Physics and Heat Transfer*, vol. 6, pp. 255-264.

Kawamura, T.; Takami, H.; Kuwahara, K. (1985): New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations. *Numerical Methods in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics*, vol. 218, pp. 291-295.

Leonard, B. P. (1979): A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computational Methods Applied Mechanical Engineering*, vol. 19, pp. 58-98.

Ngo, I. L.; Byon, C. (2015): Effects of heater location and heater size on the natural convection heat transfer in a square cavity using finite element method. *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 29, pp. 2995-3003.

Raisi, A. (2016): Natural convection of non-newtonian fluids in a square cavity with a localized heat source. *Journal of Mechanical Engineering*, vol. 4, pp. 553-564.

Ridouane, E. H.; Campo, A. (2006): Formation of a pitchfork bifurcation in thermal convection flow inside an isosceles triangular cavity. *Physics of Fluids*, vol. 18, no. 7.

Robillard, L.; Wang, C. H.; Vasseur, P. (1988): Multiple steady states in a confined porous medium with localized heating from below. *Numerical Heat Transfer*, vol. 13, pp. 91-110.

Saha, G.; Saha, S.; Islam, M. Q.; Akhanda, M. A. R. (2007): Natural convection in enclosure with discrete isothermal heating from below. *Journal of Naval Architecture and Marine Engineering*, vol. 4, pp. 1-13.

Saha, S. C.; Gu, Y. T. (2015): Natural convection in a triangular enclosure heated from below and non-uniformly cooled from top. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 80, pp. 529-538.

Sharif, M. A. R.; Mohammad, T. R. (2005): Natural convection in cavities with constant flux heating at the bottom wall and isothermal cooling from the sidewalls. *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 44, no. 9, pp. 865-878.

Tracy, N. I.; Crunkleton, D. W. (2012): Oscillatory natural convection in trapezoidal enclosures. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 55, pp. 4498-4510.

Tzeng, S. C.; Liou J. H.; Jou, R. Y. (2005): Numerical simulation-aided parametric analysis of natural convection in a roof of triangular enclosures. *Heat Transfer Engineering*, vol. 26, pp. 69-79.

Varol, Y.; Oztop, H. F.; Koca, A. (2008): Entropy production due to free convection in partially heated isosceles triangular enclosures. *Applied Thermal Engineering*, vol. 28, pp. 1502-1513.

Venturi, D.; Wan, X.; Karniadakis, G. E. (2010): Stochastic bifurcation analysis of Rayleigh-Bénard convection. *Journal of Fluid Mechanical*, vol. 650, pp. 391-413.

**7th INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL
AND EXPERIMENTAL SCIENCE AND ENGINEERING
(ICCESEN-2020)**

21-25 October 2020, ANTALYA-TURKEY

An accurate method to compute the irreversibility distribution ratio of the entropy generation with application to natural or mixed convection flows

Nawal FERROUDJ^{1✉}, Saadoun BOUDEBOUS²

¹ *Bioengineering Laboratory , National Higher School of Biotechnology (ENSB), Constantine 3, Algeria*

² *Faculty of Sciences and Applied Sciences, University of Larbi BenM'hidi, Oum el Bouaghi, Algeria*

Abstract

The resolution of the governing equation for the entropy generation during fluid flows in natural or mixed convection regime requires the calculation of a coefficient called "irreversibility distribution ratio ϕ ". This coefficient depends, not only on the thermo-physical properties of the fluid but also on the Rayleigh and the Prandtl numbers in natural convection, to which is added the Reynolds number in mixed convection. Until now, it should be noted that the calculation of the value of the irreversibility distribution ratio ϕ is still not clearly defined. A simplified calculation, followed by concrete examples, is proposed to determine an exact numerical value for this coefficient.

Keywords: *Irreversibility distribution ratio, Entropy generation, Natural convection, Mixed convection.*

✉ *Corresponding Author Email: ferroudj.nawal@gmail.com / n.ferroudj@ensbiotech.edu.dz*

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE L'INFLUENCE DU NOMBRE DE PRANDTL SUR LA GÉNÉRATION D'ENTROPIE DANS UNE ENSEINTE CARRÉE CHAUFFÉE PAR LE BAS

FERROUDJ NAWAL^{#1}, KACHI SACIA^{*2}, BOUDEBOUS SAADOUN^{#3}

^{#1} *Laboratoire de Biotechnologie, École Nationale Supérieure de Biotechnologie (ENSB), Constantine, Algérie*
Ville universitaire Ali Mendjeli, BP E66 25100, Constantine, Algérie

¹n.ferroudj@ensbiotech.edu.dz

²kachi.sacia@gmail.com

²*Génie des procédés, Université de Constantine3, Algérie*

³s_boudebous@yahoo.fr

^{#3} *Université de Larbi Ben M'hidi O.E.B*
Algérie

Abstract— Dans ce travail nous nous intéressons à une étude numérique du phénomène de la génération d'entropie en convection mixte laminaire dans une cavité carrée. Les parois latérales de la cavité, soumises à une température froide, se déplacent vers le haut avec une vitesse constante. Une source de chaleur est placée au milieu de la paroi inférieure. Toutes les autres parois de la cavité sont considérées adiabatiques. Les équations générales de conservation, formulées par un modèle mathématique basé sur l'approche « fonction de courant-vorticité (ψ, ω) », sont discrétisées par la méthode des différences finies. Les résultats obtenus présentent l'influence du nombre de Prandtl pour différentes valeurs du nombre de Richardson sur les caractéristiques des champs de la génération d'entropie.

Keywords— Génération d'entropie, convection mixte, Différences Finies, Nombre de Prandtl, Cavité Carrée.

décrites dans plusieurs ouvrages de Bejan [3, 4]. Les concepts fondamentaux de l'énergie, de l'entropie et de leurs applications dans de nombreux domaines scientifiques et technologiques ont été bien détaillés par Dincer et Cengel [5]. De nombreux travaux sur la génération d'entropie dans différents processus ont déjà été rapportés par Oztop et Al-Salem [6] et plus récemment par Oztop et al. [7]. L'étude de la littérature montre qu'aucune attention particulière n'a été accordée à la convection mixte dans la configuration géométrique considérée dans ce travail. Cette contribution vise à étudier l'influence des nombres de Prandtl et de Richardson sur la distribution de la génération de l'entropie et du nombre de Bejan en régime de convection mixte dans la dite configuration géométrique.

I. INTRODUCTION

Les écoulements des fluides dans des espaces confinés avec transfert de chaleur se rencontrent dans de très nombreux domaines de la science et de la technologie tels que par exemple, le refroidissement des composants électroniques, le chauffage et climatisation, les processus biotechnologiques etc. La résistance thermique et le frottement sont des mécanismes qui génèrent une irréversibilité lors des écoulements de fluide présents dans tout processus de transfert de chaleur. Cependant, la première et la deuxième loi de la thermodynamique indiquent que ces irréversibilités entraînent une perte de travail utile (génération d'entropie) dans les processus de transfert de chaleur. L'un des principaux défis de l'ingénierie thermique est de minimiser la génération d'entropie d'un système pour collecter le maximum de travail utile et améliorer ainsi l'efficacité énergétique du système [1, 2]. Les études théoriques les plus importantes de la production d'entropie dans les processus de transfert de chaleur ont été

II. DESCRIPTION DU PROBLEME

La géométrie considérée dans cette étude est une cavité carrée illustrée sur la figure 1. Elle contient une source de la chaleur sur la paroi inférieure soumise à une température constante T_c , les parois verticales se déplacent vers le haut avec une vitesse fixée V_0 , et sont maintenues à une température froide constante T_f . Les autres parois sont supposées adiabatiques. Nous supposons que l'écoulement est laminaire et bidimensionnel, le fluide newtonien et incompressible et qu'il satisfait l'hypothèse de Boussinesq.

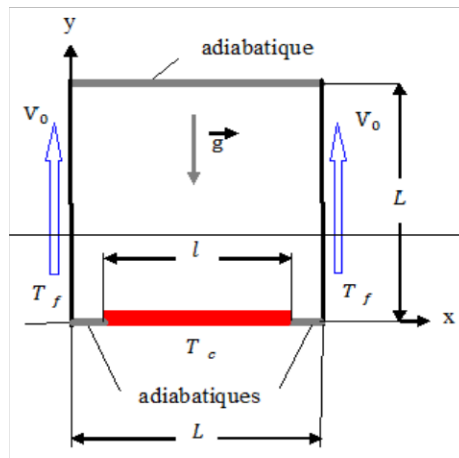


Figure 1. Configuration géométrique

Le modèle mathématique, basé sur la formulation fonction du courant-vorticité ($\psi-\omega$), régissant le phénomène de la convection mixte est donné par les équations adimensionnelles suivantes :

A. Equation d'énergie :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (1)$$

B. Equation de la vorticité :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (2)$$

C. Equation de la fonction de courant :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (3)$$

D. Composantes de vitesses :

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad , \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4)$$

Les paramètres figurant dans ces équations sont, respectivement, les nombres de Reynolds, de Prandtl et de Richardson et sont définis par les relations suivantes :

$$\text{Re} = \frac{V_0 L}{\nu} \quad , \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad , \quad \text{Ri} = \frac{Gr}{\text{Re}^2} \quad ,$$

$$Gr = \frac{g \beta (T_c - T_f) L^3}{\nu^2} \text{ est le nombre de Grashof.}$$

Les variables primitives et les variables sans dimensions sont reliés par les expressions suivantes :

$$X = \frac{x}{L} \quad , \quad Y = \frac{y}{L} \quad , \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_c - T_f} \quad , \quad U = \frac{u}{V_0} \quad , \quad V = \frac{v}{V_0} \quad , \quad \tau = t \frac{V_0}{L} \quad , \quad P = \frac{p - p_0}{\rho V_0^2}$$

Dans ces relations x et y sont les coordonnées cartésiennes ; u et v sont les composantes de la vitesse ; g est l'accélération terrestre, T est la température, t est le temps et p est la pression. ν , α , et β désignent, respectivement, la viscosité, la diffusivité thermique et le coefficient d'expansion thermique.

La résolution des équations précédentes est basée sur les conditions aux limites figurant sur la figure 1.

L'équation permettant la détermination du champ de la génération dans le domaine considéré est donnée par l'expression suivante [2] :

$$S_{gen} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right]}_{S_\theta} + \underbrace{\phi \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]}_{S_\psi} \quad (6)$$

Dans cette formule S_θ est la génération d'entropie thermique, S_ψ la génération d'entropie visqueuse et

$$\phi = \frac{\mu V_0^2}{k \Delta T^2} \text{ est le coefficient de distribution d'irréversibilité.}$$

Le nombre de Bejan (Be) local qui exprime le rapport entre la génération d'entropie thermique et la génération d'entropie totale est défini par :

$$Be = \frac{S_\theta}{S_\theta + S_\psi} \quad (7)$$

L'intégration numérique, des équations (6) et (7), sur toute la surface de la cavité (Voir l'équation (8)) nous permet de calculer la génération de l'entropie moyenne et le nombre moyen de Bejan.

$$\overline{S_{gen}} = \int_0^1 \int_0^1 (S_\theta + S_\psi) dXdY \quad \overline{Be} = \int_0^1 \int_0^1 Be dXdY \quad (8)$$

III. PROCEDURE NUMERIQUE

Le système d'équation (1-4) avec les conditions aux limites (5a-5d) a été discrétisé par la méthode des différences finies. La discrétisation suivant le temps est assurée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. Les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma Upwind du 3^{ème} ordre, alors que les termes diffusifs et les termes sources sont traités par un schéma de différences centrales du 4^{ème} ordre. L'équation de la fonction de courant est résolue par la méthode itérative de sur relaxation N.L.O.R. (Non Linear Over Relaxation). Une fois les champs thermique et hydrodynamique déterminés les équations (6 et 7) sont résolues pour obtenir, respectivement, les champs de la génération de l'entropie et le nombre local de Bejan. Une série de simulations préalables nous a permis d'opter pour un maillage non uniforme de 100x100 nœuds suivant chaque direction. Un code de résolution a été établi en

langage Fortran et a été validé en considérant le travail d'Aydin et Yang [8].

VI. RESULTATS

Les simulations numériques ont été effectuées pour un nombre de Reynolds fixé à 100, une longueur adimensionnelle de la partie chauffée ε égale à 0.8 et un coefficient de distribution d'irréversibilité ϕ égal à 10^{-4} . Trois valeurs du nombre de Prandtl (0.0198, 0.71 et 3.02) caractérisant, respectivement, le mercure, l'air et l'eau ont été considérées pour étudier leur influence sur les champs de la génération d'entropie et du nombre de Bejan et l'évolution de leur moyenne en régime de convection naturelle dominante ($Ri=15$).

A. Les champs de la génération d'entropie totale

Les contours de la génération d'entropie totale sont montrés par la figure 2 pour les différents fluides considérés. Nous constatons que la génération totale d'entropie augmente en fonction du nombre de Prandtl. Aux faibles valeurs de ce nombre, la variation de l'entropie totale ne varie pas beaucoup car le mécanisme de conduction domine et que le gradient de température et le champ d'écoulement sont si réduits ; mais pour les valeurs élevées de ce nombre, l'augmentation de la production totale d'entropie est plus importante, ce qui peut s'expliquer par l'augmentation de l'intensité de l'écoulement du fluide et des gradients de la température. En outre cette génération de l'entropie devient de plus en plus significative et se développe sur les parois latérales et la partie chauffée de la paroi inférieure.

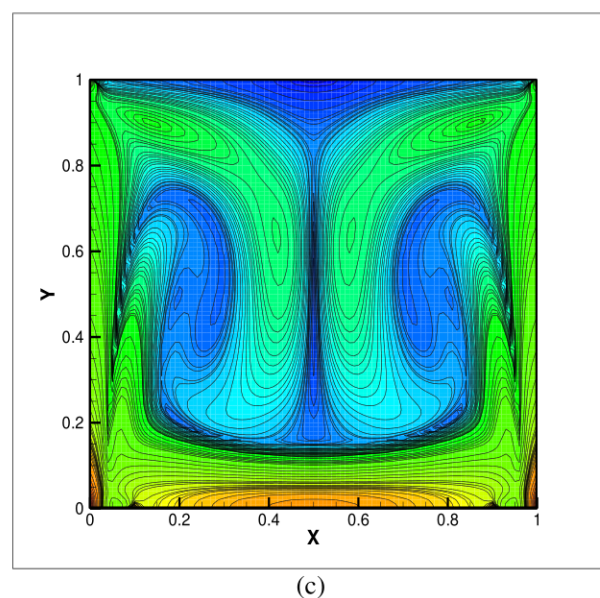
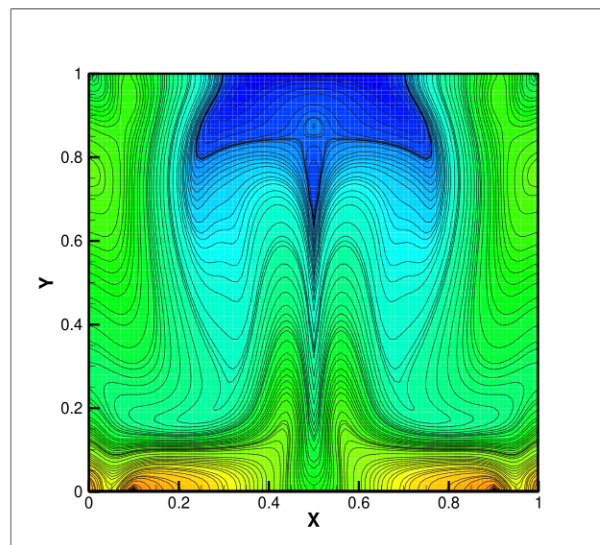
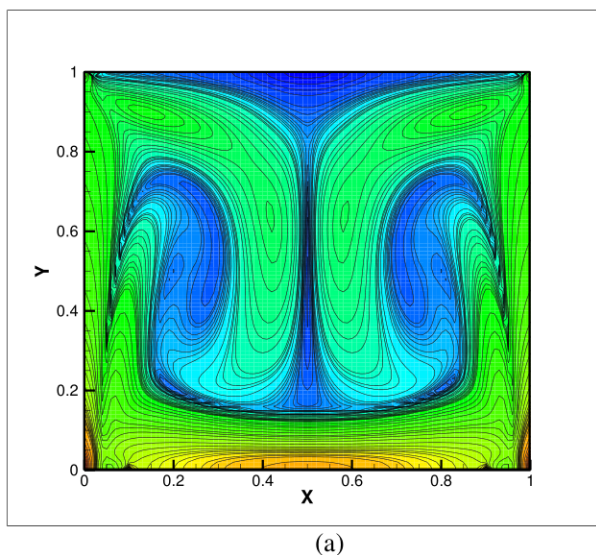
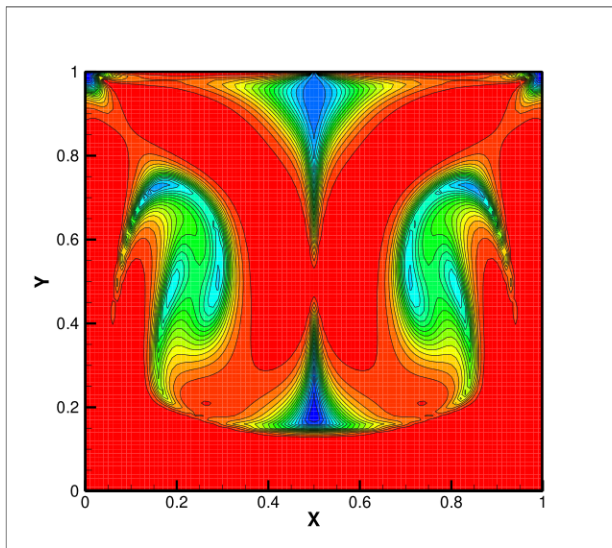


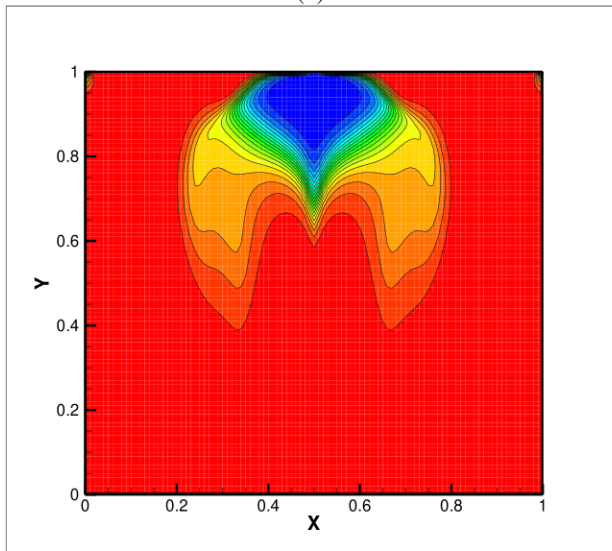
Figure 2. Génération d'entropie totale (a) Mercure $Pr=0.0198$, (b) Air $Pr=0.71$ et (c) Eau $Pr=3.02$

B. Les champs du nombre de Bejan

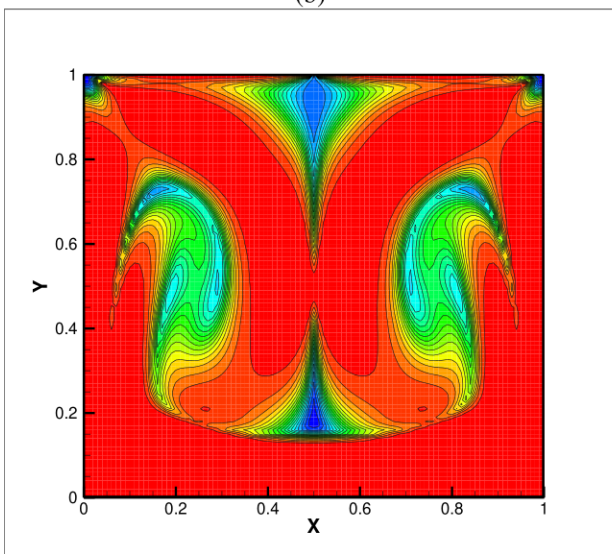
Les contours du nombre local de Bejan sont montrés dans la figure 3 pour les différents fluides considérés. Des valeurs maximales de ce nombre sont obtenues presque dans toute la cavité, sauf dans une partie médiane située sur la paroi supérieure qui se rétrécit au fur et à mesure que le nombre de Prandtl augmente.



(a)



(b)

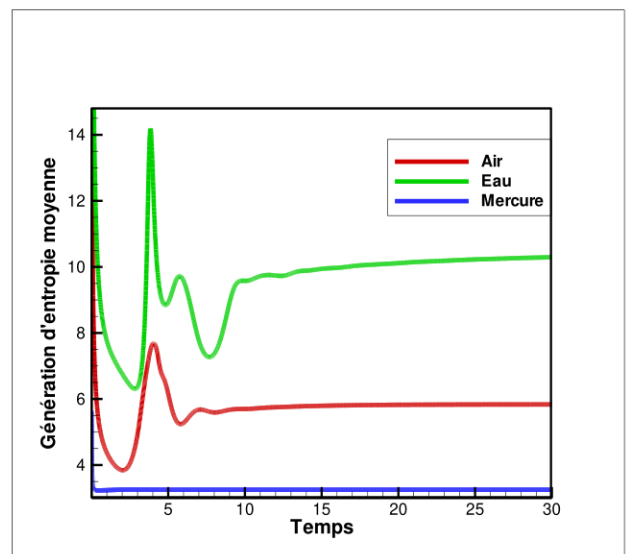


(c)

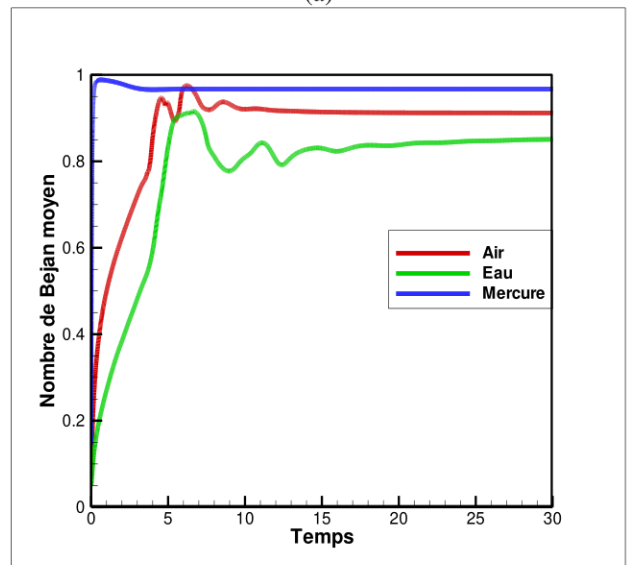
Figure 3. Nombre de Bejan (a) Mercure $Pr= 0.0198$, (b) Air $Pr=0.71$ et (c) Eau $Pr=3.02$

C. Evolution de la génération d'entropie moyenne et du nombre de Bejan moyen

L'évolution de la génération d'entropie moyenne et du nombre de Bejan moyen est montrée, respectivement, dans la figure 4 (a) et (b). Cette évolution présente des fluctuations dans les premiers instants avant de se stabiliser à des valeurs constantes. Ces valeurs confirment les résultats précédents à savoir que la génération de l'entropie totale augmente au fur et à mesure que le nombre de Prandtl augmente. Le nombre moyen de Bejan de l'air est légèrement inférieur que ceux du mercure et de l'eau.



(a)



(b)

Figure 4. Evolution de la génération d'entropie (a) et du nombre de Bejan (b)

IV. CONCLUSIONS

Dans cette étude numérique nous avons considéré l'influence du nombre de Prandtl sur la génération d'entropie de l'écoulement d'un fluide ou la convection naturelle est dominante ($Ri=16$). La configuration géométrique explorée est une cavité carrée chauffée par le bas et dont les parois latérales froides se déplacent vers le haut avec une vitesse constante. Toutes les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques. Les résultats préliminaires montrent:

- Une augmentation significative de la génération d'entropie moyenne quand le nombre de Prandtl augmente.
- Le nombre de Bejan moyen, pour tous les fluides considérés, est supérieur à 0.5 confirmant que la génération de l'entropie est essentiellement produite par les gradients de température.

REFERENCES

- [1] A. Bejan, Second law analysis in heat transfer. *Energy*, 1980, 5, 720–732.
- [2] A. Bejan. *Entropy Generation Minimization*, CRC Press, 1996.
- [3] A. Bejan. *Entropy Generation through Heat and Fluid Flow*. New York: Wiley Interscience, 1982.
- [4] Bejan A., *Advanced Engineering Thermo-dynamics*, John Wiley and Sons, New York 1988.
- [5] Ibrahim Dincer, Yunus A., Cengel, *Energy, Entropy and Exergy Concepts and Their Roles in Thermal Engineering*, *Entropy* 2001, Vol. 3, 116-149.
- [6] Öztop, H.F.; Al-Salem, K. *A review on entropy generation in natural and mixed convection heat transfer for energy systems*. *Renew. Sustain. Energy Rev.* 2012, Vol.16, pp. 911–920.
- [7] Öztop, H.F, Estellé, P, Yan, W.M, Al-Salem, K, Orfi, J, Mahian, O, A brief review of natural convection in enclosures under localized heating with and without nanofluids, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2015, Vol. 60, 2015, pp. 37-44
- [8] Aydin, O., Yang, W. J. *Mixed convection in cavities with a locally heated lower wall and moving sidewalls*. *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, 2000, Vol. 36, pp. 695–710.

Simulation Numérique de la Génération d'Entropie en Régime de Convection Mixte dans une Enceinte

Nawal. Ferroudj¹ and Saâdoun. Boudebous²

¹Université de Constantine 3, Faculté du Génie des Procédés Pharmaceutiques, Département de Génie Chimique, Constantine, Algérie, naweling@yahoo.fr

²Université de Constantine 3, Faculté du Génie des Procédés Pharmaceutiques, Département de Génie Chimique, Constantine, Algérie, s_boudebous@yahoo.fr

RÉSUMÉ. *Le présent travail concerne la simulation numérique de la génération d'entropie en convection mixte laminaire, dans une enceinte carrée remplie d'air, dont une partie du fond est soumise à une température chaude constante. Les parois latérales sont mobiles, et soumises à une température froide. Les autres parties de cette enceinte sont considérées adiabatiques. La méthode des différences finies, basée sur des schémas de discrétisations d'ordre supérieurs, a été utilisée pour la résolution numérique du système d'équation gouvernant ce phénomène. Le développement des champs de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan local, ainsi que les évolutions de la génération d'entropie thermique et visqueuse ont été présentées pour différentes valeurs du nombre de Richardson.*

Mots clés : *Génération d'entropie, Cavité carrée, Convection mixte, Différences finies*

NOMENCLATURE

Symboles :

Be nombre de Bejan

g accélération de la pesanteur, m/s²

L largeur, m

T température, K

S_{gen} génération d'entropie totale, Wm⁻³K⁻¹

U composante horizontale de la vitesse adimensionnelle

V composante verticale de la vitesse adimensionnelle

X coordonnée horizontale adimensionnelle

Y coordonnée verticale adimensionnelle

Lettres grecques :

ψ fonction de courant adimensionnelle

ω vorticité adimensionnelle

τ temps adimensionnel

θ température adimensionnelle

INTRODUCTION

Le phénomène de la génération d'entropie dans une cavité carrée partiellement chauffée, peut trouver son application pratique dans plusieurs domaines d'ingénierie, tel que le système de l'énergie solaire, le refroidissement des systèmes produisant l'énergie nucléaire, chimique et des composants électroniques. L'étude bibliographique nous a montré que la génération d'entropie en convection mixte induite dans des cavités a fait l'objet de nombreuses études en raison de son importance dans de nombreuses applications. Parmi ces travaux nous pouvons citer ceux de :

W. M. El Maghlany, K. M. Saqr, M. A. Teamah [1]: ont présenté une étude numérique de la génération d'entropie en convection naturelle et en régime laminaire dans une cavité carrée, soumises à un champ de chaleur isotropique, avec différente densité. Les parois droite et gauche mises à une température froide et chaude respectivement, et les autres parois sont adiabatiques. Les simulations sont effectuées pour des valeurs du nombre de Rayleigh (Ra) varie entre 10^3 et 10^5 . L'influence de l'intensité du champ de chaleur a été examinée.

A. Andreozzi, A. Auletta, O. Manca [2] : ont analysé la génération d'entropie locale en convection forcée laminaire dans un canal vertical dont les parois sont soumises à un flux de chaleur. Les champs et les profils de la génération d'entropie locale sont donnés pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh (Ra) et du rapport d'aspect (L/b). Une corrélation entre la génération d'entropie totale et ces deux derniers paramètres a été proposé.

I. Dagtekin, H. F. Oztop, A. Bahloul [3] : ont réalisé une étude sur la production d'entropie de la convection naturelle dans une enceinte en forme de Γ . Les iso courants, les isothermes, le nombre de Nusselt moyen et la génération locale de l'entropie sont donnés pour un nombre de Rayleigh (Ra) compris entre 10^3 et 10^6 , le rapport de la distribution des irréversibilités est lui compris entre 10^{-5} et 10^{-3} . Ils ont pu observer, que pour $10^3 \leq Ra \leq 10^4$, la génération d'entropie visqueuse est faible par rapport à la génération thermique alors qu'elles deviennent équivalentes pour $10^5 \leq Ra \leq 10^6$.

C. Padet, E. C. Milladlin, J. Padet, A. Dobrovicescu [4] : ont étudié un écoulement établi de convection mixte laminaire entre deux plaques planes parallèles verticales à températures imposées, le gradient de pression dans l'écoulement (ou la vitesse débitante) étant fixé. La détermination de la fonction de dissipation et de la production d'entropie thermique et visqueuse permet de déterminer une distance optimale entre les parois qui minimise la production d'entropie totale.

Y. Varol, H. F. Oztop, I. Pop [5] : ont mené une étude sur la génération d'entropie due à la convection naturelle, dans une enceinte triangulaire isocèle, poreuse et remplie d'un fluide. Les calculs ont été effectués pour différents nombre de Rayleigh ($10^2 \leq Ra \leq 10^3$) et de l'angle d'inclinaison φ ($0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$). Les angles d'inclinaison et le nombre Ra influent d'une manière significative sur le transfert de chaleur, l'écoulement du fluide et la génération d'entropie. La génération d'entropie maximale est observée à $\varphi=90^\circ$ et plusieurs cellules ont été observées. Les contours de la fonction de courant, de la température et de la génération d'entropie sont symétriques pour les angles $\varphi=0^\circ$ et $\varphi=180^\circ$.

M. Bouabid, M. Magherbi, N. Hidouri, and A. Ben Brahim [6] : ont analysé la convection naturelle dans une cavité rectangulaire inclinée remplie d'air. La génération d'entropie due au transfert de chaleur et au frottement du fluide a été déterminée. Celle-ci dépend du nombre de Grashof, de l'angle d'inclinaison, du rapport de distribution des irréversibilités et du rapport d'aspect de la cavité. Les résultats obtenus montrent que la production d'entropie augmente avec l'augmentation du nombre de Grashof, du rapport de distribution des irréversibilités et du rapport d'aspect de la cavité. L'entropie locale est générée principalement dans le coin inférieur de la paroi chauffée et dans le coin supérieur de la paroi froide.

Lorsqu'une différence de température est imposée, les effets de l'écoulement dus à la flottabilité et du déplacement de la paroi peuvent être comparables, et l'écoulement résultant se caractérise par un régime de convection mixte. La revue bibliographique précédente révèle un manque de travaux qui traitent de la génération de l'entropie en

convection mixte dans une enceinte partiellement chauffée par le bas et dont les parois latérales sont mobiles. C'est dans ce contexte que le but de cette investigation concerne la détermination de la génération d'entropie de l'écoulement d'air dans la configuration géométrique considérée.

MODÈLE PHYSIQUE ET FORMULATION MATHÉMATIQUE

Dans ce travail, on étudie numériquement un problème de la génération d'entropie de l'écoulement d'air dans une cavité carrée (**de longueur L**), dont les parois latérales (**mobiles vers le haut**) sont maintenues à une température froide constante. Une partie du fond (**de longueur 4L/5**) est soumise à une température chaude. Toutes les autres parties de cette enceinte sont considérées comme étant adiabatiques. Le nombre de Richardson (**Ri**) est le principal paramètre de contrôle.

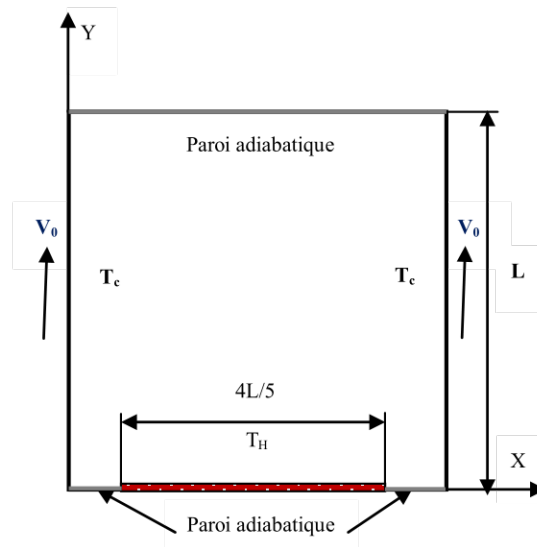


Figure 1. Configuration géométrique étudiée.

Le fluide étudié (air) est supposé Newtonien, incompressible, en écoulement laminaire et obéissant à l'approximation de Boussinesq. Le modèle mathématique régissant le phénomène considéré, en utilisant la formulation « vorticité-fonction de courant » [7,8] est donné par les équations adimensionnelles suivantes :

Équation d'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (1)$$

Équation de la vorticité

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (2)$$

Équation de la fonction de courant

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (3)$$

Les composants de vitesses

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y} \quad , \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4)$$

Équation de la génération d'entropie

$$S_{gen} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right]}_{S_\theta} + \underbrace{\frac{\mu V_0^2}{k \Delta T} \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]}_{S_\psi} \quad (5)$$

Les nombres sans dimension sont définies par :

$$\text{Re} = \frac{V_0 L}{\nu} \quad , \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha} \quad , \quad \text{Ri} = \frac{Gr}{\text{Re}^2} \quad , \quad Gr = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

Ils représentent, respectivement, les nombres de Reynolds, de Prandtl, de Richardson et de Grashof.

La génération d'entropie totale peut être obtenue par l'intégration de l'entropie locale dans tout le volume de la cavité. Cette intégrale peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\bar{S}_{gen} = \int_0^1 \int_0^1 S_{gen}(X, Y) dX dY \quad (6)$$

La résolution du système d'équation obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions initiales et aux limites pour chaque variable dépendante.

- Dans un premier temps, le fluide est au repos, et sa température adimensionnelle est nulle dans toute la cavité.
- La température adimensionnelle de la paroi gauche et droite est constante et égale à 0.
- La partie chaude de la paroi inférieure soumise à une température adimensionnelle égale à 1.
- Les conditions d'adiabatiques sont adoptées pour les autres parties de la cavité.
- La vitesse adimensionnelle des parois latérales est constante et égale à 1.

Le nombre de Bejan et un nombre sans dimension, utilisé en thermodynamique. On le définit de la manière suivante [8]:

$$Be = \frac{\overline{S_\theta}}{\overline{S_\theta} + \overline{S_\psi}} \quad , \quad \begin{cases} \overline{S_\theta} = \int_A S_\theta dA \\ \overline{S_\psi} = \int_A S_\psi dA \end{cases} \quad (7)$$

Où :

$\overline{S_\theta}$: Entropie générée par le transfert thermique.

$\overline{S_\psi}$: Entropie générée par le frottement visqueux.

PROCEDURE NUMERIQUE

La discrétisation des équations précédentes, des conditions initiales et aux limites est effectuée à l'aide d'une méthode des différences finies. Les termes temporels sont discrétisés par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 [9], et les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma Upwind de 3^{ème} ordre de Kawamura [10], alors que les termes diffusifs et les termes sources sont traités par un schéma de différences centrales du 4^{ème} ordre.

VALIDATION DU CODE DE CALCUL

Afin de vérifier la précision du code de calcul développé dans ce travail, nous avons comparé nos résultats avec ceux d'Aydin & Yang [11]. La figure (2) montre un excellent accord entre les résultats prévus par notre code de calcul et ceux rapportés dans cette référence.

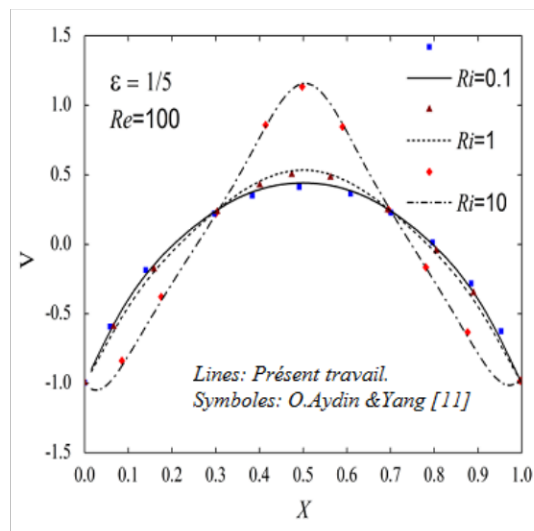


Figure (2). Comparaison des profils de vitesse verticale à Y=0.5

RESULTAS ET DISCUSSIONS

Toutes les simulations ont été réalisées en considérant l'**air** comme fluide avec un nombre de **Prandtl** égale à **0.71**, le nombre de **Reynolds** est fixé à **100**, la longueur adimensionnelle de la partie chauffée est égale à **0.8**, le nombre de **Richardson (Ri)**

concernant le régime de convection mixte considéré dans cette étude varie de **13** à **18**. Les exécutions numériques du code de calcul ont été réalisées avec un pas du temps adimensionnel égal à 10^{-4} .

Nous avons présenté les résultats sous forme de champs de la génération d'entropie thermique, visqueuse et totale ainsi que du champ du nombre de Bejan local. Pour plus détails, nous avons présenté aussi l'évolution des nombres de Bejan globaux.

Les champs de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan

La figure 3 (a) et (b) représente les contours de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan, respectivement, pour un nombre de **Richardson** égale à « **16** ».

Nous observons la symétrie des champs de la génération d'entropie et du nombre de **Bejan**. Les lignes de la génération d'entropie totale sont concentrées près de la paroi inférieure et les quatre coins de la cavité. Nous remarquons que, quelque soit le nombre de **Richardson**, la solution présente des lignes matérialisant la génération d'entropie totale caractérisée par la même structure.

Nous remarquons que le nombre de **Bejan** atteint sa valeur maximale dans les deux tiers inférieurs, et une partie supérieure de la cavité. Nous observons les faibles valeurs de ce nombre sur le centre de la paroi supérieure et le haut des parois latérales. Le nombre du **Bejan** augmente légèrement avec l'augmentation du nombre de **Richardson**.

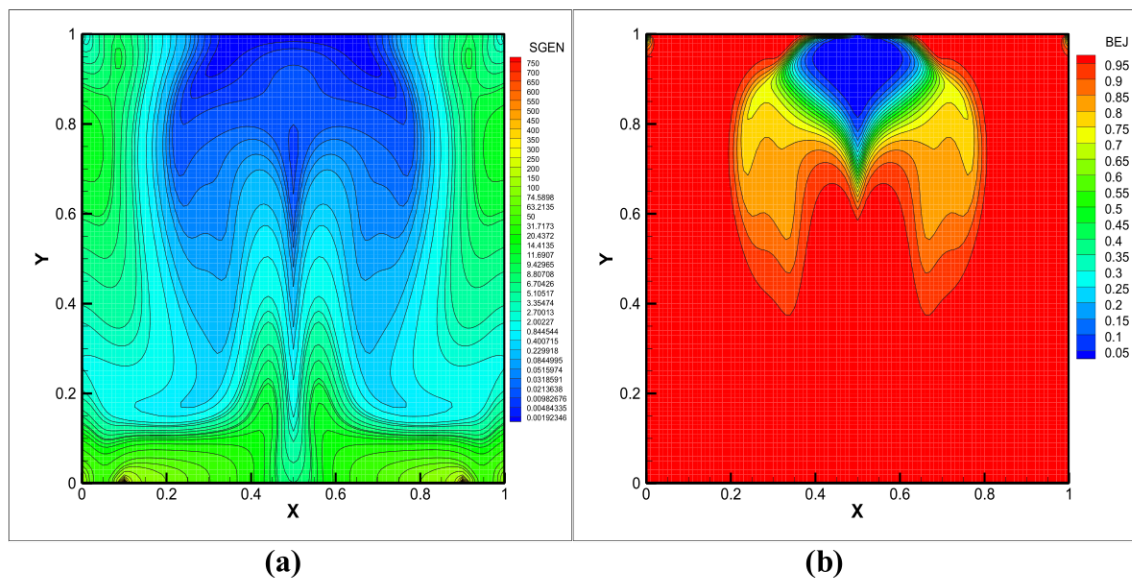


Figure 3. Champ de la génération d'entropie totale (a) et du nombre de Bejan local (b) Ri=16.

Les champs de la génération d'entropie thermique et visqueuse

La figure 4 (a) et (b) représente les contours de la génération d'entropie thermique et visqueuse pour la même valeur du nombre de **Richardson**. La génération de l'entropie thermique suit celle de la propagation de la chaleur à partir de la partie

chauffée de la paroi inférieure de la cavité. Elle est créée tout le long de cette paroi (et surtout aux extrémités de la partie chauffée) et le long des parois latérales mobiles.

La génération de l'entropie visqueuse commence à paraître de plus en plus importante. Elle est généralement créée, dans cette structure d'écoulement, le long des parois mobiles, dans les quatre coins et particulièrement dans la partie centrale de la cavité.

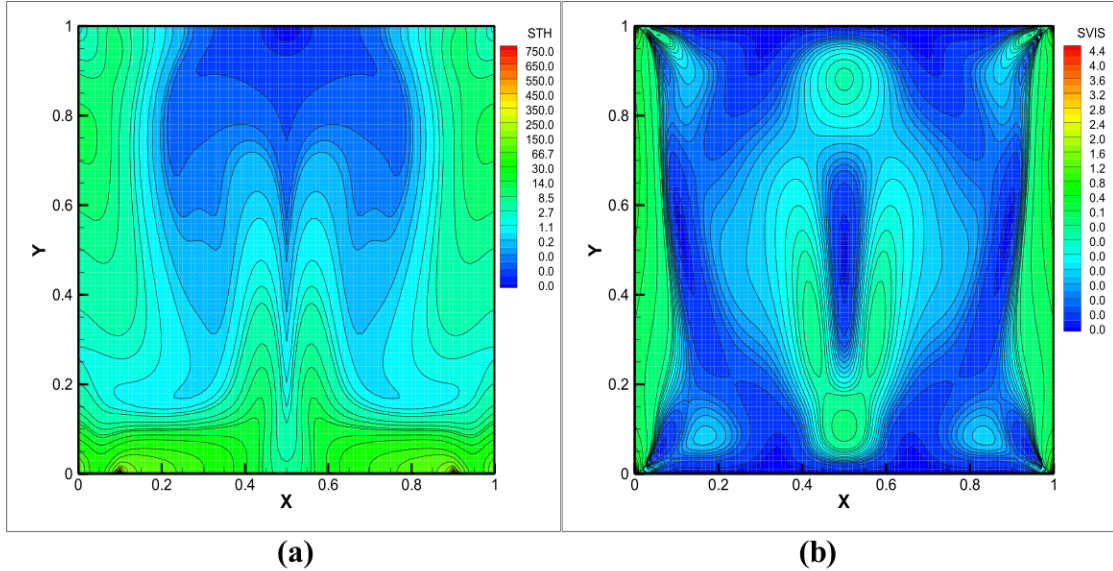


Figure 4. Champ de la génération d'entropie thermique (a) et visqueuse (b) $Ri=16$.

Evolution de la génération d'entropie totale

La figure 5 représente l'évolution de la génération d'entropie en fonction des mêmes valeurs du nombre de **Richardson**. Pour toutes les valeurs de ce nombre, nous constatons une oscillation dans les premiers instants ensuite une stabilisation vers une valeur asymptotique constante. Par conséquent, l'évolution de la génération d'entropie augmente avec l'augmentation du nombre de **Richardson**.

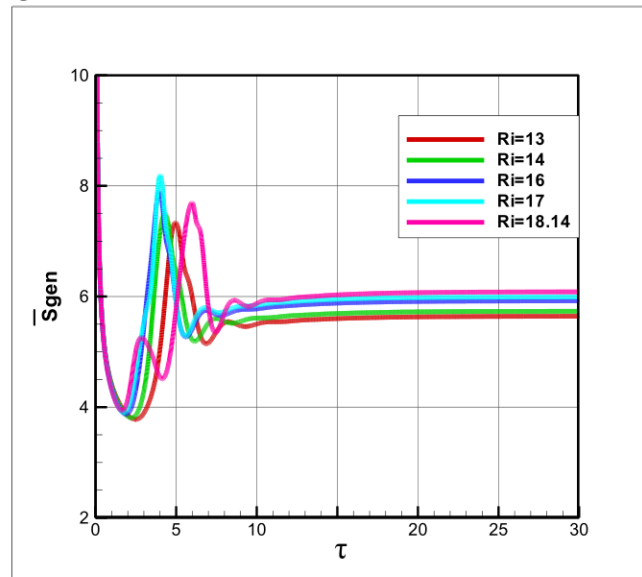


Figure 5. Evolution de la génération d'entropie totale pour différentes valeurs du nombre de Richardson Ri .

Evolution de la génération d'entropie thermique

L'évolution de la génération d'entropie thermique est représentée dans la figure (6) pour les mêmes valeurs du nombre de **Richardson**. Nous remarquons que cette évolution est la même que celle obtenue dans la figure (5) de point de vue qualitatif et quantitatif, cela est expliquée par les valeurs importantes des gradients de température.

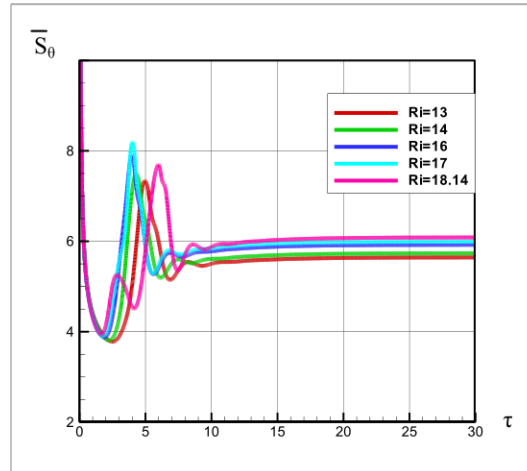


Figure 6. Evolution de la génération d'entropie thermique pour différentes valeurs du nombre de Richardson Ri.

Evolution de la génération d'entropie visqueuse

La figure 7 montre l'évolution de la génération d'entropie visqueuse en fonction des mêmes paramètres précédents. Nous remarquons que cette évolution est la même pour toutes les valeurs du nombre de **Richardson** sous forme typique, et augmente avec l'augmentation de ce nombre. Nous observons les faibles valeurs de l'entropie visqueuse qui est due aux gradients de vitesse par rapport à l'entropie thermique. Mais celle-ci devient de plus en plus importante au fur et à mesure que le nombre de **Richardson** augmente.

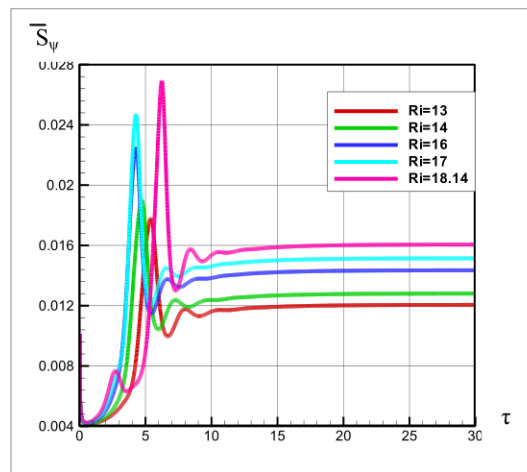


Figure 7. Evolution de la génération d'entropie visqueuse pour différentes valeurs du nombre de Richardson Ri.

Evolution du nombre de Bejan

La figure 8 représente l'évolution du nombre de **Bejan** en fonction du nombre de **Richardson**. Nous constatons que cette évolution passe par des oscillations dans les premiers instants, ensuite elle stabilise vers une valeur asymptotique constante. Cette évolution diminue avec l'augmentation du nombre de **Richardson**. Nous observons que le nombre de **Bejan** est toujours supérieur à **0.5**, ce qui implique que la création de l'entropie est principalement due aux gradients de température.

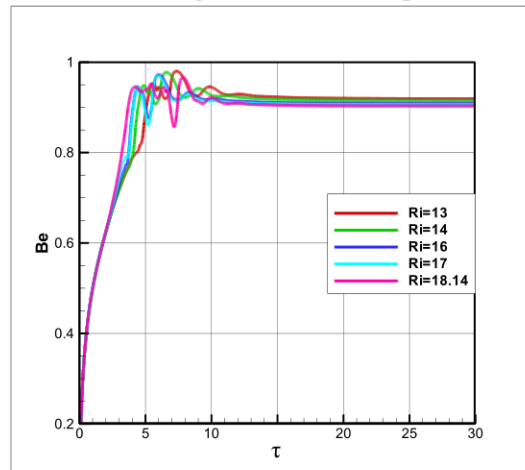


Figure 8. Evolution du nombre de Bejan moyen pour la troisième configuration de l'écoulement.

CONCLUSION

L'étude présentée dans ce travail porte sur la génération d'entropie de l'écoulement d'air en convection mixte laminaire dans une cavité carrée. Les parois latérales froides se déplacent vers le haut, et une partie du fond est soumise à une température chaude, tandis que les autres parties sont considérées adiabatiques.

- Les équations du modèle mathématique régissant le phénomène considéré dans cette étude, mettent en évidence la présence du nombre de Richardson dans l'équation du transport de la vorticité. Le comportement de l'écoulement dans la configuration géométrique envisagée est très sensible à la valeur de ce paramètre.
- En utilisant la méthode des différences finies pour discrétiser les équations gouvernant ce phénomène, nous avons pu déterminer les champs de la génération d'entropie totale, thermique, visqueuse et du nombre de Bejan local, ainsi que les évolutions de ces derniers en fonction du nombre de Richardson.
- Le nombre de Richardson agit favorablement sur la génération d'entropie totale, thermique et visqueuse.
- Les résultats obtenus montrent que quelque soit le nombre de Richardson, les valeurs du nombre de Bejan sont toujours supérieures à 0.5, confirmant que la génération d'entropie thermique est plus importante que la génération d'entropie visqueuse.

REFERENCES

1. W. M. El Maghlany, K. M. Saqr, M. A. Teamah (2014) *Numerical simulations of the effect of an isotropic heat on the entropic generation due to natural convection in a square cavity*, Energy conversion and Management, 85, 333-342.
2. Assunta Andreozzi, Antonio Auletta, Oranzio Manca, (2006), *Entropy generation in natural convection in a symmetrically and uniformly heated vertical channel*, International Journal Heat and Mass Transfer, 49, 3221-3328.
3. Ihsan Dagtekin, Hakan F. Oztop, Ali Bahloul, (2007), *Entropy generation for natural convection in Γ -shaped enclosures*, International journal Of Heat and Mass transfer, 34, 502-510.
4. C. Padet, E. C. Mlladlin, J. Padet, A. Dobrovicescu, (2009), *Dissipation visqueuse et production d'entropie dans un écoulement établis de convection mixte*, U.P.B. Sci. Bull, Series D, 71, Iss.2.
5. Yasin Varol, Hakan F. Oztop, Ioan Pop, (2009), *Entropy generation due to natural convection in non-uniformly heated porous isosceles triangular enclosures at different positions*, International journal Of Heat and Mass transfer, 52, 1193-1205.
6. Mounir Bouabid, Mourad Magherbi, Nejib Hidouri, Ammar Ben Brahim, (2011), *Entropy Generation of Natural Convection in Inclined Rectangular Cavity*, Entropy, 13, 1020-1033.
7. Susumukotate, Kunio Hijikata, (1993), *Numerical simulations of heat transfer and fluid flow on a personal computer*, Transport processes in Engineering, 3rd edition, Elsevier science Publishers B.V.
8. Clement Kleinstreuer, (2009), *Modern Fluid Dynamics*, Springer Verlag, USA.
9. Dale A. Anderson, John C.Tannehill, Richard H.Plether, (1984), *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, United states.
10. T. Kawamura, H. Takami, K. Kuwahara, (1985), *New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations*, Numerical Method in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, 218, 291-295.
11. O. Aydin, Wen-Jei Yang, "Mixed convection in cavities with a locally heated wall and moving sidewalls," Numerical Heat Transfer, Part A, Application, 695-170, 2000.

GÉNÉRATION D'ENTROPIE DE L'ÉCOULEMENT D'UN FLUIDE DANS UNE CAVITÉ CHAUFFÉE PAR LE BAS

N. Ferroudj¹, D. Menacer¹, S. Boudebous¹

¹ Génie des Procédés Pharmaceutiques

Université de Constantine 3

Constantine, Algérie.

¹naweling@yahoo.fr

²dalila_menacer@live.fr

³s_boudebous@yahoo.fr

Résumé – La présente étude considère le phénomène de la génération d'entropie de l'écoulement d'air en convection mixte laminaire, dans une cavité carrée, à parois gauche et droite mobile vers le haut, et sont soumises à une température froide. Une partie du fond est soumise à une température chaude constante. Les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques. Les équations régissant ce phénomène ont été résolues par une approche numérique basée sur la méthode des différences finies, en considérant un maillage uniforme.

I. INTRODUCTION

Les problèmes de la génération d'entropie de l'écoulement d'un fluide en convection mixte sont d'une grande importance pour la simulation des phénomènes physiques rencontrés en industrie. L'entropie est produite au sein du système par les effets d'irréversibilités comme le frottement, le mélange de substance, les réactions chimiques et la transmission de chaleur [1]. L'étude de ce phénomène a été initiée par A. Bejan [2,3]. Nous présentons dans ce qui suit quelques études concernant ce sujet.

Latife Berrin Erbay, Zekeriya Altaç, Birsen Sülüş [4] : ont présenté une étude numérique de la génération d'entropie en convection naturelle et en régime laminaire dans une cavité carrée. Deux modes opératoires différents sont considérés. Les simulations sont effectuées pour des valeurs du nombre de Prandtl (Pr) égales à 0.01 et 1, alors que celles du nombre de Rayleigh (Ra) varient entre 10^2 et 10^8 .

M. Saleem, Md. A. Hossain, S. Mahmud, I. Pop [5] : ont exposé une étude sur la génération d'entropie due à la convection naturelle, dans une enceinte carrée dont le côté droit est complètement ouvert. Les forces thermocapillaires ont été prises en compte (Nombre de Marangoni).

Ahmet Z. Sahin, Rached Ben-Mansour [6] : ont examiné la génération d'entropie dans un conduit circulaire dont la paroi est soumise à un flux de chaleur. Divers fluides (huile industrielle, eau et fréon) ont été utilisés.

J. C. C. Garcia, C. T. Trevino [7] : Dans ce travail, les auteurs ont analysé l'écoulement d'un fluide avec transfert de chaleur et de masse dans une cavité verticale dont le rapport d'aspect est égale à $1/10$. Toutes les simulations ont été faites avec un nombre de Prandtl fixe et trois valeurs du nombre de Rayleigh ($10^3, 10^4, 10^5$).

Actes de la Conférence Internationale de 2014 sur l'Énergétique Appliquée et la Pollution, organisée par le laboratoire LEAP, Décembre 14-15, 2014, Constantine, Algérie

Le but de ce travail concerne la détermination de la génération d'entropie de l'écoulement d'air en convection mixte, pour différente valeur du nombre de Richardson.

II. FORMULATION MATHÉMATIQUE DU PROBLÈME

A. Variables adimensionnelles

Afin de rendre le problème le plus générale possible, nous procédons au changement de variables suivantes :

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad \tau = t \frac{V_0}{L}, \quad U = \frac{u}{V_0}, \quad V = \frac{v}{V_0}$$

$$\theta = \frac{(T - T_f)}{(T_c - T_f)}$$

B. Formulation du problème

Les équations régissant ce problème sont les équations de Navier-Stokes, l'équation d'énergie et l'équation de la génération d'entropie. Pour une formulation simple, nous avons considérés quelques approximation, tel que l'hypothèse de Boussinesq.

1) Équation d'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right) \quad (1)$$

2) Équation de la vorticité

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (2)$$

3) Équation de la fonction de courant

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (3)$$

4) Les composants de vitesses

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4)$$

5) Équation de la génération d'entropie

$$S_{gen} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right]}_{S_\theta} + \underbrace{\frac{\mu V_0^2}{k \Delta T} \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]}_{S_\psi} \quad (5)$$

La génération d'entropie totale est exprimée par :

$$\bar{S}_{gen} = \int_A S_{gen}(X, Y) dXdY \quad (6)$$

Ri, Re et Pr dénotent, respectivement, les nombres de Reynolds, de Richardson et Prandtl, et sont définis par les relations suivantes :

Actes de la Conférence Internationale de 2014 sur l'Énergétique Appliquée et la Pollution, organisée par le laboratoire LEAP, Décembre 14-15, 2014, Constantine, Algérie

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad , \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad , \quad Ri = \frac{Gr}{Re^2} \quad , \quad Gr = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu^2}$$

Initialement le fluide est au repos, et sa température adimensionnelle est nulle dans toute la cavité. Une paroi du fond de celle-ci est soumise à une température adimensionnelle égale à 1. Les deux parois latérales se déplacent vers le haut avec une vitesse adimensionnelle égale à 1, et sont soumises à une température égale à 0. Les autres parties sont considérées adiabatiques.

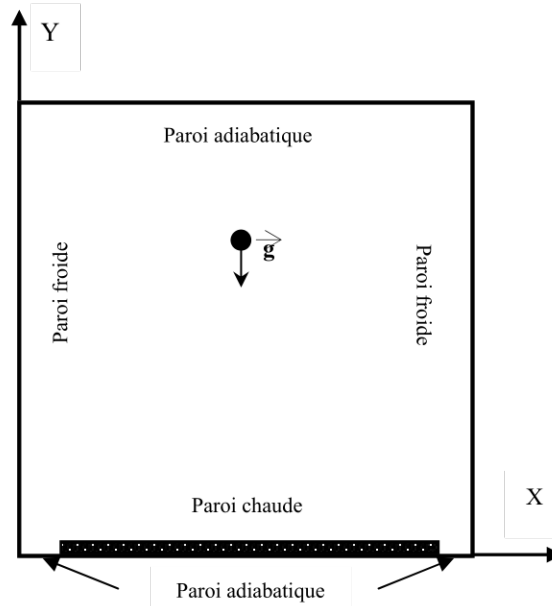


Figure 1. Géométrie de la cavité étudiée

Le nombre de Bejan (Be) est un nombre sans dimension, exprimant le rapport entre la génération d'entropie thermique et la génération d'entropie totale [8] :

$$Be = \frac{\overline{S_\theta}}{\overline{S_\theta} + \overline{S_\psi}} \quad , \quad \begin{cases} \overline{S_\theta} = \int_A S_\theta dA \\ \overline{S_\psi} = \int_A S_\psi dA \end{cases} \quad (7)$$

Si :

$Be > 0.5$ implique la domination de l'irréversibilité de transfert de chaleur.

$Be < 0.5$ implique la domination de l'irréversibilité de frottement de fluide.

Le transfert de chaleur à partir de la paroi chaude est exprimé par le nombre de Nusselt moyen défini comme suit :

$$Nu(x) = -\frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0} \quad , \quad \overline{Nu} = \int_0^L Nu(x) dX \quad (8)$$

Actes de la Conférence Internationale de 2014 sur l'Énergétique Appliquée et la Pollution, organisée par le laboratoire LEAP, Décembre 14-15, 2014, Constantine, Algérie

III. PROCÉDURE NUMÉRIQUE

Les équations (1-4), en tenant compte des conditions aux limites, sont résolues par la méthode des différences finies. La discrétisation temporelle est assurée par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 [9]. Les termes diffusifs sont discrétisés en utilisant les différences centrales, alors que les termes convectifs sont discrétisés à l'aide d'un schéma Upwind de troisième ordre [10]. L'équation de la fonction de courant est résolue par la méthode itérative de Non Linear Over Relaxation (N.L.O.R), et sa convergence est obtenue à chaque pas du temps [11].

Afin de rendre la solution numérique indépendante des valeurs des pas ($\Delta X, \Delta Y$), nous avons procédé des différentes simulations, en comparant les valeurs du nombre de Nusselt moyen. Nous avons constatés un écart de l'ordre 1% entre les valeurs du nombre de Nusselt moyen, déterminées avec un maillage uniforme de 81x81, 101x101, 161x161 et de 201x201. Ces comparaisons nous permettent le choix du maillage (**101x101**) car il fournit un bon compromis entre la durée du temps de calcul et la précision de ces calculs.

IV. RÉSULTATS

Toutes les simulations ont été réalisées en considérant l'air comme fluide, avec les valeurs du nombre de **Prandtl** et de **Reynolds** respectivement de **0.71** et **100**, le nombre de **Richardson** varie entre **0.1** et **3.75**, et la longueur de la partie chauffée est égale à **0.8**, avec un pas du temps adimensionnel fixé à 10^{-4} .

Nous avons présenté les résultats sous forme des champs de la génération thermique; visqueuse et totale ainsi que des champs du nombre de Bejan local. Pour plus détails, nous avons présenté aussi l'évolution des nombres de Bejan global et de Nusselt moyen.

A. Les champs de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan

Les contours de la génération d'entropie totale et du nombre local de Bejan sont montrés par la figure 2 (a) et (b), respectivement.

Les lignes matérialisant la génération d'entropie sont concentrées près de la paroi inférieure (paroi chauffée en partie), ainsi que dans les quatre coin de la cavité. Nous avons noté que, quelque soit le nombre de **Richardson**, la structure de la génération d'entropie totale est la même qualitativement, mais elle devient de plus en plus importante lorsque ce nombre augmente. Nous remarquons que le nombre de **Bejan** atteint sa valeur maximale dans les deux tiers inférieurs de la cavité, parce que la génération d'entropie thermique est plus important que la génération d'entropie visqueuse. Nous remarquons des faibles valeurs de ce nombre sur la paroi supérieure, et le haut des parois latérales, à cause de faible effet des gradients de températures générés dans cette partie de la cavité. Le nombre du **Bejan** se développe avec l'augmentation du nombre de **Richardson**.

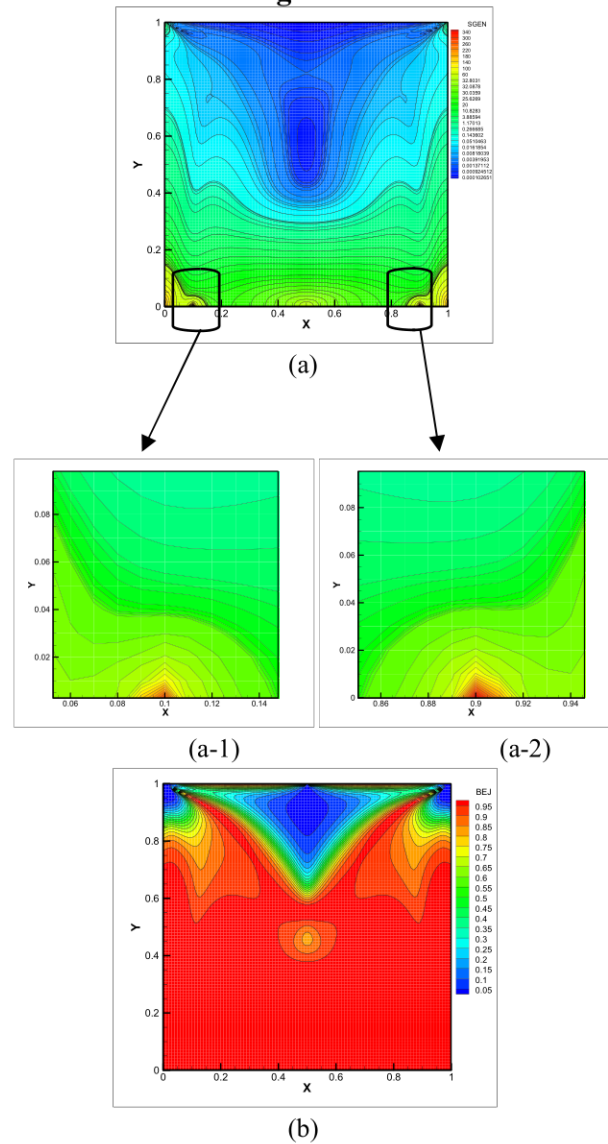


Figure 2. Champ de la génération d'entropie totale (a) et du nombre de Bejan local (b) Zoom des parties du champ de la génération d'entropie (a-1):(a-2)

B. Les champs de la génération d'entropie thermique et visqueuse

La figure 3 (a) et (b) représente le champs de la génération d'entropie thermique et visqueuse respectivement.

La génération de l'entropie thermique représente toute seule la production de toute l'entropie dans la cavité, et cela quel que soit la valeur du nombre de Richardson.

Pour toutes les valeurs du nombre de Richardson nous avons constaté que la génération d'entropie visqueuse est beaucoup moins importante que la production d'entropie thermique. Nous retrouvons la justification de la négligence de la fonction de dissipation dans l'établissement du bilan de l'équation de la conservation de l'énergie.

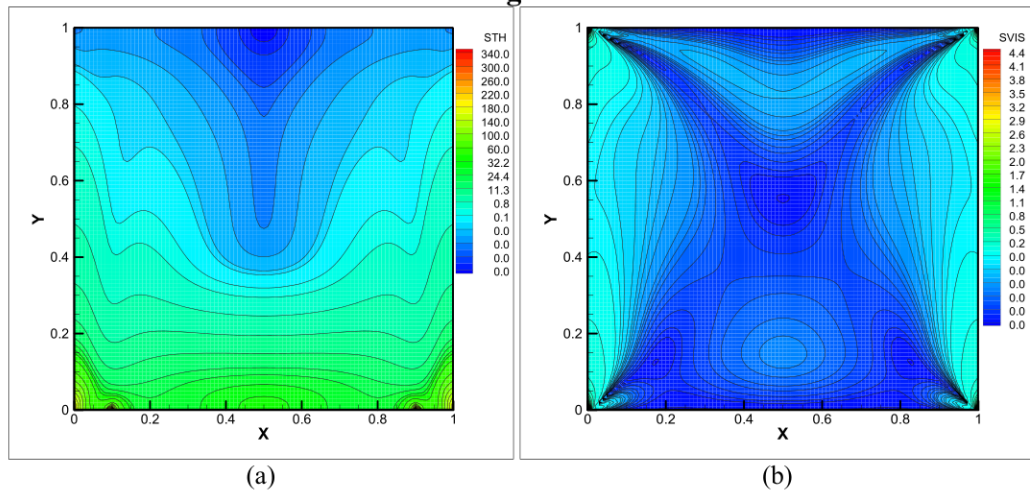


Figure 3. Champ de la génération d'entropie thermique (a) et de la génération d'entropie visqueuse (b)

C. Evolution du nombre du Nusselt moyen

La figure 4 représente l'évolution du nombre de **Nusselt moyen** en fonction du nombre de **Richardson**. Elle montre que les profils de l'évolution du nombre de **Nusselt moyen** sont similaires pour toutes les valeurs du nombre de **Richardson**. Nous remarquons une diminution très rapide du nombre de **Nusselt moyen**, puis une augmentation brusque dans les premiers instants car l'écoulement est instable, ensuite il diminue régulièrement pour se stabiliser vers une valeur limite constante. Le nombre de **Nusselt moyen** augmente avec l'augmentation du nombre de **Richardson**.

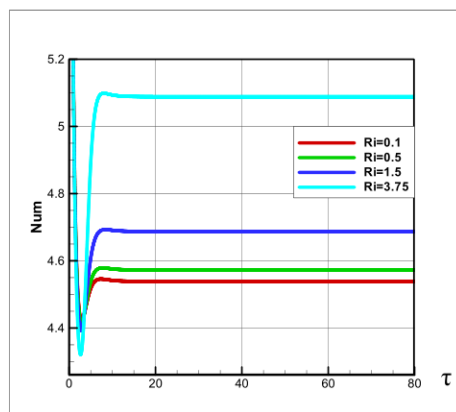


Figure 4. Evolution du nombre de Nusselt moyen pour la première configuration de l'écoulement

D. Evolution de la génération d'entropie totale

La figure 5 représente l'évolution de la génération d'entropie en fonction du nombre de **Richardson**. Pour toutes les valeurs de ce nombre nous constatons une diminution très rapide puis une augmentation brusque dans tous les premiers temps, ensuite une stabilisation vers une valeur asymptotique constante. Cette évolution est semblable à celle du nombre de Nusselt moyen. L'augmentation du nombre de **Richardson** implique l'augmentation de la génération d'entropie à l'intérieur de la cavité.

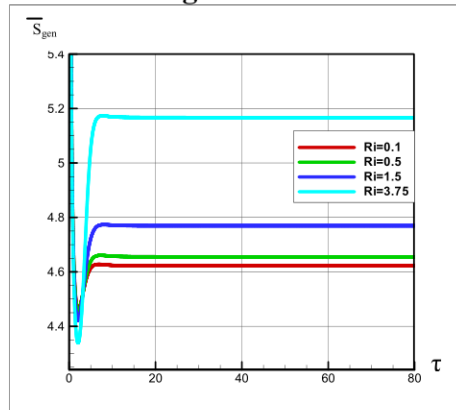


Figure 5. Evolution de la génération d'entropie totale

E. Evolution de la génération d'entropie thermique et visqueuse

L'évolution de la génération d'entropie thermique en fonction du nombre de **Richardson** est montrée dans la figure 6. Nous constatons que la génération d'entropie thermique est la même que celle de la génération d'entropie d'un point de vue qualitatif et quantitatif, ce qui implique que les gradients de température sont plus importants que ceux de vitesse.

La figure 7 montre l'évolution de la génération d'entropie visqueuse en fonction du nombre de **Richardson**. Nous remarquons, pour toutes les valeurs du nombre de **Richardson**, une diminution très rapide dans les premiers instants, puis une tendance vers une valeur limite lorsque le temps augmente. Nous constatons aussi de faibles valeurs de la génération d'entropie visqueuse par rapport à celles de la génération d'entropie thermique, à cause des faibles gradients de vitesse devant ceux de la température. L'augmentation du nombre de **Richardson** a pour conséquence l'augmentation de la génération d'entropie visqueuse.

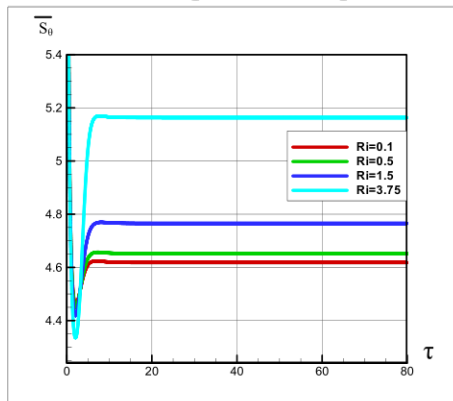


Figure 6. Evolution de la génération d'entropie thermique

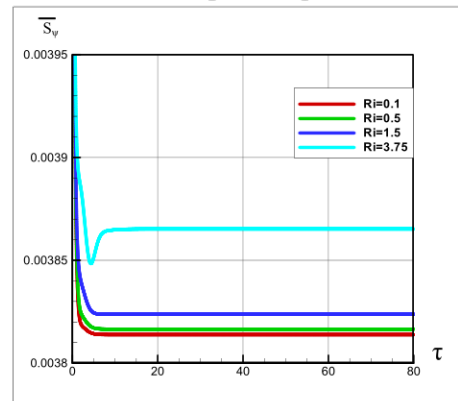


Figure 7. Evolution de la génération d'entropie visqueuse

F. Evolution du nombre de Bejan

La figure 8 représente l'évolution du nombre de **Bejan** en fonction des différentes valeurs du nombre de **Richardson**. Cette évolution augmente très rapidement dans les premiers instants puis se stabilise en tendant vers une valeur asymptotique constante. Pour toutes les valeurs du nombre de **Richardson** le nombre de **Bejan** est supérieur à 0.5 ce qui montre que la création de l'entropie par les gradients de température est largement supérieure à celle créée par les gradients de vitesse.

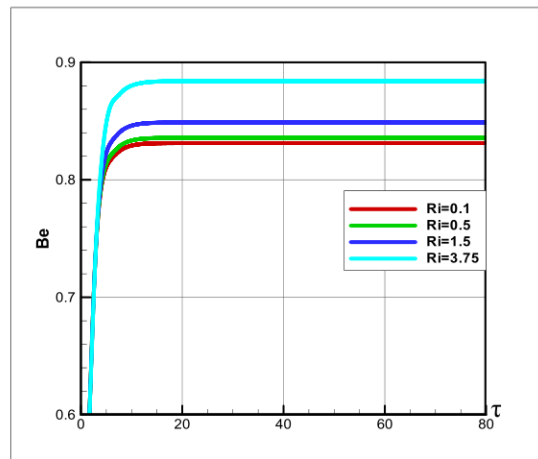


Figure 8. Evolution du nombre de Bejan moyen

V. CONCLUSION

La variation du nombre de Richardson Ri , lors de l'étude de la génération d'entropie en convection mixte se développant au sein d'une enceinte carrée, dont les parois gauche et droite mobiles soumettent à une température fixée, et une partie du fond soumise à une température fixe, a été étudiée numériquement à l'aide d'une fonction de courant-vorticité ($\psi-\omega$). Les résultats montrent que la création de l'entropie totale augmente avec l'augmentation du nombre de Richardson, ce qui est confirmé par les valeurs du nombre de Bejan (tous supérieurs à 0.8).

Références

- [1] Y. A. Cengel, M. A. Boles, "Thermodynamique une approche programmatique", science de l'ingénieur. The Mc Graw-Hill Companies, 2008.
- [2] A. Bejan, "A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer," *J. Heat Transfer*, vol. 101, 1979, pp. 718-725.
- [3] A. Bejan, "The thermodynamic design of heat and mass transfer processes and devices," *J. Heat and Fluid Flow*, vol. 8, 1987, , pp. 258-275.
- [4] Latife Berrin Erbay, Zekeriya Altaç, Birsen Sülüş, "An Analysis of The Entropy Generation in A Square Enclosure," *Entropy*, Vol 5, 496-505, 2003.
- [5] M. Saleem, Md. Anwar Hossain, Shohel Mahmud d, Ioan Pop, "Entropy generation in Marangoni convection flow of heated fluid in an open ended cavity," *International journal Of Heat and Mass transfer*, Vol 54, pp 4473-4484, 2011.
- [6] Ahmet Z.Şehin, Rached Ben Mansour, "Entropy Generation in Laminar Fluid Flow Through A Circular Pipe," *Entropy*, Vol 5, 404-416, 2003.
- [7] Juan Carlos Cajas Garcia, César Treviño Treviño, "Natural Convection and Entropy Generation In A Small Aspect Ratio Cavity," *Mecánica Computacional*, Vol XXIX, págs 3281-3289, 15-18 Noviembre 2010.
- [8] S. A. Gandjalikhan Nassab, A. Bahrami, R. Moosavi, "Entropy generation in convection over an inclined backward-facing step with bleeding". *International Journal of Science and Technology Education Research*, Vol 2(5), pp 88-97, May 2011.
- [9] Dale A. Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Pletcher, "Computational Fluid

**Actes de la Conférence Internationale de 2014 sur l'Énergétique Appliquée et la
Pollution, organisée par le laboratoire LEAP, Décembre 14-15, 2014, Constantine,
Algérie**

Mechanics and Heat Transfer,” Hemisphere Publishing Corporation, United states, 1984.

[10] T. Kawamura, H. Takami, K. Kuwahara, “New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations”.

Numerical Method in Fluid Dynamics, Lecture Notes in Physics, Vol 218, pp 291-295, 1985.

[11]: John Wiley & Sons. “Applied Numerical methods”. Copyright, by John Wiley & Sons, Inc, 1969.

Nomenclature

Be nombre de Bejan

g accélération de la pesanteur, m/s^2

L largeur, *m*

t temps, *s*

T température, *K*

S_{gen} génération d'entropie totale, $Wm^{-3}K^{-1}$

U composante horizontale de la vitesse a dimensionnelle

V composante verticale de la vitesse a dimensionnelle

X coordonnée horizontale a dimensionnée

Y coordonnée verticale a dimensionnée

symboles grecs

ψ fonction de courant

ω vorticité a dimensionnelle

τ temps a dimensionnel

θ température a dimensionnelle

Génération d'entropie de l'écoulement d'un fluide dans une cavité chauffée

Nawal. Ferroudj^{#1}, Dalila. Menacer^{#2}, Saâdoun. Boudebous^{#3}

[#] Département de Génie Chimique, Faculté de Génie des Procédés Pharmaceutiques, Université de Constantine 3.

Université de Constantine 3 UV N05, Ali Menjeli Nouvelle Ville, Khroub, Constantine, Algérie.

¹naweling@yahoo.fr

²menacer.dalila@yahoo.fr

³s_boudebous@yahoo.fr

Résumé— Dans ce travail, nous présentons une étude numérique du phénomène de la génération d'entropie en convection mixte laminaire, dans une cavité carrée remplie d'air, dont une partie du fond est soumise à une température constante et de longueur égale au quatre cinquième de celle de la cavité, les parois latérales se déplacent vers le haut avec une vitesse fixée, et toutes les autres parties de cette cavité sont considérées adiabatiques. Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'énergie, et de la génération d'entropie régissant ce phénomène ont été discrétisées par la méthode des différences finies. Un code de calcul est développé en langage Fortran pour résoudre le système d'équation obtenu par cette discrétisation. Les résultats obtenus sont présentés sous forme des champs dynamique et thermique pour différentes valeurs du nombre de Richardson.

Mots clés— Génération d'entropie, convection mixte, cavité carrée, méthode des différences finies

I. INTRODUCTION

Le problème de l'écoulement des fluides avec transfert de chaleur dans des cavités munies des parois mobiles, trouve son application pratique dans le secteur industriel. Lorsqu'une différence de température est imposée, les effets de l'écoulement dus à la flottabilité et du déplacement de la paroi peuvent être comparables, et l'écoulement résultant se caractérise par un régime de convection mixte, ce qui rend l'analyse de tels écoulements encore plus complexe. Par nature le phénomène de la convection est chaotique ; une légère perturbation peut entraîner des modifications significatives de l'écoulement, il est donc tout à fait naturel de s'intéresser à l'identification des différents paramètres, qui peuvent influencer directement ou non l'écoulement en régime de convection mixte et laminaire ayant lieu dans de telles cavités.

La génération d'entropie est une dégradation d'énergie qui se produit notamment, chaque fois que l'énergie non calorifique est transformée en chaleur, où chaque fois que de la chaleur est échangée entre deux corps à des températures

différentes [1]. L'étude de la génération d'entropie a été initiée par A. Bejan [2,3] qui considère que la génération d'entropie de l'écoulement d'un fluide en régime de convection forcé et laminaire, est induite par des mécanismes visqueux et thermique, impliquant les gradients de vitesses et de température. La performance des procédés industriels, mettant en jeu ces différents types d'écoulements, est étroitement liée à la minimisation de la création de cette entropie et par conséquent cela constitue une motivation suffisante pour une meilleure connaissance des différents mécanismes qui occasionnent la création de cette entropie. Nous évoquons dans ce qui suit les principales études concernant ce sujet.

B. S. Yilbas, et al [4]: ont présenté une étude numérique de la génération d'entropie en convection naturelle et en régime laminaire dans une cavité carrée chauffée par le bas, refroidie par le haut et dont les parois verticales sont adiabatiques. Neuf cas ont été étudiés en faisant varier l'écart de température entre la paroi chaude et la paroi froide.

A. C. Baytas [5]: a rapporté une étude numérique de la génération d'entropie en convection naturelle et en régime laminaire dans un milieu poreux confiné dans une cavité carrée inclinée.

S. Z. Shuja, B. S. Yilbas, and M. O. Iqbal [6]-[7]: ont conduit une étude numérique de la génération d'entropie en convection mixte laminaire dans une cavité carrée, contenant un obstacle. Ils ont repris la même étude que la précédente avec la même configuration géométrique. Dans cette seconde étude, l'influence du nombre de Stanton et du rapport d'aspect de l'obstacle ont été examinés.

M. Magherbi, H. Abbassi, A. Ben Brahim [8]: ont effectué une étude numérique portant sur la génération d'entropie en convection naturelle instationnaire dans une cavité carrée.

Latife Berrin Erbay, Zekeriya Altaç, Birsen Sülüş [9]: ont présenté une étude numérique de la génération d'entropie en convection naturelle et en régime laminaire dans une cavité carrée. Les simulations sont effectuées pour des valeurs du nombre de Prandtl (Pr) égales à 0.01 et 1, alors que celles du nombre de Rayleigh (Ra) varient entre 10^2 et 10^8 .

O. Haddad, M. Abuzaid, M. Al-Nimr [10] : ont analysé la génération d'entropie en convection forcée laminaire dans un micro canal horizontal. L'effet des nombres de Knudsen, Reynolds, Prandtl, d'Eckert et la différence de température sur la production d'entropie à l'intérieur du micro canal est discuté.

T. Basak, R. S. Kaluri [11] : ont étudié numériquement la génération d'entropie de la convection naturelle dans une cavité remplie d'un matériau poreux et soumise à une grande variété des conditions aux limites thermiques. Les irréversibilités thermiques sont analysées pour différents nombres de Prandtl ($Pr = 0.026, 988, 24$) et différents nombres de Rayleigh compris entre 10^3 et 10^5 .

La génération d'entropie en convection mixte et en régime laminaire dans des cavités est un sujet qui reste encore à explorer vu sa complexité. Le but de cette investigation concerne la détermination de la génération d'entropie de l'écoulement d'air dans la cavité considérée.

II. DESCRIPTION DU PROBLEME

Le modèle physique est présenté sur la Fig. 1. Il s'agit d'une cavité carrée dont une partie du fond est soumise à une température constante, de longueur égale au quatre cinquième de celle de la cavité L . Les parois latérales de cette cavité se déplacent vers le haut avec une vitesse fixée, et toutes les autres parties sont considérées adiabatiques. L'entropie de l'écoulement de l'air est générée au sein de cette cavité par l'irréversibilité créée par des mécanismes visqueux et thermiques dus aux gradients de vitesse et de températures.

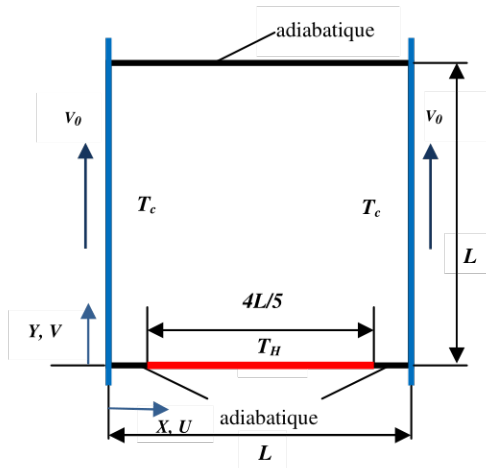


Fig. 1 Géométrie de la cavité étudiée

III. MODELE MATHEMATIQUE

Le système d'équation régissant le modèle s'écrit sous la forme adimensionnelle suivante :

A. Equation d'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\text{RePr}} \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right] \quad (1)$$

B. Equation de vorticité

$$\frac{\partial \omega}{\partial \tau} + U \frac{\partial \omega}{\partial X} + V \frac{\partial \omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial Y^2} \right] + \text{Ri} \frac{\partial \theta}{\partial X} \quad (2)$$

C. Equation de la fonction de courant

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\omega \quad (3)$$

D. Les composants de vitesses

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial Y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial X} \quad (4)$$

Avec :

θ : Température adimensionnelle.

ω : La vorticité.

ψ : La fonction de courant.

E. Equation de la génération d'entropie

$$S_{gen} = \underbrace{\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)^2 \right]}_{S_{\theta}} + \underbrace{\frac{\mu V_0^2}{k \Delta T} \left[2 \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right]}_{S_{\psi}} \quad (5)$$

La génération d'entropie totale est exprimée par:

$$\overline{S}_{gen} = \int_A S_{gen}(X, Y) dX dY \quad (6)$$

Le nombre de Reynolds (Re), le nombre de Prandtl (Pr) et le nombre de Grashof (Gr) sont les principaux paramètres de contrôle et sont définis comme suit :

$$\text{Re} = \frac{V_0 L}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{\alpha}, \quad \text{Gr} = \frac{g \beta \Delta T L^3}{\nu^2}$$

Les paramètres adimensionnelles dans les équations précédents sont définis par:

$$X = \frac{x}{L}, \quad Y = \frac{y}{L}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_H - T_c}, \quad U = \frac{u}{V_0}, \quad V = \frac{v}{V_0}$$

Le nombre de Bejan (Be) est un nombre sans dimension exprimant le rapport entre la génération d'entropie thermique et la génération d'entropie totale [12] :

$$\text{Be} = \frac{\overline{S}_{\theta}}{\overline{S}_{\theta} + \overline{S}_{\psi}}, \quad \begin{cases} \overline{S}_{\theta} = \int_A S_{\theta} dA \\ \overline{S}_{\psi} = \int_A S_{\psi} dA \end{cases} \quad (7)$$

Si :

Be > 0.5 implique la domination de l'irréversibilité de transfert de chaleur.

Be < 0.5 implique la domination de l'irréversibilité de frottement de fluide.

L'étude de transfert de chaleur dans la cavité, nécessite la détermination du taux de transfert de chaleur matérialisé par le nombre de Nusselt local et moyen [13].

$$Nu(x) = -\frac{\partial \theta}{\partial Y} \Big|_{Y=0}, \quad \overline{Nu} = \int_0^L Nu(x) dX \quad (8)$$

Les conditions aux limites adoptées pour la résolution du problème sont :

$$\begin{aligned} \theta=0 \quad U=0, V=1 \quad \text{à} \quad X=0-1 \quad \text{et} \quad 0 < Y < 1 \\ \theta=1 \quad U=V=0 \quad \text{à} \quad Y=0 \quad \text{et} \quad \frac{1-\varepsilon}{2} \leq X \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0 \quad U=V=0 \quad \text{à} \quad Y=1 \quad \text{et} \quad 0 < X < \frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2} < X < 1 \\ \frac{\partial \theta}{\partial Y}=0 \quad U=V=0 \quad \text{à} \quad Y=1 \quad \text{et} \quad 0 < X < 1 \end{aligned}$$

Où $\varepsilon = \frac{l}{L}$ est la longueur adimensionnelle de la partie chauffée.

IV. PROCEDURE NUMERIQUE

Les équations (1) à (5) avec les conditions aux limites sont discrétisées à l'aide d'une méthode aux différences finies. La discrétisation des différents termes des équations gouvernantes est développée à l'aide d'un schéma Upwind du troisième ordre pour les termes convectifs [14], un schéma centré du quatrième ordre pour les termes diffusifs, ainsi que pour les dérivées partielles du premier ordre.

Les équations (1) et (2) sont résolues par la méthode de Runge-Kutta d'ordre quatre [10] et l'équation (3) par la méthode NLOR: « Non Linear Over Relaxation » [15].

V. RESULTATS ET DISCUSSION

Toutes les simulations ont été faites en considérant l'air comme fluide avec un nombre de Prandtl égal à **0.71**, le nombre de Reynolds est fixé à **100** et la longueur de la partie chauffée est égale à **0.8**. Les nombres de **Grashof** et de **Richardson** sont les paramètres variables du problème. Parmi ces simulations nous avons choisi celles concernant le régime de la convection naturelle dominante ($Ri \geq 21$).

Nous avons présenté les résultats sous forme des champs de la génération d'entropie thermique, visqueuse et totale ainsi que des champs du nombre de Bejan local. Pour plus détails, nous avons présenté aussi l'évolution des nombres de Bejan global et de Nusselt moyen.

A. Développement de l'écoulement en fonction de la génération d'entropie

Les figures (2), (a), (b) et (c) montrent le développement de l'écoulement pour $Ri=21$, **25**, **50** respectivement. L'écoulement passe par plusieurs structures, tout d'abord une première structure formée de deux cellules contrarotatives strictement symétriques, ensuite une seconde structure caractérisée par l'apparition de deux cellules non symétriques

et enfin une troisième structure stable définie par quatre cellules parfaitement symétriques. Toute la chaleur de la partie chauffée s'élève en forme de champignon vers le haut de la cavité.

Le temps d'établissement de l'écoulement dépend du nombre de **Richardson**, plus ce nombre augmente et plus l'écoulement s'établit plus rapidement.

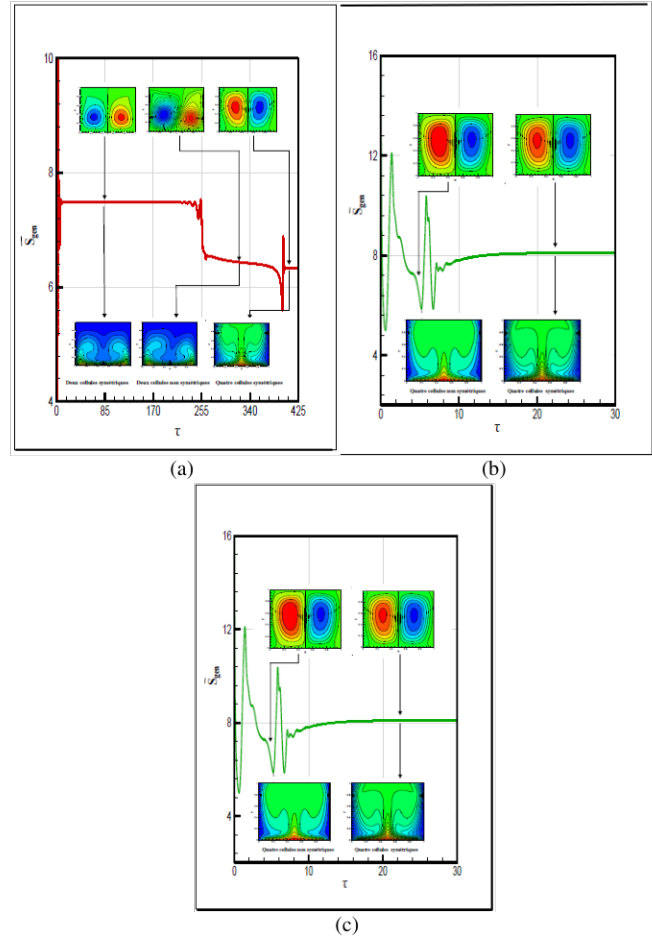


Fig. 2 Développement de l'écoulement durant la génération d'entropie totale

B. Champs de la génération d'entropie totale et du nombre de Bejan

Les contours de la génération d'entropie totale et du nombre de **Bejan** sont présentés dans la figure (3) Nous avons constatés que les lignes matérialisant la génération d'entropie indiquent une conservation de la symétrie. La génération d'entropie totale est principalement due aux gradients de températures aux niveaux de la paroi chaude.

Nous remarquons que le nombre de **Bejan** atteint sa valeur maximale dans les deux tiers inférieurs, et une partie supérieure de la cavité. Nous observons les faibles valeurs de ce nombre sur le centre de la paroi supérieure et le haut des

parois latérales. Nous avons pu remarquer aussi que ces contours se développent de plus en plus avec l'augmentation du nombre de **Richardson**.

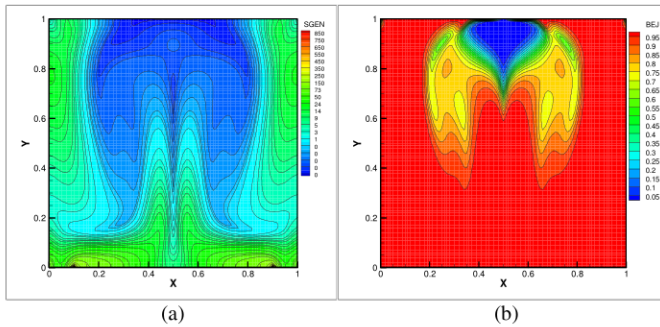


Fig. 3 Champs de la génération d'entropie totale (a) et du nombre de Bejan (b)

C. Champs de la génération d'entropie thermique et visqueuse

Ces champs sont montrés dans la figure (4) pour une valeur du nombre de **Richardson** égale à « 21 ».

La génération d'entropie thermique est conforme à la distribution de la température donnée par la figure (3). Elle est surtout créée près de la paroi chauffée, et près de deux parois latérales.

La génération d'entropie visqueuse apparaît nettement le long des deux parois latérales, dans les quatre coins et au milieu de la cavité.

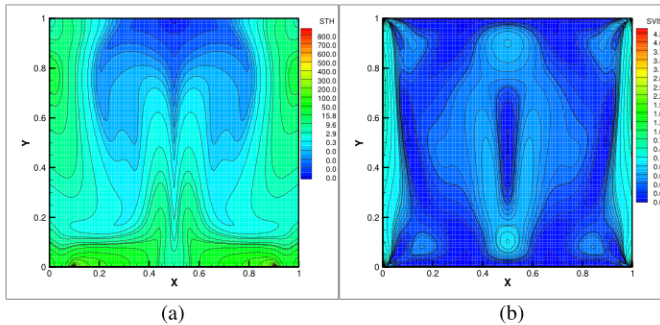


Fig. 4 Champs de la génération d'entropie thermique (a) et visqueuse (b)

D. Evolution du Nombre de Nusselt Moyen

La figure (5) montre l'évolution du nombre de **Nusselt moyen** en fonction du nombre de **Richardson**.

Pour toutes les valeurs de ce nombre, nous remarquons que l'évolution est la même du point de vue qualitatif. Nous constatons des oscillations au fur et à mesure que l'on avance dans le temps jusqu'à atteindre la stabilisation vers une limite constante. L'augmentation du nombre de **Richardson** implique l'augmentation du nombre de **Nusselt moyen**.

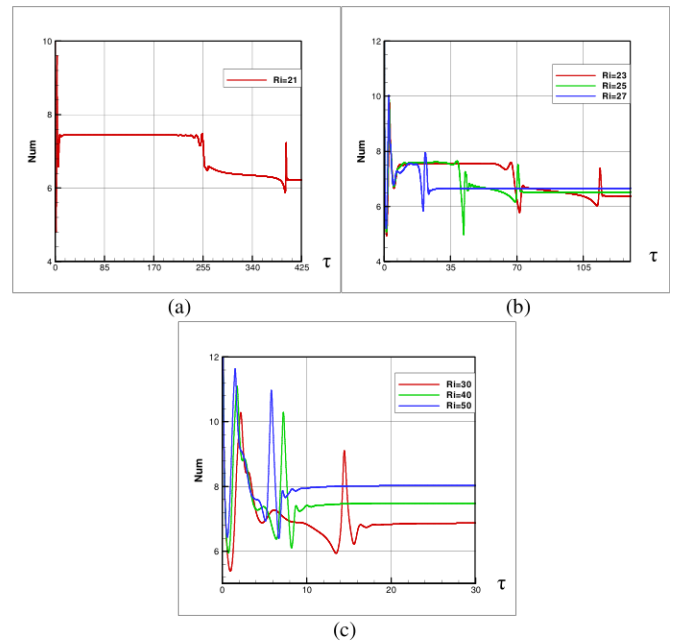


Fig. 5 Evolution du nombre de Nusselt moyen

E. Evolution de la génération d'entropie thermique

L'évolution de la génération d'entropie thermique est représentée dans la figure (6) en fonction des différentes valeurs du nombre de **Richardson**.

Pour toutes les valeurs de ce nombre, nous constatons que cette évolution est la même que celle obtenue dans la figure (2) de point de vue qualitatif et quantitatif. Les gradients de température sont plus importants que ceux de la vitesse.

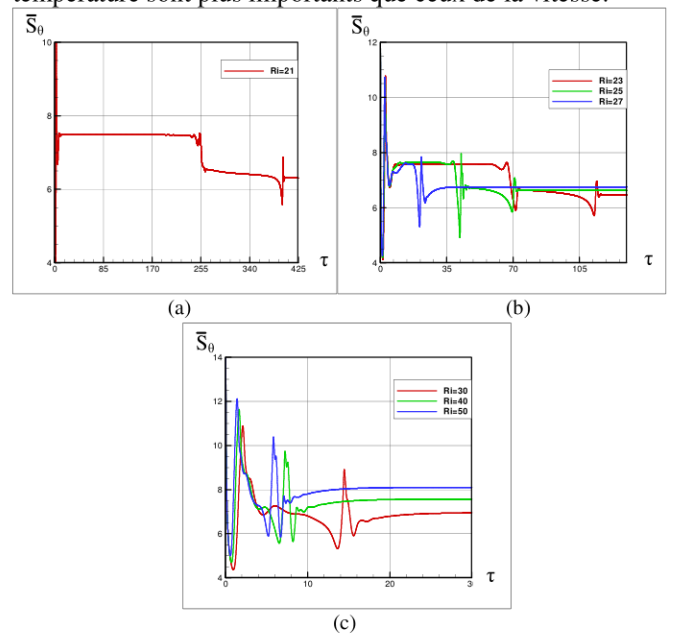


Fig. 6 Evolution de la génération d'entropie thermique

F. Evolution de la Génération d'Entropie Visqueuse

Cette évolution est représentée dans la figure (7) pour les mêmes valeurs des paramètres précédents. Nous remarquons une oscillation ensuite une stabilisation vers une valeur limite fixe. Nous observons aussi de faibles valeurs de l'entropie visqueuse par rapport à l'entropie thermique, ce qui confirme les résultats obtenus dans la figure (6). Cette évolution augmente avec l'augmentation du nombre de **Richardson**.

Nous constatons que la génération d'entropie visqueuse ne cesse d'augmenter au fur et à mesure du développement de l'écoulement, après chaque changement de la structure de l'écoulement elle augmente sensiblement, alors que la génération d'entropie thermique diminue après chaque bifurcation de l'écoulement.

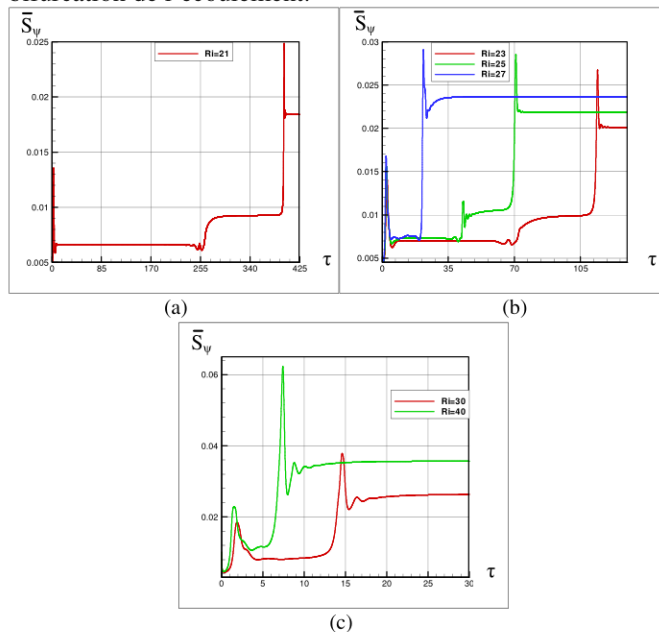


Fig. 7 Evolution de la génération d'entropie visqueuse

F. Evolution du nombre de Bejan

La figure (8) montre l'évolution du nombre de **Bejan** en fonction du nombre de **Richardson**. Les profils de cette évolution sont les mêmes que ceux de la génération d'entropie totale du point de vue qualitatif. Nous observons que le nombre de **Bejan** change à chaque bifurcation de l'écoulement. Il diminue à chaque changement de l'écoulement. A notre avis, cela est dû à l'augmentation de la génération d'entropie visqueuse à chaque changement de l'écoulement. Une fois l'écoulement établi, la valeur de ce paramètre est presque la même quelque soit le nombre de **Richardson**.

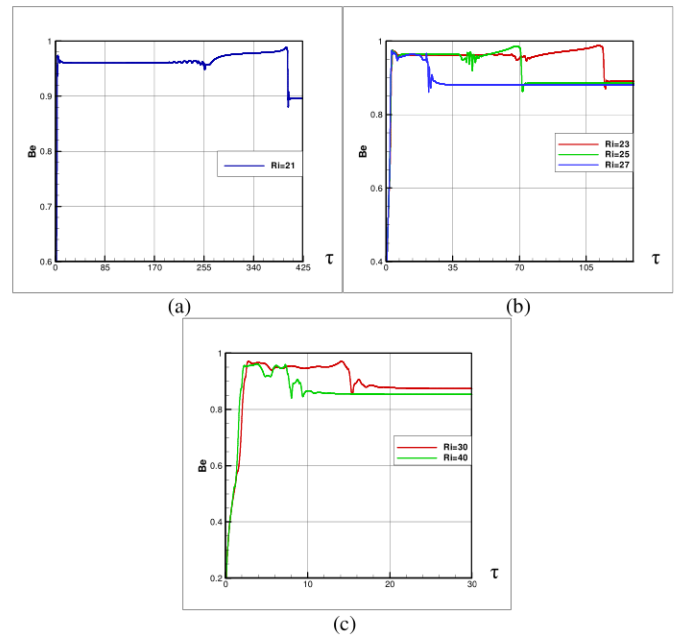


Fig. 8 Evolution du nombre de Bejan moyen

VI. CONCLUSIONS

La simulation numérique de la génération d'entropie en fonction de différents paramètres de l'écoulement d'un fluide en convection mixte, et en régime laminaire, dans une cavité carrée chauffée par le bas, et dont les parois latérales se déplacent vers le haut avec une vitesse fixe, les autres parties sont considérées adiabatiques, est l'objectif principal de notre étude.

Les équations gouvernant ce phénomène ont été discrétisées par la méthode des différences finies, et les systèmes algébriques obtenus ont été résolus par des méthodes numériques appropriées.

Nous avons pu déterminer la structure générale de l'écoulement dans cette cavité sous forme d'isotherme et d'isocourants, les champs de la génération d'entropie, ainsi que l'évolution temporelle du nombre de Nusselt moyen, la génération d'entropie totale et le nombre de Bejan.

L'analyse des résultats préliminaires montre que la création de l'entropie totale augmente avec l'augmentation du nombre de Richardson, ce qui est confirmé par les valeurs du nombre de Bejan «**convection naturelle dominante**». Lorsque ce nombre augmente «**convection naturelle dominante**» la création de l'entropie est essentiellement due aux gradients de température.

REFERENCES

- [1] P. A. JAVET, P. LERCH, E. PLATTNER, Introduction à la chimie pour ingénieurs, 2nd ed, Presses polytechniques et universitaires romandes, 1995.
- [2] A. Bejan, "A study of entropy generation in fundamental convective heat transfer," *J. Heat Transfer*, vol. 101, pp. 718-725. 1979

- [3] A. Bejan, "The thermodynamic design of heat and mass transfer processes and devices," *J. Heat and Fluid Flow*, vol. 8, pp. 258-275. 1987.
- [4] A. Bejan, "The thermodynamic design of heat and mass transfer processes and devices," *J. Heat and Fluid Flow*, vol. 8, pp. 258-275. 1987.
- [5] B. S. Yilbas, "Natural Convection and Entropy Generation in a Square Cavity," *International Journal of Entropy Research*, Res. 22, 1275-1290. 1998.
- [6] A. C. Baytaç, "Entropy generation for natural convection an inclined porous cavity," *International Journal of Heat and Mass transfer*, vol. 43, pp. 2089-2099. 1999.
- [7] S. Z. Shuja, B. S. Yilbas, M. O. Iqbal, "Mixed convection in a square cavity due to heat generation rectangular body," *International Journal of Numerical Method for Heat & Flow*, vol. 10, pp. 824-841. 2000.
- [8] B. S. Yilbas, S. Z. Shuja, M. O. Iqbal, "Energy and entropy analysis in a square cavity with protruding body: effect of protruding body aspect ratio," *International Journal of Energy Research*, vol. 26, 851-866. 2002.
- [9] L. B. Erbay, Z. Altaç, B. Süllüş, "An Analysis of the Entropy Generation in Square Enclosure," *Entropy*, vol 5, 496-505, 2003.
- [10] O. Haaddad, M. Abuzaid, M. Al-Nir, "Entropy Generation Due To Laminar Incompressible Forced Convection Flow Through Parallel-Plates Microchannel," *Entropy*, vol 5(6), 413-426, 2004.
- [11] T. Basak, R. S. Kaluri, A. Balakrishnan, "Effects of thermal boundary condition on entropy generation during natural convection," *Numerical Heat Transfer, Part A*, 59, 372-402, 2011.
- [12] Dale A. Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Plether, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, United States, 1984.
- [13] Ana-Maria Bianchi, *Transferts thermiques*, 1ère ed, Press polytechniques et universitaires romandes.
- [14] T. Kawamura, H. Takami, K. Kuwahara, "New higher-order upwind scheme for incompressible Navier-Stokes equations," *Numerical Method in Fluid Dynamics*, Lecture Notes in Physics, vol, 218, pp. 291-295, 1985.
- [15] Dale A. Anderson, John C.Tannehill, Richard H. Plether, *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, United states, 1984.
- [16] John Wiley & Sons, *Applied Numerical methods*, Copyright, by John Wiley & Sons, 1969.



Nom et Prénom : Nawal FERROUDJ
Titre : Étude numérique de la convection mixte et de la génération d'entropie
Dans une cavité chauffée par le bas : influence du nombre de Prandtl
Thèse en vue de l'Obtention du Diplôme de Doctorat en
Sciences Génie Chimique

Résumé

Cette étude présente une simulation numérique bidimensionnelle de la génération d'entropie durant la convection mixte et naturelle en régime laminaire transitoire de l'écoulement d'un fluide dans une cavité carrée partiellement chauffée. L'objectif principal de cette thèse est de présenter une nouvelle approche proposée qui permet de calculer la valeur exacte de la génération d'entropie (perte d'énergie) en considérant les valeurs exactes des propriétés thermo-physiques du fluide, et qui dépend aux nombres de Prandtl (Pr), de Rayleigh (Ra) et de la longueur (L) de la géométrie considérée.

Le modèle mathématique modélisant ce phénomène basé sur la formulation fonction de courant-vorticité ($\psi-\Omega$), et discrétisé par la méthode des différences finies en considérant un maillage non uniforme.

La première partie de ce travail est consacré à la présentation des résultats obtenus de la nouvelle approche utilisée pour déterminer une valeur exacte de la génération d'entropie en convection naturelle en comparant avec ceux imprécis de la littérature.

La seconde partie porte à l'étude de l'effet du nombre de Prandtl (Pr) sur la génération d'entropie en convection mixte laminaire dans une cavité carrée chauffée par le bas avec des parois latérales qui se déplacent vers le haut avec une vitesse constante, et sont soumises à une température froide fixée. Toutes les autres parties de cette cavité sont supposées adiabatiques. Trois fluides généralement utilisés en pratique sont le mercure (Pr=0.0251), l'air (Pr=0.7296) et l'eau (Pr=6.263) ont été étudiés et comparés. Les résultats montrent que l'impact du nombre de Prandtl est relativement important à la fois sur les performances du transfert de chaleur mesuré par le nombre de Nusselt moyen et sur la génération d'entropie totale. On constate que la génération d'entropie totale est significativement plus élevée dans le cas du mercure (Pr<<1) et de l'eau (Pr>>1) que dans le cas de l'air (Pr≈1).

Une attention particulière a été observée de l'influence du nombre de Prandtl de l'eau de 5.534, 3.045 et 2 respectivement, aux températures 303.15K, 333.15K et 363.15K. Les résultats numériques sont présentés sous forme de ligne de courant, des isothermes et des contours de la génération d'entropie pour différentes valeurs du nombre de Richardson. Des augmentations des valeurs du nombre de Nusselt moyen et une diminution de la génération d'entropie totale avec l'augmentation de nombres de Prandtl et de Richardson ont été remarquées.

Mots clés : Nombre de Prandtl, génération d'entropie, convection mixte et naturelle, nouvelle approche, méthode des différences finie.

Mots clés : Nombre de Prandtl, génération d'entropie, convection mixte et naturelle, nouvelle approche, méthode des différences finie

Directeur de thèse : Saadoun BOUDEBOUS – Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi

Année Universitaire : 2022-2023